Základy stochastiky

VII. Funkce náhodné veličiny

Prof. RNDr. Gejza Dohnal, CSc.

Funkce náhodné veličiny

Tato část je k prostudování na: https://sms.nipax.cz/_media/teorie_pravdepodobnosti.pdf kapitola 13 Funkce náhodných veličin (str. 109-117).

Předpokládejme, že funkce $y=h(x)$ je definovaná na množině hodnot veličiny X. Potom distribuční funkce $G(y)$ transformované náhodné veličiny $Y=h(X)$ je:

$$G(y) = P(Y \leq y) = P(h(X) \leq y) = \int_{h(x) \leq y} f(x) \mathrm{d}x$$

Hustotu veličiny $Y=h(X)$ potom dostaneme derivací distribuční funkce $G(y)$.

Funkce náhodné veličiny

Tato část je k prostudování na: https://sms.nipax.cz/_media/teorie_pravdepodobnosti.pdf kapitola 13 Funkce náhodných veličin (str. 109-117).

Předpokládejme, že funkce $y=h(x)$ je definovaná na množině hodnot veličiny X. Potom distribuční funkce $G(y)$ transformované náhodné veličiny $Y=h(X)$ je:

$$G(y) = P(Y \leq y) = P(h(X) \leq y) = \int_{h(x)\leq y} f(x)\mathrm{d}x$$

Hustotu veličiny $Y=h(X)$ potom dostaneme derivací distribuční funkce $G(y)$.

Je-li funkce $y=h(x)$ na množině hodnot veličiny X ryze monotónní, má náhodná veličina $Y=h(X)$ hustotu pravděpodobnosti

$$g(y) = f\left(h^{-1}(y)\right)\left|\frac{\mathrm{d}h^{-1}(y)}{\mathrm{d}y}\right|$$

kde $x=h^{-1}(y)$, je inverzní funkce k funkci $y=h(x)$.

Funkce náhodné veličiny

Je-li funkce $y=h(x)$ na množině hodnot veličiny X ryze monotónní, má náhodná veličina $Y=h(X)$ hustotu pravděpodobnosti

$$g(y) = f\left(h^{-1}(y)\right)\left|\frac{\mathrm{d}h^{-1}(y)}{\mathrm{d}y}\right|$$

kde $x=h^{-1}(y)$, je inverzní funkce k funkci $y=h(x)$.

Příklad1: $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2), \quad Y = \mathrm{e}^X \qquad g(y) = ?$

Funkce náhodné veličiny

Je-li funkce $y=h(x)$ na množině hodnot veličiny X ryze monotónní, má náhodná veličina $Y=h(X)$ hustotu pravděpodobnosti

$$g(y) = f\left(h^{-1}(y)\right)\left|\frac{\mathrm{d}h^{-1}(y)}{\mathrm{d}y}\right|$$

kde $x=h^{-1}(y)$, je inverzní funkce k funkci $y=h(x)$.

Příklad1: $X \sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2), \quad Y = \mathrm{e}^X$ $\qquad g(y) = ?$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma}} \qquad h(x) = \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow h^{-1}(y) = \ln y$$

Funkce náhodné veličiny

Je-li funkce $y = h(x)$ na množině hodnot veličiny X ryze monotónní, má náhodná veličina $Y = h(X)$ hustotu pravděpodobnosti

$$g(y) = f\left(h^{-1}(y)\right)\left|\frac{\mathrm{d}h^{-1}(y)}{\mathrm{d}y}\right|$$

kde $x = h^{-1}(y)$, je inverzní funkce k funkci $y = h(x)$.

Příklad1: $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2), \quad Y = \mathrm{e}^X \qquad g(y) = ?$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma}} \qquad h(x) = \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow h^{-1}(y) = \ln y$$

$$g(y) = f(\ln y)\cdot\frac{1}{y} = \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\frac{(\ln y-\mu)^2}{2\sigma}}, \quad y \geq 0$$

Funkce náhodné veličiny

Je-li funkce $y=h(x)$ na množině hodnot veličiny X ryze monotónní, má náhodná veličina $Y=h(X)$ hustotu pravděpodobnosti

$$g(y) = f\left(h^{-1}(y)\right)\left|\frac{\mathrm{d}h^{-1}(y)}{\mathrm{d}y}\right|$$

kde $x=h^{-1}(y)$, je inverzní funkce k funkci $y=h(x)$.

Příklad1: $X \sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2), \quad Y = \mathrm{e}^X$ $\qquad g(y) = ?$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma}} \qquad h(x) = \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow h^{-1}(y) = \ln y$$

$$g(y) = f(\ln y)\cdot\frac{1}{y} = \boxed{\frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\frac{(\ln y-\mu)^2}{2\sigma}}, \quad y \geq 0}$$

Náhodná veličina Y se bude řídit **logaritmicko-normálním rozdělením LN(μ, σ^2)** .

Funkce náhodné veličiny

Příklad 2: $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda), \quad Z_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ $\quad h_n(z) = ?$

Funkce náhodné veličiny

Příklad 2: $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda), \quad Z_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad h_n(z) = ?$

$n = 2$: $\quad H_2(z) = P(Z \leq z) = P(X_1 + X_2 \leq z)$

Funkce náhodné veličiny

Příklad 2: $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda), \quad Z_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad h_n(z) = ?$

$n = 2$: $$H_2(z) = P(Z \leq z) = P(X_1 + X_2 \leq z) = \iint_{x_1+x_2 \leq z} f(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

Funkce náhodné veličiny

Příklad 2: $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda), \quad Z_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad h_n(z) = ?$

$n = 2$: $$H_2(z) = P(Z \leq z) = P(X_1 + X_2 \leq z) = \iint_{x_1+x_2 \leq z} f(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

$$H_2(z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z-x_1} f(x_1, x_2)\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1 = \int_0^z\int_0^{z-x_1} \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x_1}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x_2}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1$$

Funkce náhodné veličiny

Příklad 2: $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda), \quad Z_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad h_n(z) = ?$

$n = 2$: $$H_2(z) = P(Z \leq z) = P(X_1 + X_2 \leq z) = \iint_{x_1+x_2 \leq z} f(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

$$H_2(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-x_1} f(x_1, x_2)\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1 = \int_0^z \int_0^{z-x_1} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x_1} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x_2}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1$$

$$= \lambda^2 \int_0^z \mathrm{e}^{-\lambda x_1} \int_0^{z-x_1} \mathrm{e}^{-\lambda x_2}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1 = \cdots = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda z} - \lambda z \mathrm{e}^{-\lambda z}$$

Funkce náhodné veličiny

Příklad 2: $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda), \quad Z_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad h_n(z) = ?$

$n = 2$: $$H_2(z) = P(Z \leq z) = P(X_1 + X_2 \leq z) = \iint_{x_1+x_2\leq z} f(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

$$H_2(z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z-x_1} f(x_1, x_2)\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1 = \int_0^z\int_0^{z-x_1} \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x_1}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x_2}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1$$

$$= \lambda^2\int_0^z \mathrm{e}^{-\lambda x_1}\int_0^{z-x_1} \mathrm{e}^{-\lambda x_2}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1 = \cdots = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda z} - \lambda z\mathrm{e}^{-\lambda z}$$

$$h_2(z) = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda z} - \lambda\mathrm{e}^{-\lambda z} + \lambda^2 z\mathrm{e}^{-\lambda z} = \lambda^2 z\mathrm{e}^{-\lambda z}, \quad z \geq 0$$

Funkce náhodné veličiny

Příklad 2: $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda), \quad Z_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad h_n(z) = ?$

$n = 2$: $$H_2(z) = P(Z \le z) = P(X_1 + X_2 \le z) = \iint_{x_1+x_2 \le z} f(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

$$H_2(z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z-x_1} f(x_1, x_2)\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1 = \int_0^z\int_0^{z-x_1} \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x_1}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x_2}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1$$

$$= \lambda^2\int_0^z \mathrm{e}^{-\lambda x_1}\int_0^{z-x_1} \mathrm{e}^{-\lambda x_2}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1 = \cdots = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda z} - \lambda z\mathrm{e}^{-\lambda z}$$

$$h_2(z) = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda z} - \lambda\mathrm{e}^{-\lambda z} + \lambda^2 z\mathrm{e}^{-\lambda z} = \lambda^2 z\mathrm{e}^{-\lambda z}, \quad z \ge 0$$

$n = 3$: $\quad \ldots\ldots$

Funkce náhodné veličiny

Příklad 2: $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda), \quad Z_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad h_n(z) = ?$

$n = 2$: $$H_2(z) = P(Z \leq z) = P(X_1 + X_2 \leq z) = \iint_{x_1+x_2 \leq z} f(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

$$H_2(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-x_1} f(x_1, x_2)\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1 = \int_0^z \int_0^{z-x_1} \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x_1} \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x_2}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1$$

$$= \lambda^2 \int_0^z \mathrm{e}^{-\lambda x_1} \int_0^{z-x_1} \mathrm{e}^{-\lambda x_2}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1 = \cdots = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda z} - \lambda z\mathrm{e}^{-\lambda z}$$

$$h_2(z) = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda z} - \lambda\mathrm{e}^{-\lambda z} + \lambda^2 z\mathrm{e}^{-\lambda z} = \lambda^2 z\mathrm{e}^{-\lambda z}, \quad z \geq 0$$

$n = 3$: $\quad \ldots\ldots$

$$h_n(z) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} z^{n-1}\mathrm{e}^{-\lambda z}, \quad z \geq 0$$

Erlangovo rozdělení

$$h_n(z) = 0, \qquad z < 0$$

Zákony velkých čísel

Tato část je k prostudování na: https://sms.nipax.cz/_media/teorie_pravdepodobnosti.pdf
část V Limitní věty, kapitoly 25 a 26.

Zákony velkých čísel

Tato část je k prostudování na: https://sms.nipax.cz/_media/teorie_pravdepodobnosti.pdf
část V Limitní věty, kapitoly 25 a 26.

Mějme posloupnost nekorelovaných náhodných veličin $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ s omezeným rozptylem (to znamená, že $\mathrm{cov}(X_i, X_j) = 0$, $\mathrm{Var}(X_j) \leqq K < \infty$, $i,j,=1,2,\ldots$). Řekneme, že tato posloupnost *splňuje (slabý) zákon velkých čísel*, pokud pro libovolné $\varepsilon > 0$ platí

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\Big|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}[X_j - E(X_j)]\Big| \geq \varepsilon\right) = 0$$

Zákony velkých čísel

Tato část je k prostudování na: https://sms.nipax.cz/_media/teorie_pravdepodobnosti.pdf
část V Limitní věty, kapitoly 25 a 26.

Mějme posloupnost nekorelovaných náhodných veličin $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ s omezeným rozptylem (to znamená, že $\mathrm{cov}(X_i, X_j) = 0$, $\mathrm{Var}(X_j) \leqq K < \infty$, $i,j = 1,2,\ldots$). Řekneme, že tato posloupnost *splňuje (slabý) zákon velkých čísel*, pokud pro libovolné $\varepsilon > 0$ platí

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}[X_j - E(X_j)]\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

Čebyševova věta: Nechť náhodná veličina X má střední hodnotu E(X) a konečný rozptyl Var(X). Pak pro každé $\varepsilon > 0$ platí

$$P\left(\left|X - E(X)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}$$

Centrální limitní věta

Tato část je k prostudování na: https://sms.nipax.cz/_media/teorie_pravdepodobnosti.pdf
část V Limitní věty, kapitoly 25 a 26.

Centrální limitní věta

Tato část je k prostudování na: https://sms.nipax.cz/_media/teorie_pravdepodobnosti.pdf část V Limitní věty, kapitoly 25 a 26.

Mějme posloupnost nezávislých náhodných veličin $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ majících totéž rozdělení pravděpodobnosti se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2. Označme

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Platí $E(\bar{X}_n) = \mu$ a $\mathrm{Var}(\bar{X}_n) = \frac{1}{n}\sigma^2$. Náhodná veličina

$$Z_n = \frac{\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\bar{X}_n)}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma}$$

má distribuční funkci F_n, která konverguje (bodově) k distribuční funkci Φ standardního normálního rozdělení $\mathrm{N}(0,1)$ pro $n \to \infty$:

$$Z_n \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1), \quad n \to \infty$$