

Základy pravděpodobnosti a matematické statistiky

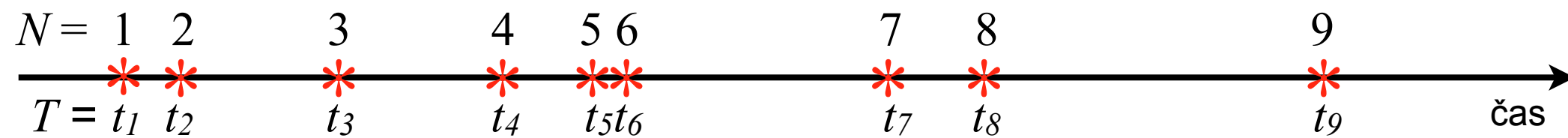
4. Model náhodných událostí v čase



4. Model náhodných událostí v čase

Pozorujeme události, které nastávají nezávisle na sobě v čase.

počet událostí do času t : $N(t)$ ← diskrétní náhodná veličina



čas výskytu i -té události: T_i ← spojitá náhodná veličina



Pozorujeme události, které nastávají nezávisle na sobě v čase.

počet událostí do času t : $N(t)$ ← **diskrétní náhodná veličina**



doby mezi událostmi: $\tau_i = t_i - t_{i-1}$ ← **spojitá náhodná veličina**

$$\lambda(t) = \frac{N(t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t} \quad \text{střední počet událostí za jednotku času}$$

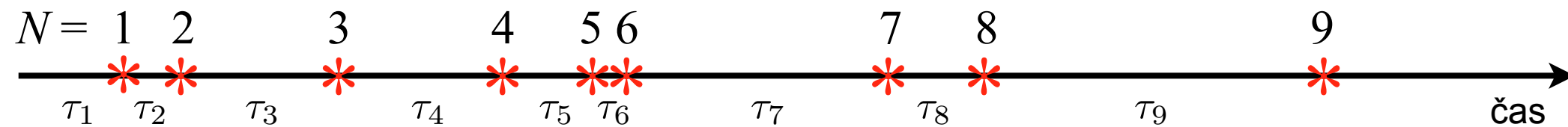
$$\bar{T}_i = \frac{t_i}{i} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \bar{T} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{N(t)} = \frac{1}{\lambda} \quad \text{střední doba mezi událostmi}$$

λ je intenzita poruch, $1/\lambda$ je střední doba mezi poruchami



Pozorujeme události, které nastávají nezávisle na sobě v čase.

počet událostí do času t : $N(t)$

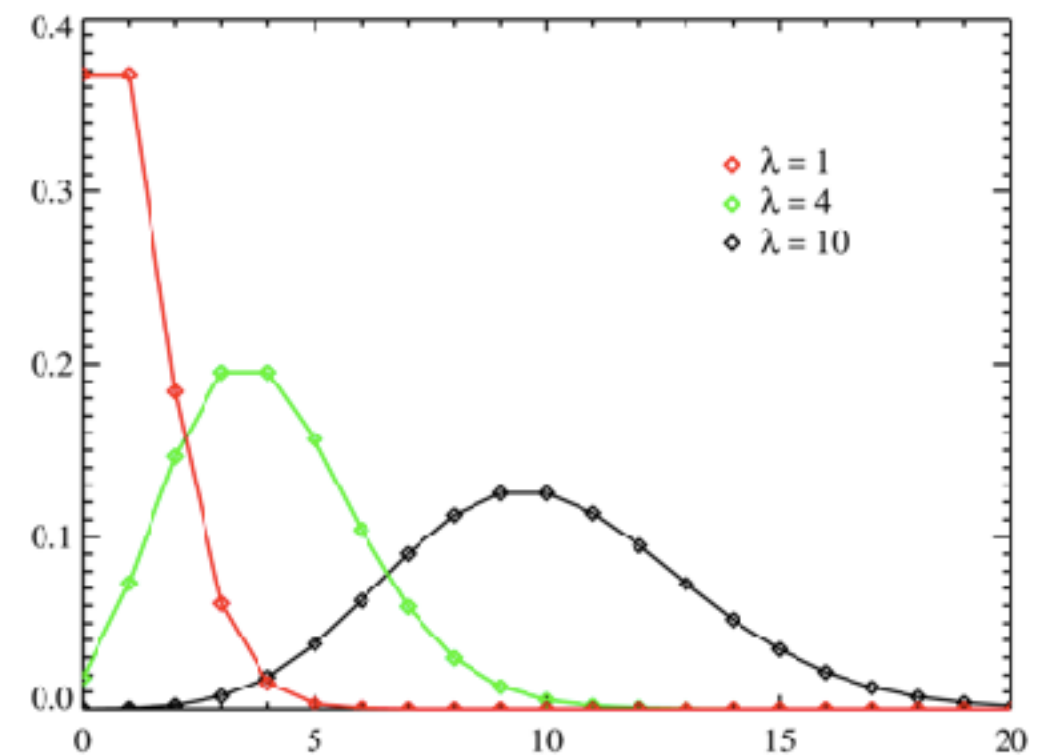
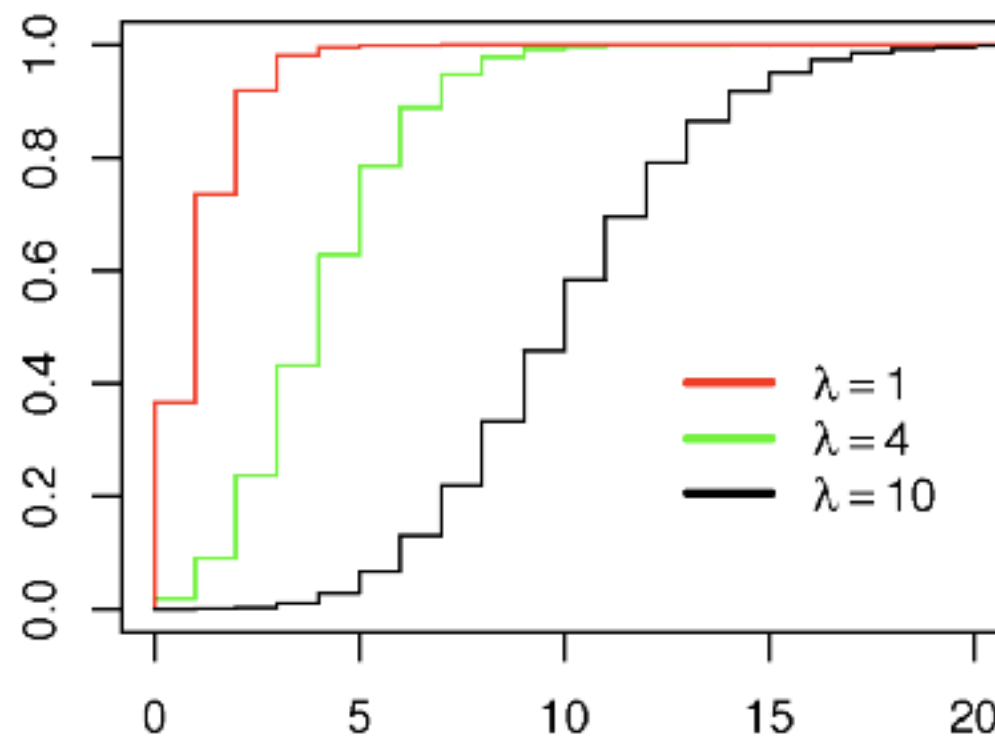


Jaká je pravděpodobnost, že za jednotku času nastane k událostí? $P(N = k) = ?$

$$P(N = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

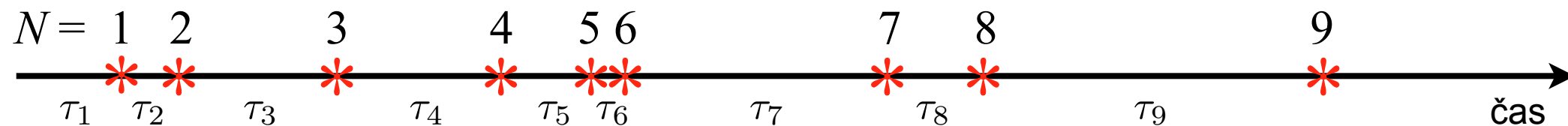
$$E(N) = Var(N) = \lambda.$$

Poissonovo rozdělení $Poiss(\lambda)$



Pozorujeme události, které nastávají nezávisle na sobě v čase.

počet událostí do času t : $N(t)$

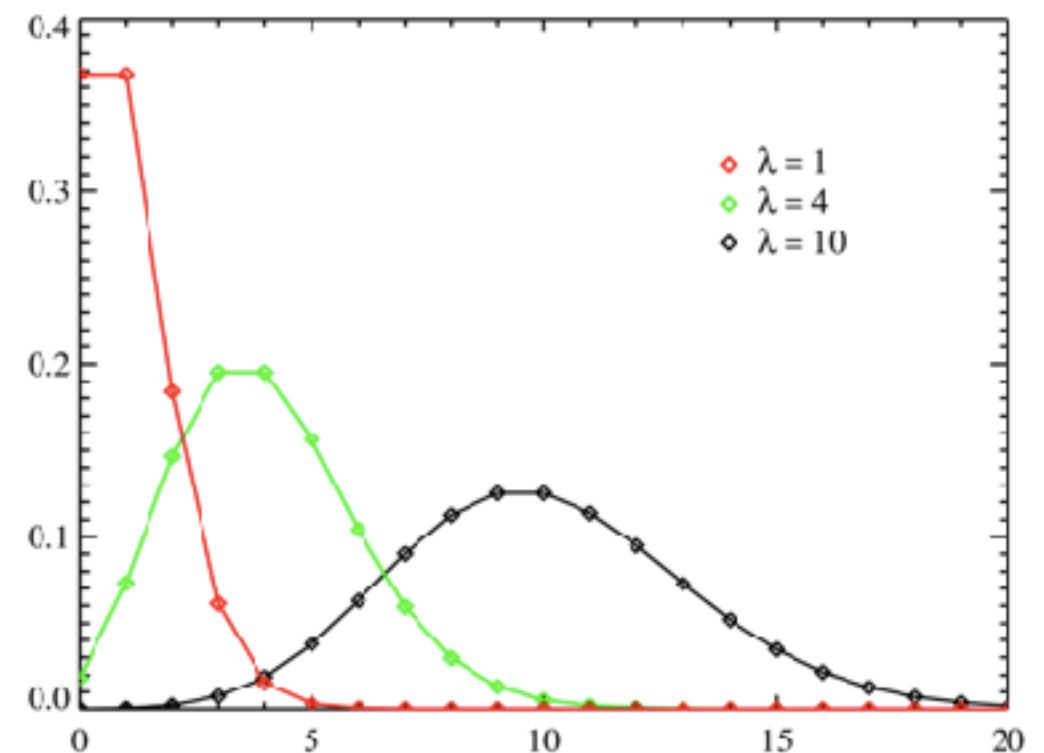


Jaká je pravděpodobnost, že za jednotku času nastane k událostí? $P(N = k) = ?$

$$P(N = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$E(N) = Var(N) = \lambda.$$

Poissonovo rozdělení $Poiss(\lambda)$



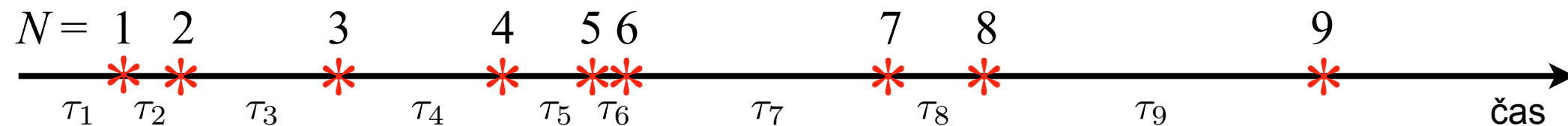
Jaká je pravděpodobnost, že za dobu t nastane k událostí? $P(N(t) = k) = ?$

$$P(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad t > 0, \quad E(N(t)) = Var(N(t)) = \lambda t.$$



Pozorujeme události, které nastávají nezávisle na sobě v čase.

počet událostí do času t : $N(t)$



doby mezi událostmi: $\tau_i = t_i - t_{i-1}$

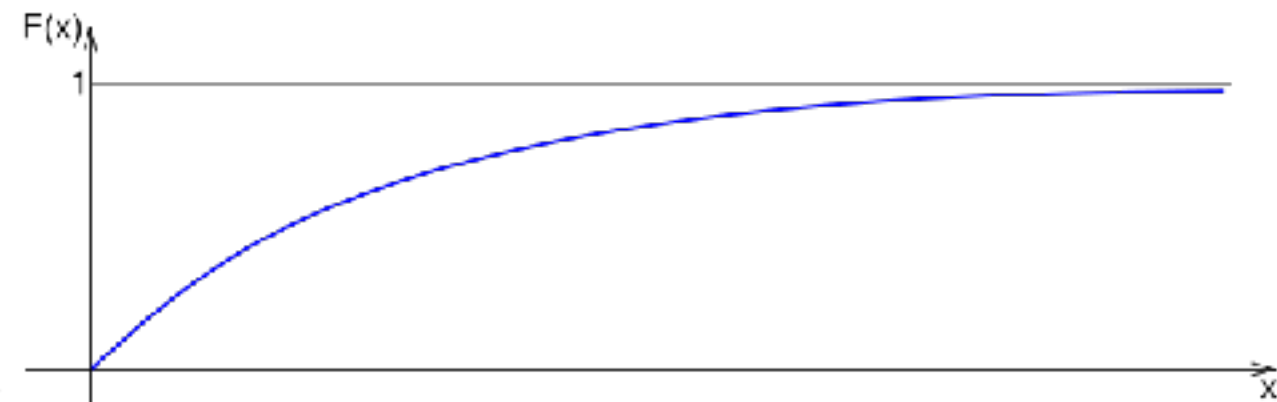
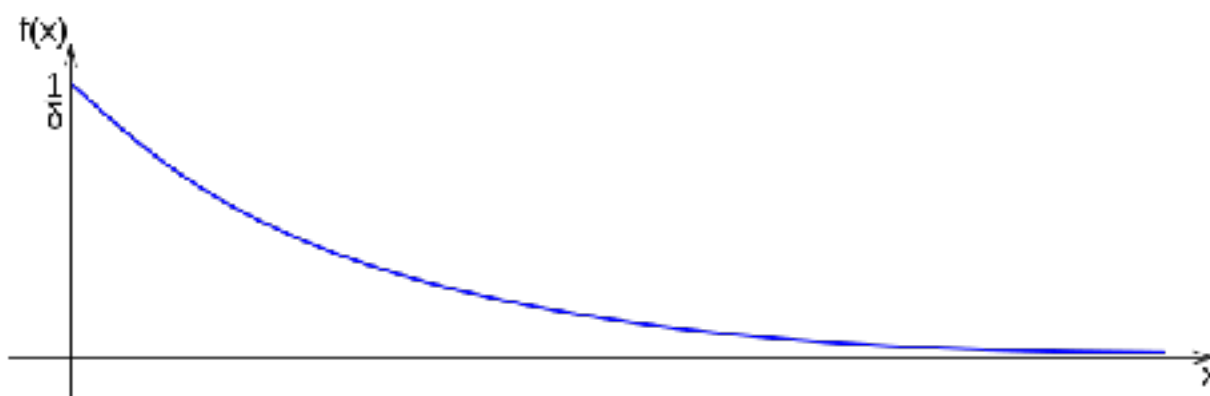
Jaká je pravděpodobnost, že doba mezi událostmi nepřekročí hodnotu t ? $P(\tau \leq t) = ?$

$$P(\tau \leq t) = F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ 1 - e^{-\frac{t}{\delta}} & t \geq 0. \end{cases}$$

$$E(\tau) = \delta, \quad Var(\tau) = \delta^2.$$

Exponenciální rozdělení $\text{Exp}(\delta)$

$$F(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\delta}} \Rightarrow f(t) = \frac{dF}{dt} = \frac{1}{\delta} e^{-\frac{t}{\delta}}, \quad t \geq 0$$



Příklad: Životnost ventilátoru dieselového motoru můžeme popsat jako dobu do jeho poruchy (neopravuje se). Předpokládejme, že tato doba se řídí exponenciálním rozdělením se střední hodnotou $\theta = 28\,700$ hodin.

Úloha 1: S jakou pravděpodobností se ventilátor porouchá během prvních 100 hodin?

Úloha 2: Jaká je pravděpodobnost, že ventilátor vydrží bez poruchy záruční dobu 8000 hodin?

Úloha 3: Jaká je intenzita poruchy?

Úloha 4: Jaká je „typická“ délka života ventilátoru?

Úloha 5: Jaká je střední doba života ventilátoru?

Úloha 6: Do jaké doby se porouchá v průměru 90 % všech ventilátorů?



Model exponenciálního rozdělení

Exponenciální rozdělení je rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny, která popisuje dobu mezi nezávislými, náhodně se vyskytujícími událostmi v čase.

Přitom střední doba mezi těmito událostmi je rovna δ a střední počet těchto událostí za jednotku času je λ .

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{\delta} e^{-\frac{t}{\delta}}, & t \geq 0 \end{cases} \quad F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - e^{-\frac{t}{\delta}}, & t \geq 0 \end{cases} \quad \frac{1}{\delta} = \lambda$$

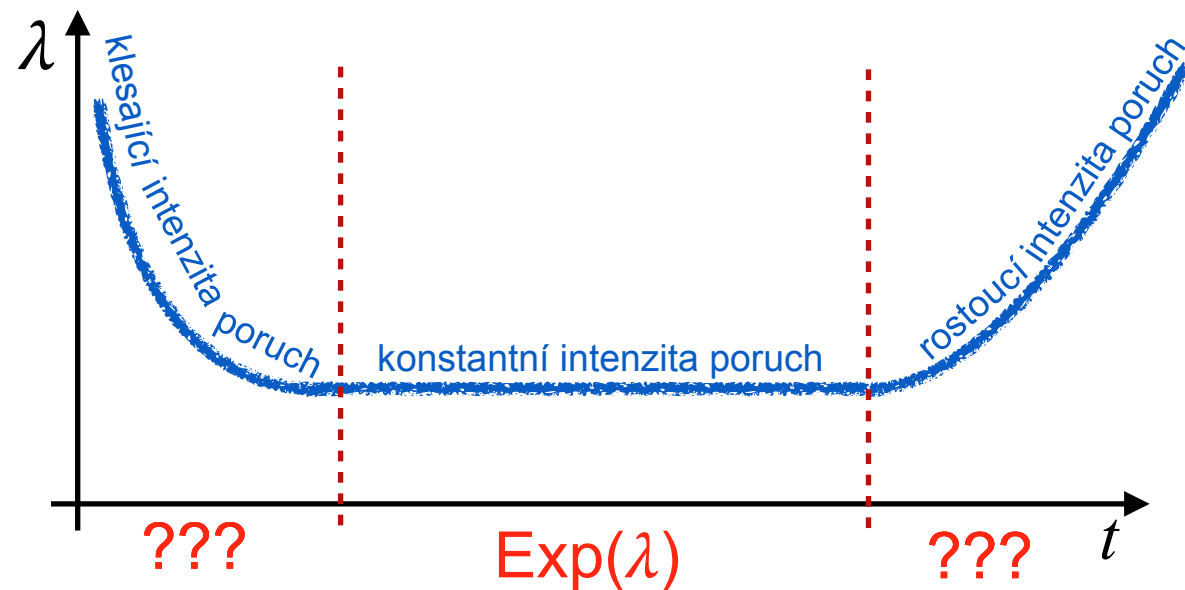
$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \end{cases} \quad F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \end{cases}$$

Exponenciální rozdělení nemá paměť!

$$\begin{aligned} P(\tau \leq t + s | \tau \geq s) &= \frac{P((\tau \leq t + s) \& (\tau \geq s))}{P(\tau \geq s)} = \frac{P(\tau \in \langle s, t + s \rangle)}{P(\tau \geq s)} \\ &= \frac{F(t + s) - F(s)}{1 - F(s)} = \frac{1 - e^{-\frac{t+s}{\delta}} - 1 + e^{-\frac{s}{\delta}}}{e^{-\frac{s}{\delta}}} = \frac{e^{-\frac{s}{\delta}} - e^{-\frac{t}{\delta}} e^{-\frac{s}{\delta}}}{e^{-\frac{s}{\delta}}} \\ &= 1 - e^{-\frac{t}{\delta}} = F(t) = P(\tau \leq t) \end{aligned}$$



Modelování doby života (doby do poruchy)



$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}, \quad t \in R$$

Intenzita poruchy

Pravděpodobnost, že se zařízení porouchá v čase $t+\varepsilon$, když víme, že se do doby ε neporouchalo (pro hodně malá ε) je rovna přibližně $\varepsilon\lambda(t)$.

Exponenciální rozdělení:
$$\lambda(t) = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{1 - (1 - e^{-\lambda t})} = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda, \quad t \geq 0.$$



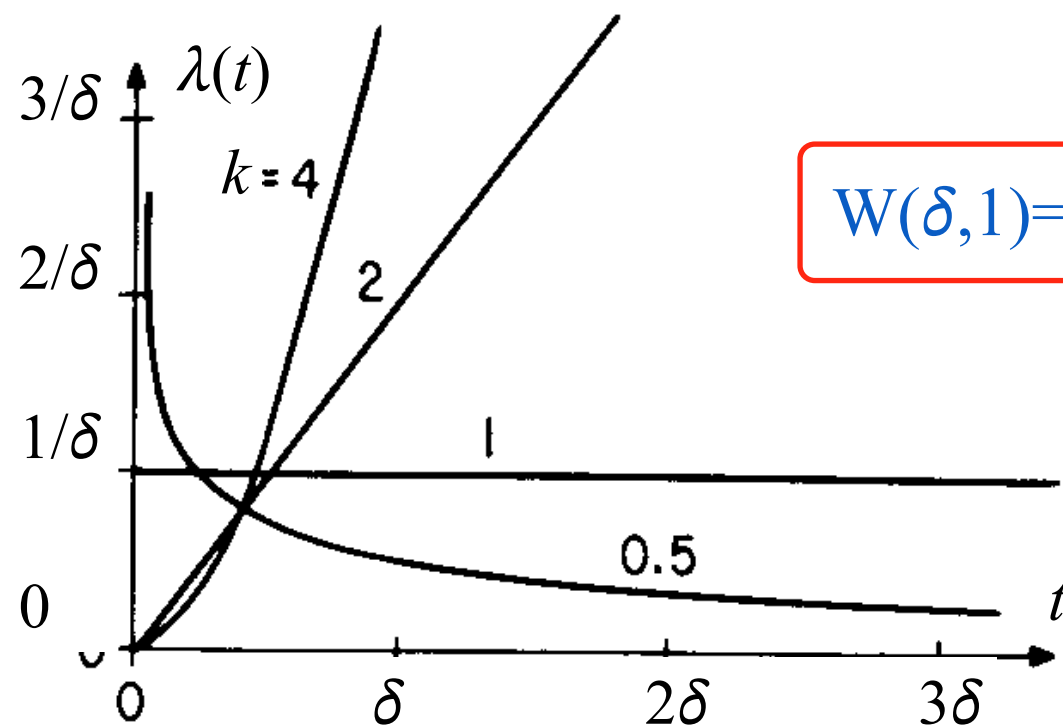
Weibullovo rozdělení $W(\delta, k)$

$$P(\tau \leq t) = F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ 1 - e^{-\left(\frac{t}{\delta}\right)^k} & t \geq 0. \end{cases}$$

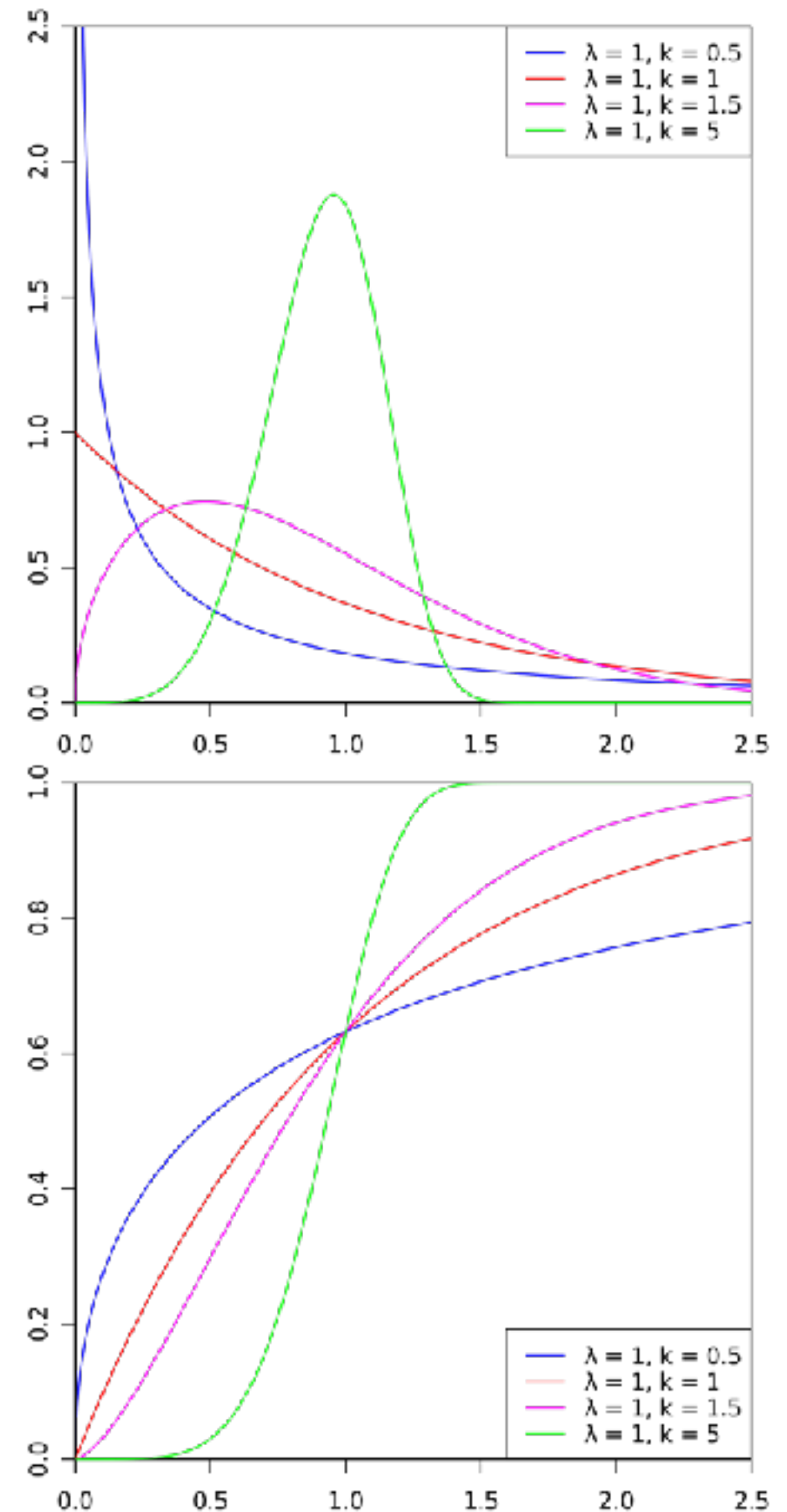
$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ \left(\frac{t}{\delta}\right)^{k-1} \frac{k}{\delta} e^{-\left(\frac{t}{\delta}\right)^k} & t \geq 0. \end{cases}$$

$$E(\tau) = \delta \Gamma\left(\frac{1}{k} + 1\right),$$

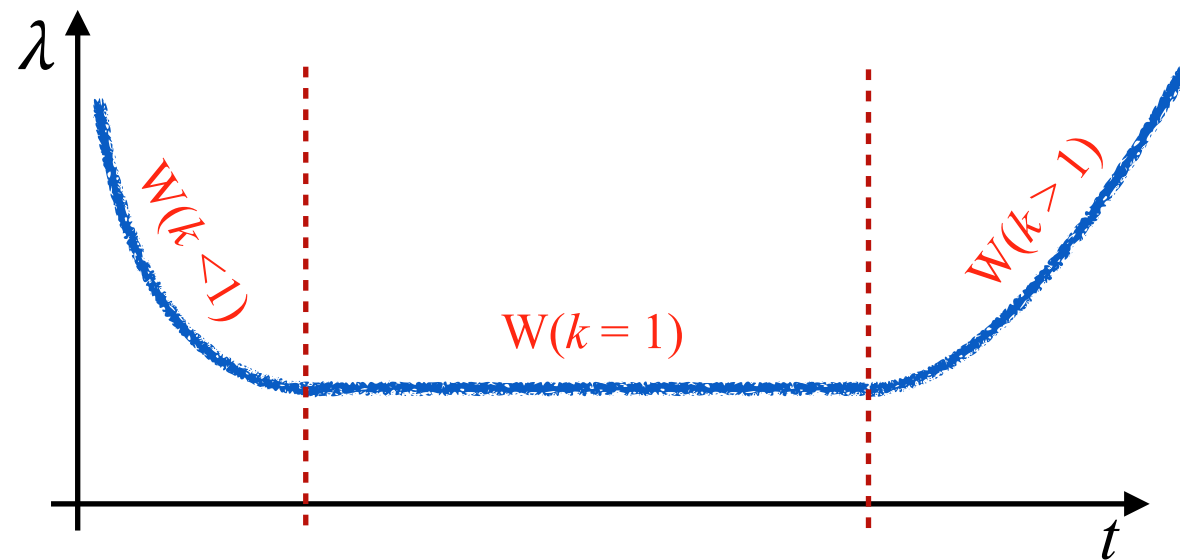
$$Var(\tau) = \delta^2 \left\{ \Gamma\left(\frac{2}{k} + 1\right) - \left[\Gamma\left(\frac{2}{k} + 1\right) \right]^2 \right\}$$



$$W(\delta, 1) = \text{Exp}(\delta)$$



Modelování doby života (doby do poruchy)



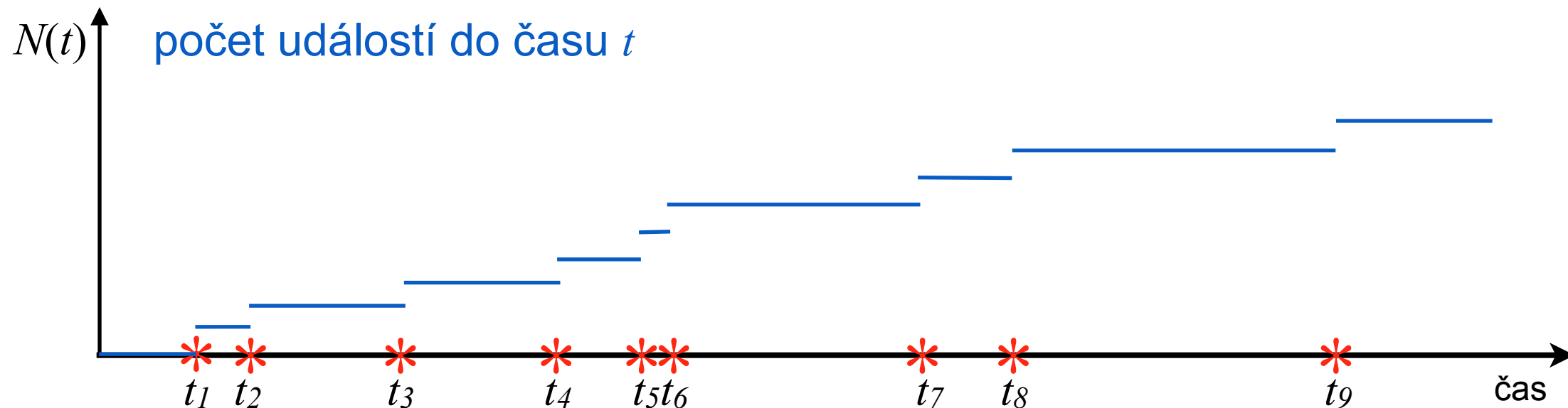
$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}, \quad t \in R$$

Intenzita poruchy

Pravděpodobnost, že se zařízení porouchá v čase $t + \varepsilon$, když víme, že se do doby ε neporouchalo (pro hodně malá ε) je rovna přibližně $\varepsilon \lambda(t)$.



Poissonův proces - model vzniku náhodných událostí v čase



Poissonův proces $\{N(t); t \geq 0\}$ je funkce dvou proměnných

$N : (\Omega, \langle 0, \infty \rangle) \rightarrow \mathbb{N}$ taková, že

- 1) $N(0) = 0$,
- 2) $N(t)$ má nezávislé přírůstky, to znamená, že pro každé $0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_n$ a všechna $i = 1, 2, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$ jsou náhodné veličiny $N(t_i) - N(t_{i-1})$ stochasticky nezávislé, $N(t_1) - N(t_0)$
- 3) přírůstky $N(t+h) - N(t)$ mají Poissonovo rozdělení s parametrem λh .

$$N(t) = \sum_{i=1}^{\infty} I_{\{t_i \leq t\}}$$

$$t_i = \inf\{t \geq 0 : N(t) = i\}, i = 1, 2, \dots$$



Úloha: Jaké rozdělení pravděpodobnosti má doba mezi k událostmi?

$$X_1, X_2, \dots, X_n \sim \text{Exp}(\lambda), \quad Z_n = \sum_{i=1}^n X_i \quad h_n(z) = ?$$

- a) Doby mezi dvěma událostmi mají exponenciální rozdělení s parametrem λ .
- b) Doba mezi třemi událostmi je součtem dvou dob s exponenciálním rozdělením, tedy pro $k = 2$:

$$\begin{aligned} H_2(z) &= P(Z \leq z) = P(X_1 + X_2 \leq z) = \iint_{x_1 + x_2 \leq z} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-x_1} f(x_1, x_2) dx_2 dx_1 = \int_0^z \int_0^{z-x_1} \lambda e^{-\lambda x_1} \lambda e^{-\lambda x_2} dx_2 dx_1 \\ &= \lambda^2 \int_0^z e^{-\lambda x_1} \int_0^{z-x_1} e^{-\lambda x_2} dx_2 dx_1 = \dots = 1 - e^{-\lambda z} - \lambda z e^{-\lambda z} \end{aligned}$$

$$h_2(z) = \lambda e^{-\lambda z} - \lambda e^{-\lambda z} + \lambda^2 z e^{-\lambda z} = \lambda^2 z e^{-\lambda z}, \quad z \geq 0 \quad h_2(z) = 0, \quad z < 0.$$

c) Pro $k = 3$:

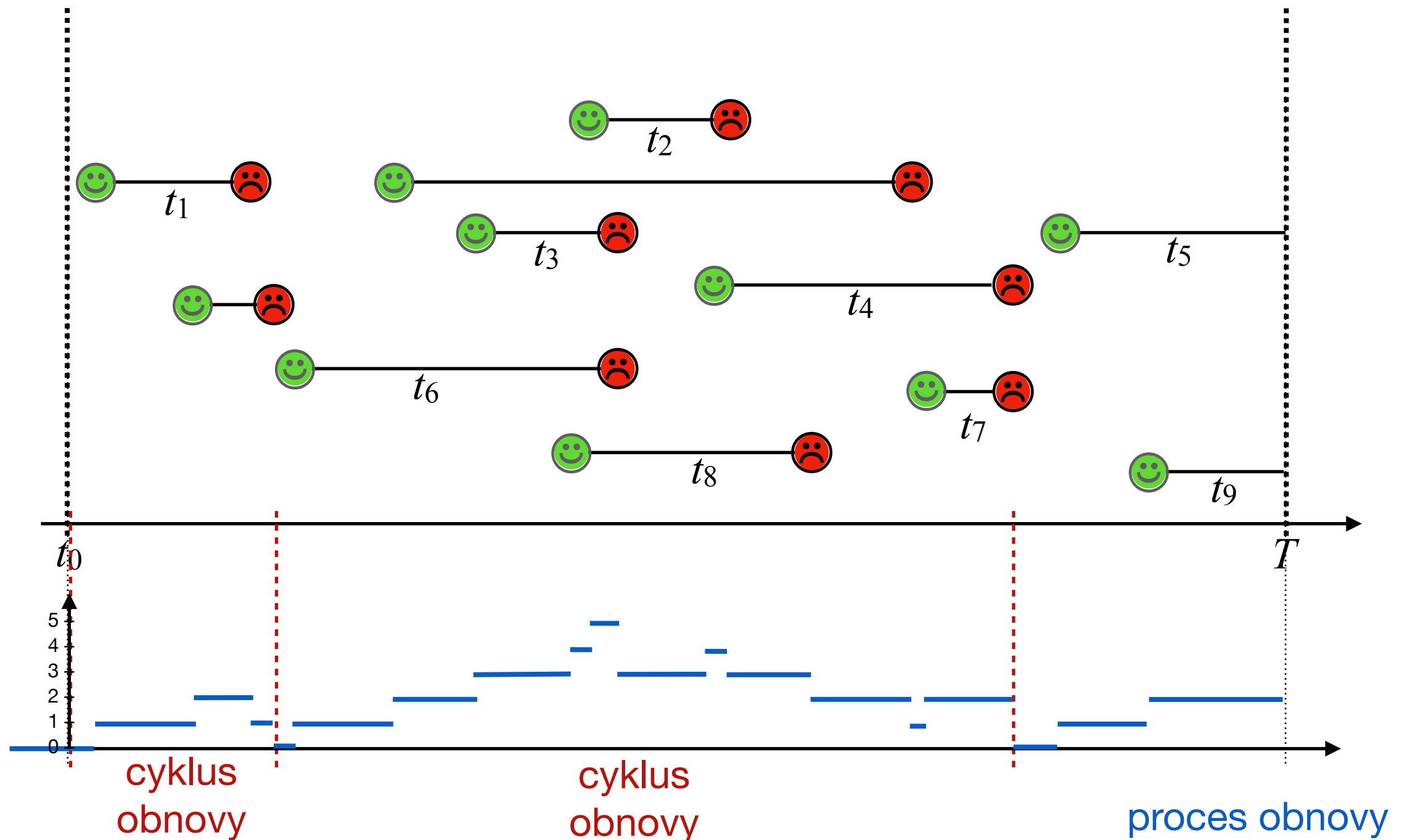
d) Postup lze zobecnit pro k :

$$\begin{aligned} h_k(z) &= \frac{\lambda^k}{(k-1)!} z^{k-1} e^{-\lambda z}, \quad z \geq 0 \\ h_k(z) &= 0, \quad z < 0. \end{aligned}$$

Erlangovo rozdělení pravděpodobnosti



Modely hromadné obsluhy (výroby, zpracování)

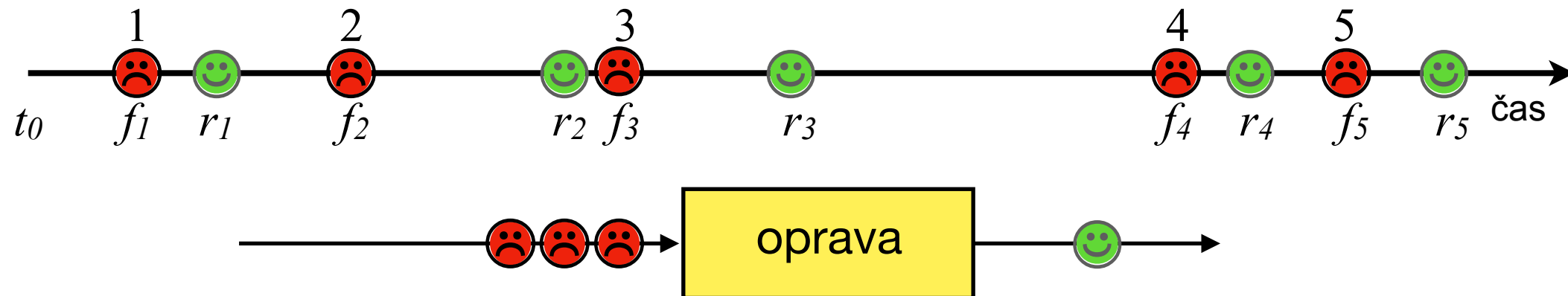


Markovská vlastnost:

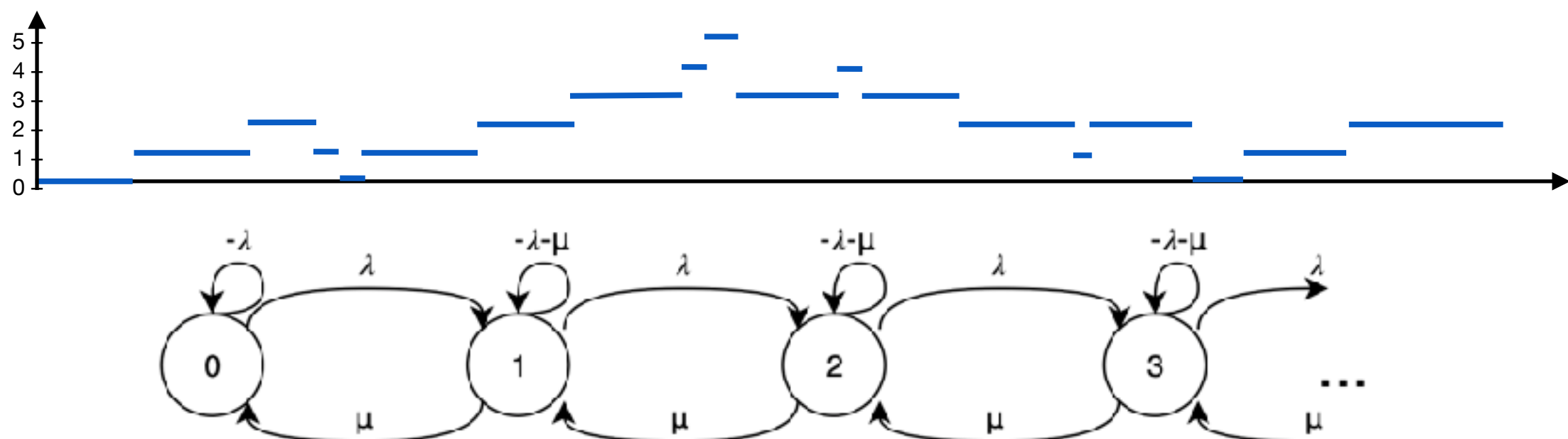
$$P(X(t) = n \mid X(t-1) = m, X(t-2) = m_2, \dots, X(0) = m_0) = P(X(t) = n \mid X(t-1) = m)$$



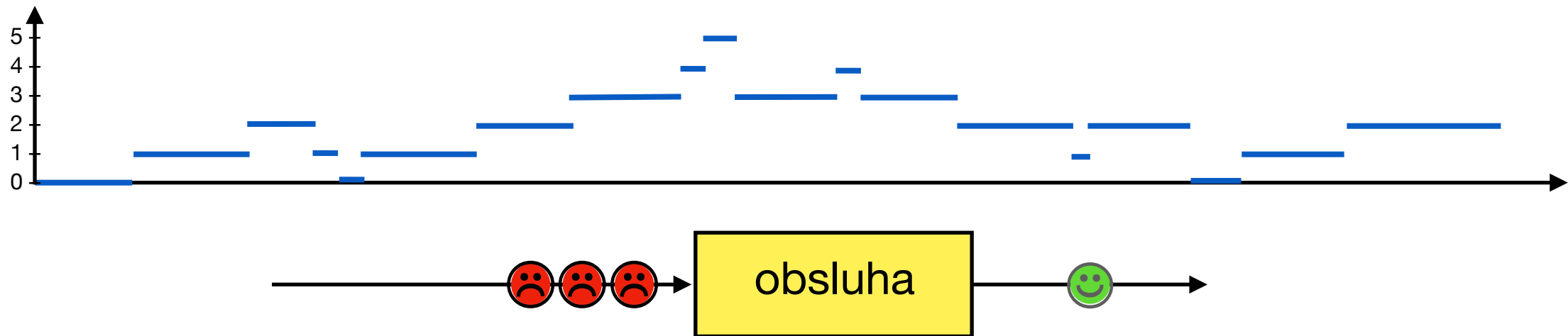
Modely hromadné obsluhy (výroby, zpracování)



- zakázky přicházejí v náhodném proudu (Poissonův proces) s intenzitou λ
- řadí se do fronty podle nějakého frontového režimu (FIFO, LIFO, Random)
- postupně jsou zpracovávány v obslužné stanici a po zpracování opouštějí systém
- doba zpracování má exponenciální rozdělení s intenzitou μ
- počet zakázek v systému má Markovskou vlastnost



Modely hromadné obsluhy (výroby, zpracování)



- zakázky přicházejí v náhodném proudu (Poissonův proces) s intenzitou λ
- řadí se do fronty podle nějakého frontového režimu (FIFO, LIFO, Random)
- postupně jsou zpracovávány v obslužné stanici a po zpracování opouštějí systém
- doba zpracování má exponenciální rozdělení s intenzitou μ
- počet zakázek v systému má Markovskou vlastnost

$$P(N = n) = p_n = \frac{\mu - \lambda}{\mu} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n = (1 - \rho) \rho^n \quad \frac{\lambda}{\mu} = \rho \quad \text{intenzita obsluhy}$$

$$E(N) = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{\rho}{1 - \rho} \Rightarrow \rho < 1 \quad \text{- střední počet požadavků v systému}$$

$$E(N_Q) = \sum_{n=0}^{\infty} (n - 1) p_n = \frac{\rho^2}{1 - \rho} \quad \text{- střední počet požadavků ve frontě}$$

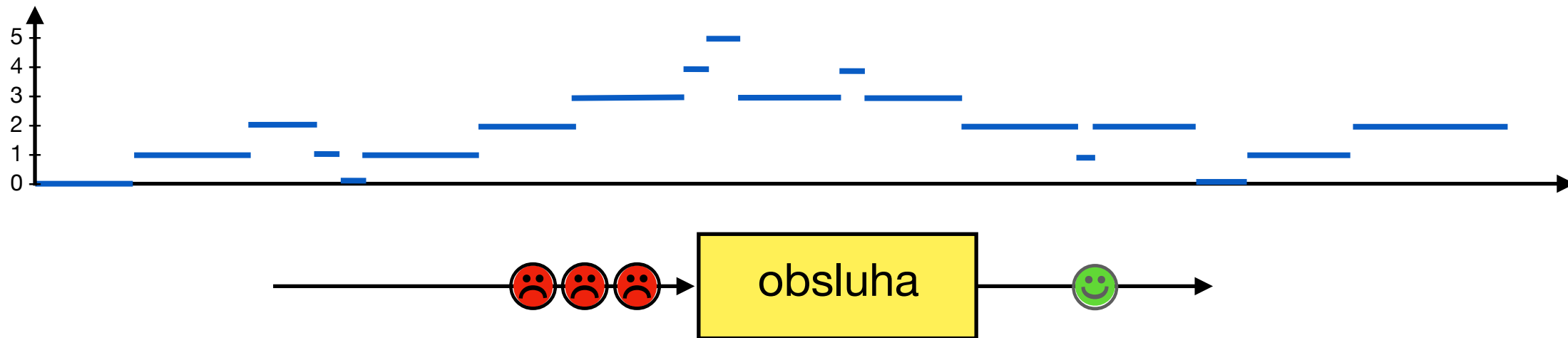
$$E(N_S) = E(N) - E(N_Q) = \rho \quad \text{- střední počet požadavků v obsluze}$$

$$P(N_Q > 0) = \rho, \quad P(N_Q = 0) = 1 - \rho \quad \text{- pravděpodobnost čekání}$$



$$P(N = n) = p_n = \frac{\mu - \lambda}{\mu} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n$$

Modely hromadné obsluhy (výroby, zpracování)



- zakázky přicházejí v náhodném proudu (Poissonův proces) s intenzitou λ
- řadí se do fronty podle nějakého frontového režimu (FIFO, LIFO, Random)
- postupně jsou zpracovávány v obslužné stanici a po zpracování opouštějí systém
- doba zpracování má exponenciální rozdělení s intenzitou μ
- počet zakázek v systému má Markovskou vlastnost

$$P(N = n) = p_n = \frac{\mu - \lambda}{\mu} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n$$

$$\frac{\lambda}{\mu} = \rho < 1$$

$$E(W) = \frac{E(N)}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

$$E(W_Q) = \frac{E(N_Q)}{\lambda} = \frac{\rho}{\mu - \lambda}$$

$$E(W_S) = E(W) - E(W_Q) = \frac{1}{\mu}$$

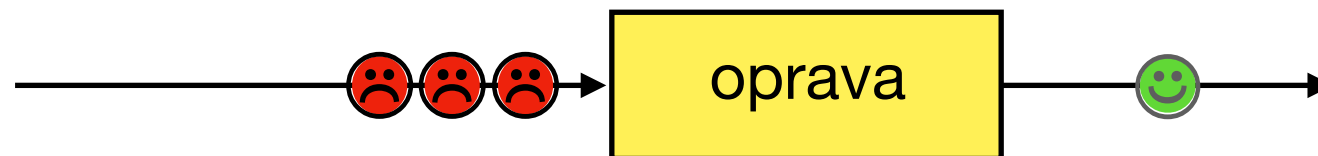
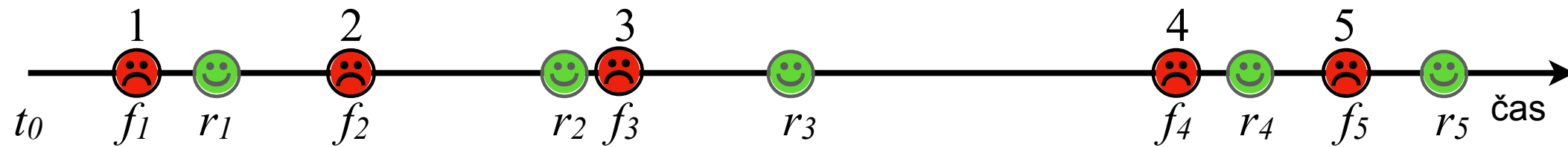
- střední doba strávená v systému

- střední doba čekání ve frontě

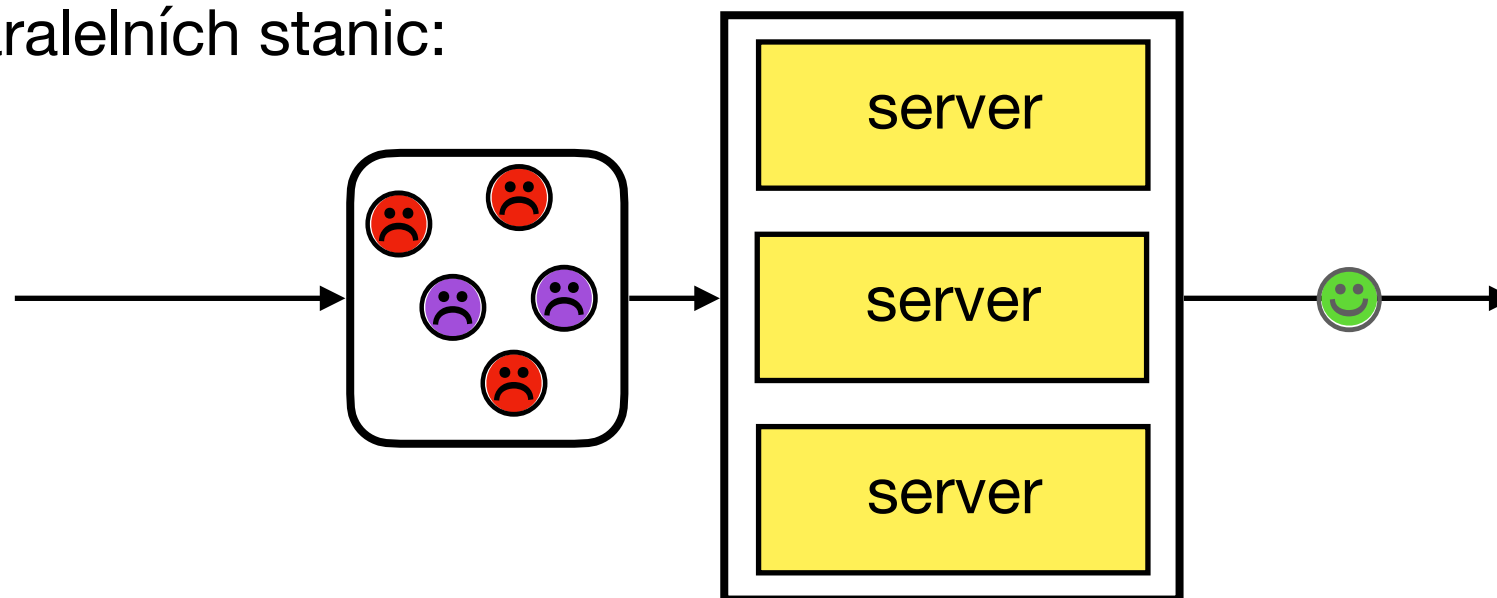
- střední doba strávená v obsluze



Modely hromadné obsluhy (výroby, zpracování)



k paralelních stanic:



Tandemová síť (montážní linka)



