

Pravděpodobnostní metody a matematická statistika

Prof. RNDr. Gejza Dohnal, CSc.

VII. Funkce náhodné veličiny



Funkce náhodné veličiny

Tato část je k prostudování na: https://sms.nipax.cz/_media/teorie_pravdepodobnosti.pdf
kapitola 13 Funkce náhodných veličin (str. 109-117).

Předpokládejme, že funkce $y=h(x)$ je definovaná na množině hodnot veličiny X . Potom distribuční funkce $G(y)$ transformované náhodné veličiny $Y=h(X)$ je:

$$G(y) = P(Y \leq y) = P(h(X) \leq y) = \int_{h(x) \leq y} f(x) dx$$

Hustotu veličiny $Y=h(X)$ potom dostaneme derivací distribuční funkce $G(y)$.

Funkce náhodné veličiny

Tato část je k prostudování na: https://sms.nipax.cz/_media/teorie_pravdepodobnosti.pdf
kapitola 13 Funkce náhodných veličin (str. 109-117).

Předpokládejme, že funkce $y=h(x)$ je definovaná na množině hodnot veličiny X . Potom distribuční funkce $G(y)$ transformované náhodné veličiny $Y=h(X)$ je:

$$G(y) = P(Y \leq y) = P(h(X) \leq y) = \int_{h(x) \leq y} f(x) dx$$

Hustotu veličiny $Y=h(X)$ potom dostaneme derivací distribuční funkce $G(y)$.

Je-li funkce $y=h(x)$ na množině hodnot veličiny X ryze monotónní, má náhodná veličina $Y=h(X)$ hustotu pravděpodobnosti

$$g(y) = f(h^{-1}(y)) \left| \frac{dh^{-1}(y)}{dy} \right|$$

kde $x=h^{-1}(y)$, je inverzní funkce k funkci $y=h(x)$.

Funkce náhodné veličiny

Je-li funkce $y=h(x)$ na množině hodnot veličiny X ryze monotónní, má náhodná veličina $Y=h(X)$ hustotu pravděpodobnosti

$$g(y) = f(h^{-1}(y)) \left| \frac{dh^{-1}(y)}{dy} \right|$$

kde $x=h^{-1}(y)$, je inverzní funkce k funkci $y=h(x)$.

Příklad1: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Y = e^X$ $g(y) = ?$

Funkce náhodné veličiny

Je-li funkce $y=h(x)$ na množině hodnot veličiny X ryze monotónní, má náhodná veličina $Y=h(X)$ hustotu pravděpodobnosti

$$g(y) = f(h^{-1}(y)) \left| \frac{dh^{-1}(y)}{dy} \right|$$

kde $x=h^{-1}(y)$, je inverzní funkce k funkci $y=h(x)$.

Příklad1: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Y = e^X$ $g(y) = ?$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$h(x) = e^x \Rightarrow h^{-1}(y) = \ln y$$

Funkce náhodné veličiny

Je-li funkce $y=h(x)$ na množině hodnot veličiny X ryze monotónní, má náhodná veličina $Y=h(X)$ hustotu pravděpodobnosti

$$g(y) = f(h^{-1}(y)) \left| \frac{dh^{-1}(y)}{dy} \right|$$

kde $x=h^{-1}(y)$, je inverzní funkce k funkci $y=h(x)$.

Příklad1: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Y = e^X$ $g(y) = ?$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad h(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad h^{-1}(y) = \ln y$$

$$g(y) = f(\ln y) \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad y \geq 0$$

Funkce náhodné veličiny

Je-li funkce $y=h(x)$ na množině hodnot veličiny X ryze monotónní, má náhodná veličina $Y=h(X)$ hustotu pravděpodobnosti

$$g(y) = f(h^{-1}(y)) \left| \frac{dh^{-1}(y)}{dy} \right|$$

kde $x=h^{-1}(y)$, je inverzní funkce k funkci $y=h(x)$.

Příklad1: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Y = e^X$ $g(y) = ?$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad h(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad h^{-1}(y) = \ln y$$

$$g(y) = f(\ln y) \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad y \geq 0$$

Náhodná veličina Y se bude řídit **logaritmicko-normálním rozdělením** $LN(\mu, \sigma^2)$.

Funkce náhodné veličiny

Příklad 2: $X_1, X_2, \dots, X_n \sim \text{Exp}(\lambda)$, $Z_n = \sum_{i=1}^n X_i$ $h_n(z) = ?$

Funkce náhodné veličiny

Příklad 2: $X_1, X_2, \dots, X_n \sim \text{Exp}(\lambda)$, $Z_n = \sum_{i=1}^n X_i$ $h_n(z) = ?$

$$n = 2: \quad H_2(z) = P(Z \leq z) = P(X_1 + X_2 \leq z)$$

Funkce náhodné veličiny

Příklad 2: $X_1, X_2, \dots, X_n \sim \text{Exp}(\lambda)$, $Z_n = \sum_{i=1}^n X_i$ $h_n(z) = ?$

$$n = 2: \quad H_2(z) = P(Z \leq z) = P(X_1 + X_2 \leq z) = \iint_{x_1 + x_2 \leq z} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

Funkce náhodné veličiny

Příklad 2: $X_1, X_2, \dots, X_n \sim \text{Exp}(\lambda)$, $Z_n = \sum_{i=1}^n X_i$ $h_n(z) = ?$

$$n = 2: \quad H_2(z) = P(Z \leq z) = P(X_1 + X_2 \leq z) = \iint_{x_1 + x_2 \leq z} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

$$H_2(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-x_1} f(x_1, x_2) dx_2 dx_1 = \int_0^z \int_0^{z-x_1} \lambda e^{-\lambda x_1} \lambda e^{-\lambda x_2} dx_2 dx_1$$

Funkce náhodné veličiny

Příklad 2: $X_1, X_2, \dots, X_n \sim \text{Exp}(\lambda)$, $Z_n = \sum_{i=1}^n X_i$ $h_n(z) = ?$

$$n = 2: \quad H_2(z) = P(Z \leq z) = P(X_1 + X_2 \leq z) = \iint_{x_1 + x_2 \leq z} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

$$H_2(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-x_1} f(x_1, x_2) dx_2 dx_1 = \int_0^z \int_0^{z-x_1} \lambda e^{-\lambda x_1} \lambda e^{-\lambda x_2} dx_2 dx_1$$

$$= \lambda^2 \int_0^z e^{-\lambda x_1} \int_0^{z-x_1} e^{-\lambda x_2} dx_2 dx_1 = \dots = 1 - e^{-\lambda z} - \lambda z e^{-\lambda z}$$

Funkce náhodné veličiny

Příklad 2: $X_1, X_2, \dots, X_n \sim \text{Exp}(\lambda)$, $Z_n = \sum_{i=1}^n X_i$ $h_n(z) = ?$

$$n = 2: \quad H_2(z) = P(Z \leq z) = P(X_1 + X_2 \leq z) = \iint_{x_1 + x_2 \leq z} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

$$H_2(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-x_1} f(x_1, x_2) dx_2 dx_1 = \int_0^z \int_0^{z-x_1} \lambda e^{-\lambda x_1} \lambda e^{-\lambda x_2} dx_2 dx_1$$

$$= \lambda^2 \int_0^z e^{-\lambda x_1} \int_0^{z-x_1} e^{-\lambda x_2} dx_2 dx_1 = \dots = 1 - e^{-\lambda z} - \lambda z e^{-\lambda z}$$

$$h_2(z) = \lambda e^{-\lambda z} - \lambda e^{-\lambda z} + \lambda^2 z e^{-\lambda z} = \lambda^2 z e^{-\lambda z}, \quad z \geq 0$$

Funkce náhodné veličiny

Příklad 2: $X_1, X_2, \dots, X_n \sim \text{Exp}(\lambda)$, $Z_n = \sum_{i=1}^n X_i$ $h_n(z) = ?$

$$n = 2: \quad H_2(z) = P(Z \leq z) = P(X_1 + X_2 \leq z) = \iint_{x_1 + x_2 \leq z} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

$$H_2(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-x_1} f(x_1, x_2) dx_2 dx_1 = \int_0^z \int_0^{z-x_1} \lambda e^{-\lambda x_1} \lambda e^{-\lambda x_2} dx_2 dx_1$$

$$= \lambda^2 \int_0^z e^{-\lambda x_1} \int_0^{z-x_1} e^{-\lambda x_2} dx_2 dx_1 = \dots = 1 - e^{-\lambda z} - \lambda z e^{-\lambda z}$$

$$h_2(z) = \lambda e^{-\lambda z} - \lambda e^{-\lambda z} + \lambda^2 z e^{-\lambda z} = \lambda^2 z e^{-\lambda z}, \quad z \geq 0$$

$n = 3: \dots\dots$

Funkce náhodné veličiny

Příklad 2: $X_1, X_2, \dots, X_n \sim \text{Exp}(\lambda)$, $Z_n = \sum_{i=1}^n X_i$ $h_n(z) = ?$

$$n = 2: \quad H_2(z) = P(Z \leq z) = P(X_1 + X_2 \leq z) = \iint_{x_1 + x_2 \leq z} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

$$H_2(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-x_1} f(x_1, x_2) dx_2 dx_1 = \int_0^z \int_0^{z-x_1} \lambda e^{-\lambda x_1} \lambda e^{-\lambda x_2} dx_2 dx_1$$

$$= \lambda^2 \int_0^z e^{-\lambda x_1} \int_0^{z-x_1} e^{-\lambda x_2} dx_2 dx_1 = \dots = 1 - e^{-\lambda z} - \lambda z e^{-\lambda z}$$

$$h_2(z) = \lambda e^{-\lambda z} - \lambda e^{-\lambda z} + \lambda^2 z e^{-\lambda z} = \lambda^2 z e^{-\lambda z}, \quad z \geq 0$$

$n = 3: \dots\dots$

$$h_n(z) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} z^{n-1} e^{-\lambda z}, \quad z \geq 0$$

Erlangovo rozdělení

$$h_n(z) = 0, \quad z < 0$$

Zákony velkých čísel

Tato část je k prostudování na: https://sms.nipax.cz/_media/teorie_pravdepodobnosti.pdf
část V Limitní věty, kapitoly 25 a 26.

Zákony velkých čísel

Tato část je k prostudování na: https://sms.nipax.cz/_media/teorie_pravdepodobnosti.pdf
část V Limitní věty, kapitoly 25 a 26.

Mějme posloupnost nekorelovaných náhodných veličin $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ s omezeným rozptylem (to znamená, že $\text{cov}(X_i, X_j) = 0$, $\text{Var}(X_j) \leq K < \infty$, $i, j = 1, 2, \dots$). Řekneme, že tato posloupnost *splňuje (slabý) zákon velkých čísel*, pokud pro libovolné $\varepsilon > 0$ platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n [X_j - E(X_j)]\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

Zákony velkých čísel

Tato část je k prostudování na: https://sms.nipax.cz/_media/teorie_pravdepodobnosti.pdf
část V Limitní věty, kapitoly 25 a 26.

Mějme posloupnost nekorelovaných náhodných veličin $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ s omezeným rozptylem (to znamená, že $\text{cov}(X_i, X_j) = 0$, $\text{Var}(X_j) \leq K < \infty$, $i, j = 1, 2, \dots$). Řekneme, že tato posloupnost *splňuje (slabý) zákon velkých čísel*, pokud pro libovolné $\varepsilon > 0$ platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n [X_j - E(X_j)]\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

Čebyševova věta: Nechť náhodná veličina X má střední hodnotu $E(X)$ a konečný rozptyl $\text{Var}(X)$. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ platí

$$P\left(|X - E(X)| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\varepsilon^2}$$

Centrální limitní věta

Tato část je k prostudování na: https://sms.nipax.cz/_media/teorie_pravdepodobnosti.pdf
část V Limitní věty, kapitoly 25 a 26.

Centrální limitní věta

Tato část je k prostudování na: https://sms.nipax.cz/_media/teorie_pravdepodobnosti.pdf
část V Limitní věty, kapitoly 25 a 26.

Mějme posloupnost nezávislých náhodných veličin $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ majících totéž rozdělení pravděpodobnosti se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2 . Označme

Platí $E(\bar{X}_n) = \mu$ a $\text{Var}(\bar{X}_n) = \frac{1}{n}\sigma^2$. Náhodná veličina

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$
$$Z_n = \frac{\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{\text{Var}(\bar{X}_n)}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma}$$

má distribuční funkci F_n , která konverguje (bodově) k distribuční funkci Φ standardního normálního rozdělení $N(0,1)$ pro $n \rightarrow \infty$:

$$Z_n \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, 1), \quad n \rightarrow \infty$$