

# Pravděpodobnost a matematická statistika

prof. RNDr. Gejza Dohnal, CSc.

[dohnal@nipax.cz](mailto:dohnal@nipax.cz)



## IV. Normální rozdělení

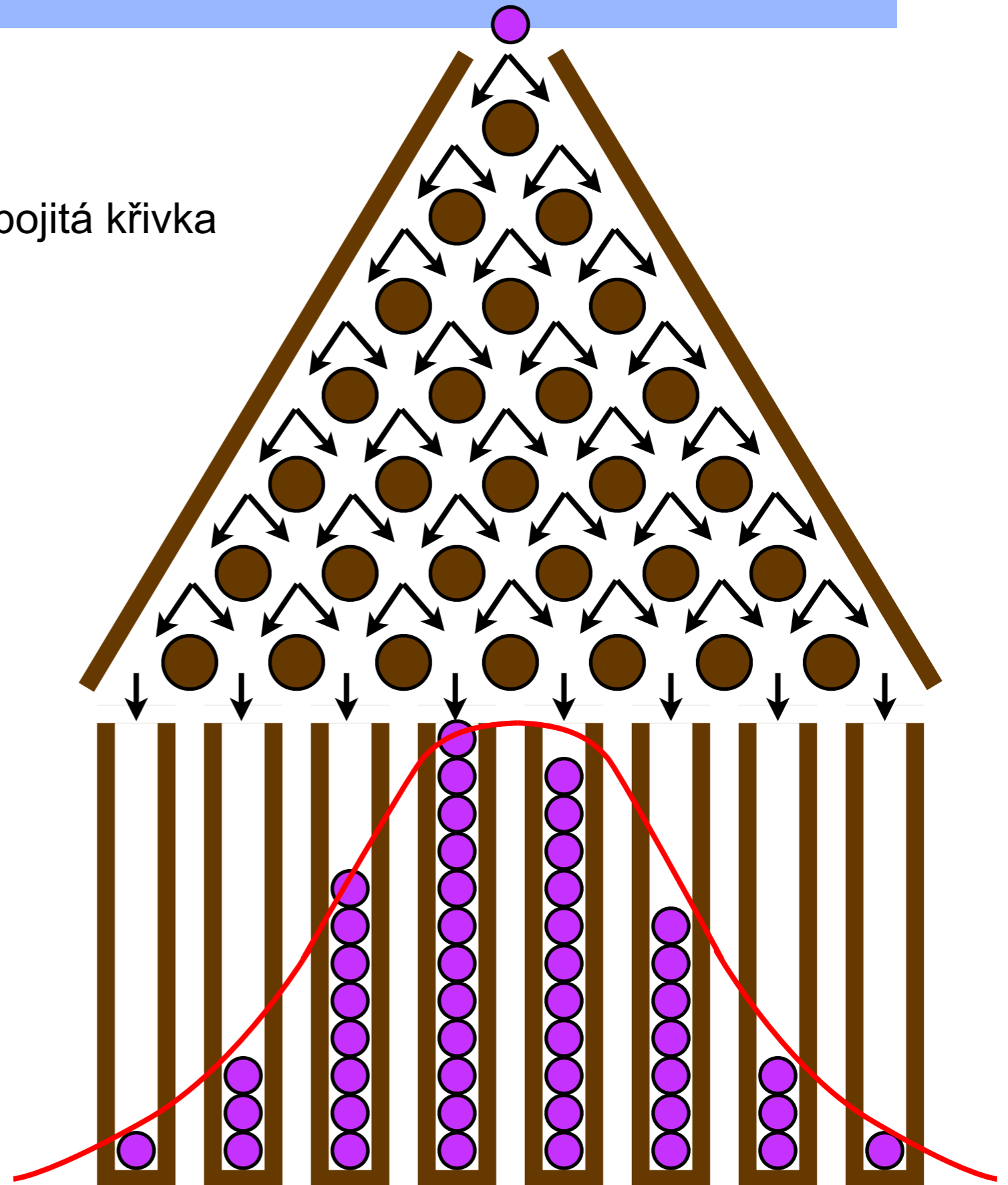
<https://sms.nipax.cz/pas>

# Od hazardu ke hvězdám ...

1733 : Abraham de Moivre

pokusy s mincemi → spojitá křivka

Galtonova deska



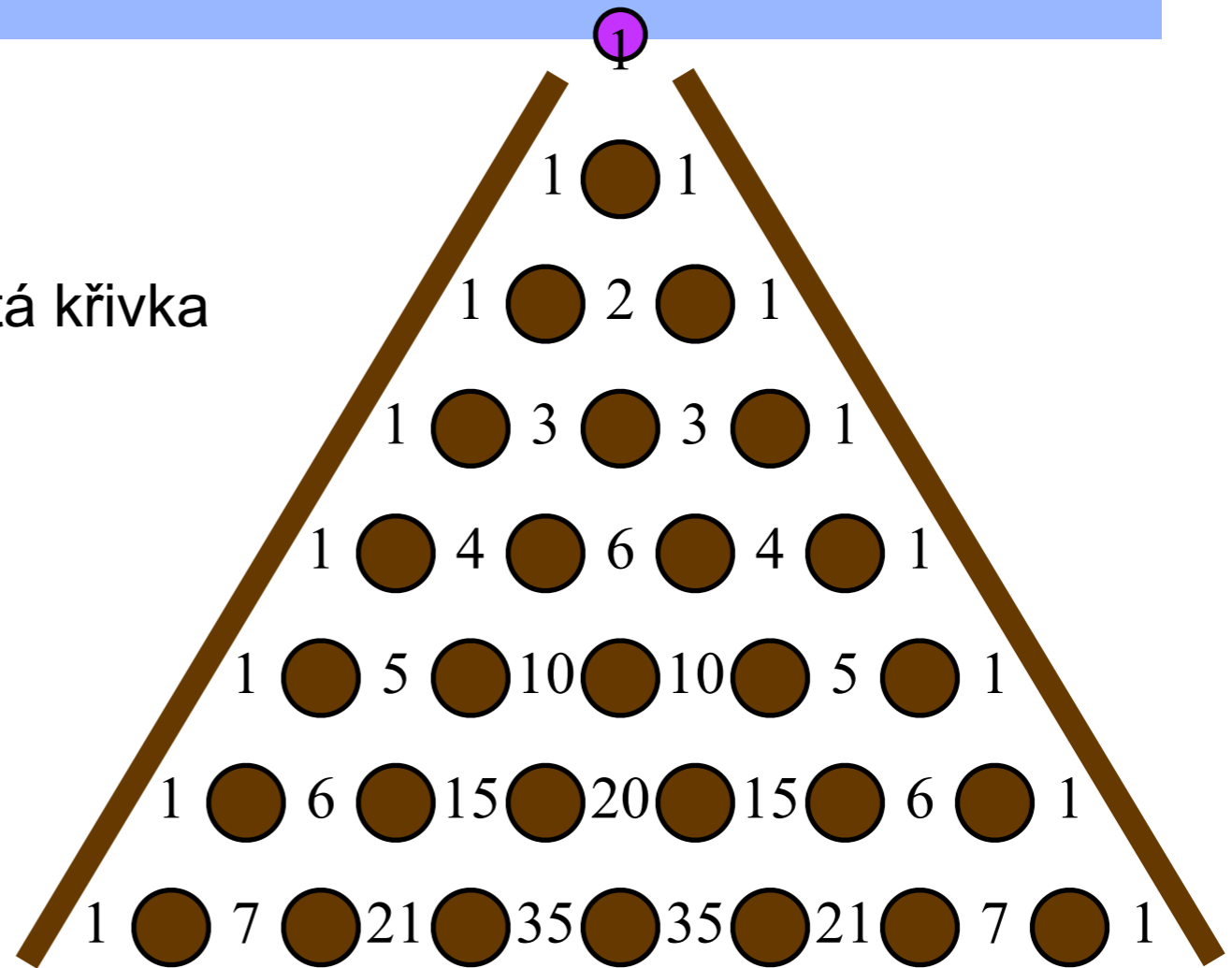
# Od hazardu ke hvězdám ...

1733 : Abraham de Moivre

pokusy s mincemi → spojitá křivka

Galtonova deska

Pascalův trojúhelník

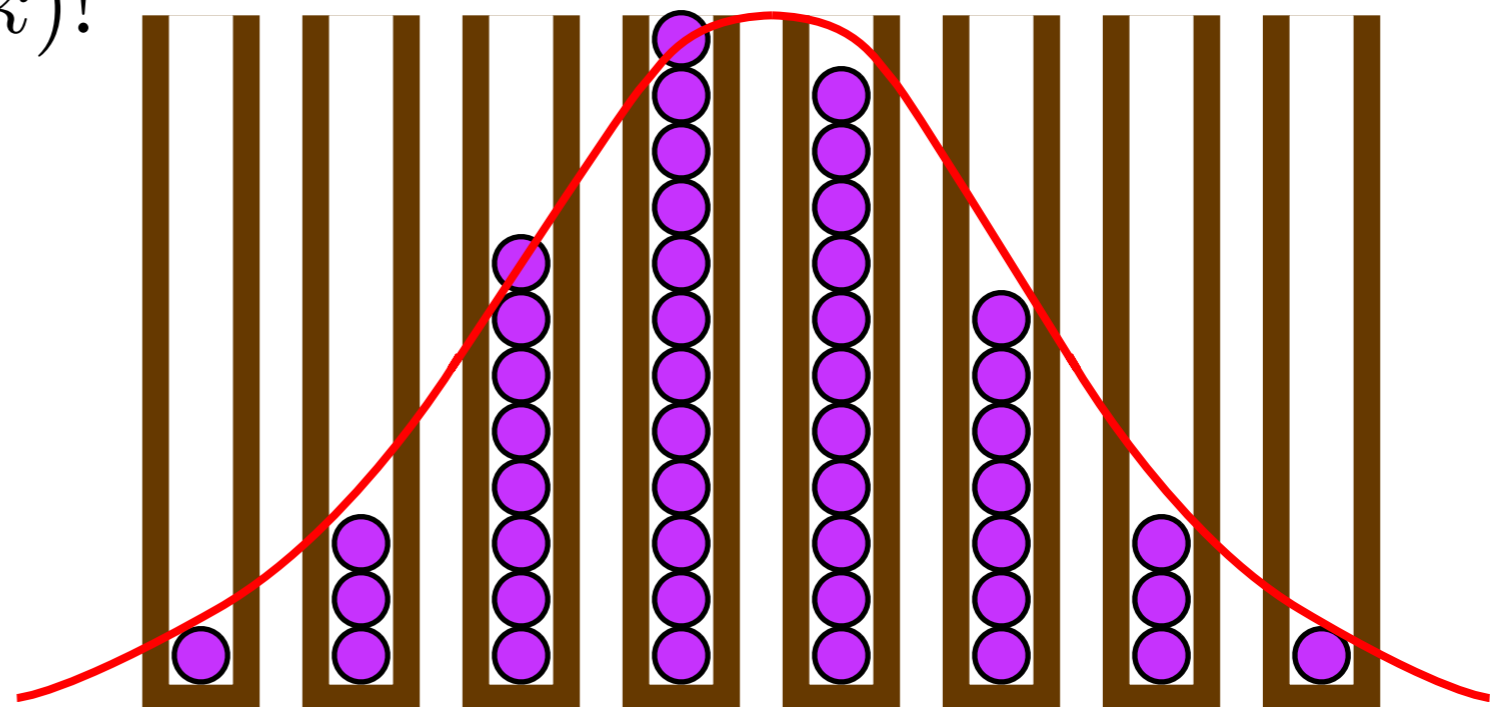


$$n_k = \binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$$

Moivre navrhl rovnici:

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$y = Ke^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}}$$



# Rozdělení chyb měření

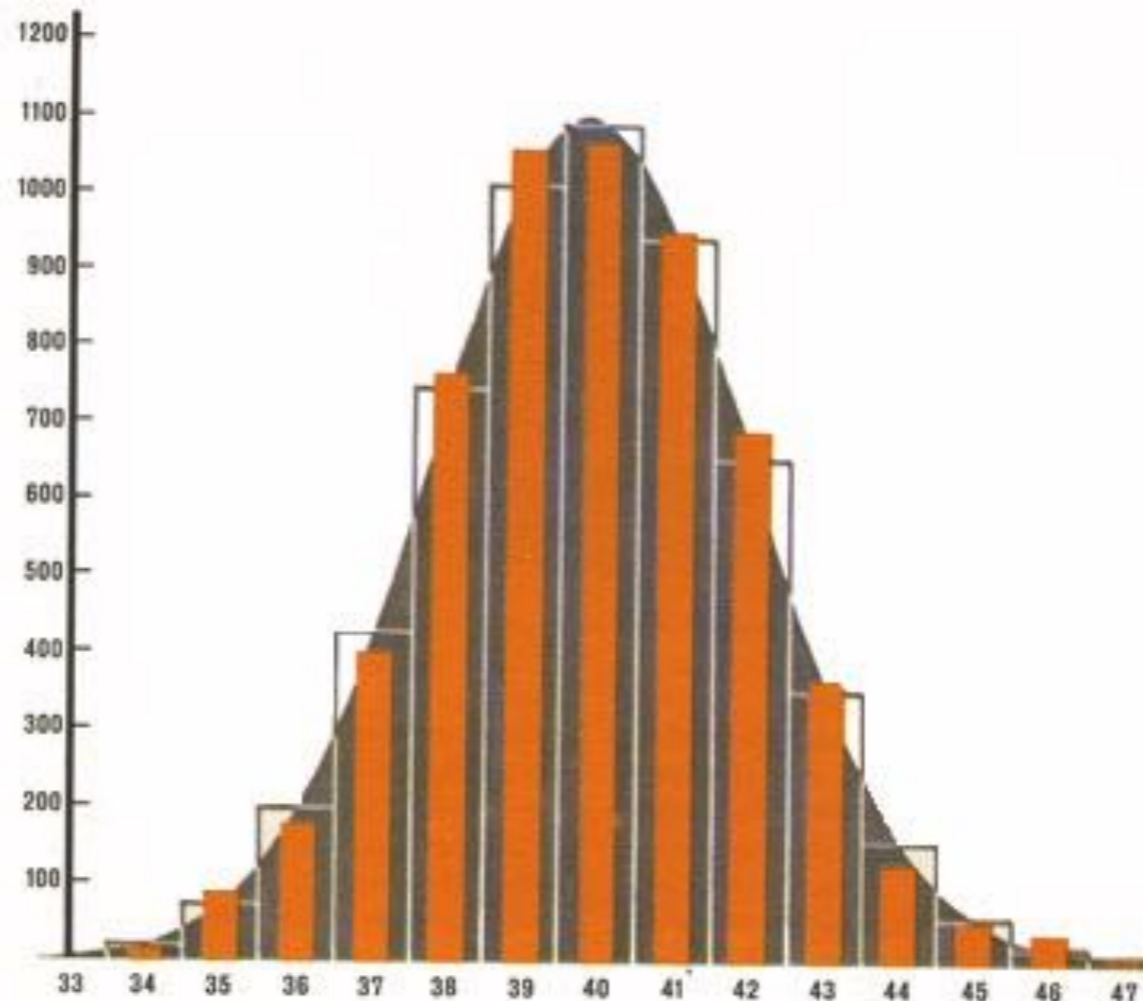
přelom 18. a 19. století: rozdíly v astronomických měřeních  
- která hodnota je správná?

Karl Friedrich Gauss a Piere Laplace: “křivka chyb měření”

*gaussova křivka*

počátek 19. století: Adolphe Quételet

- antropometrická měření anglických vojáků



Obvod hrudi skotských vojáků v  
palcích, naměřený Quételetem  
ve dvacátých letech 19. století

# Normální rozdělení

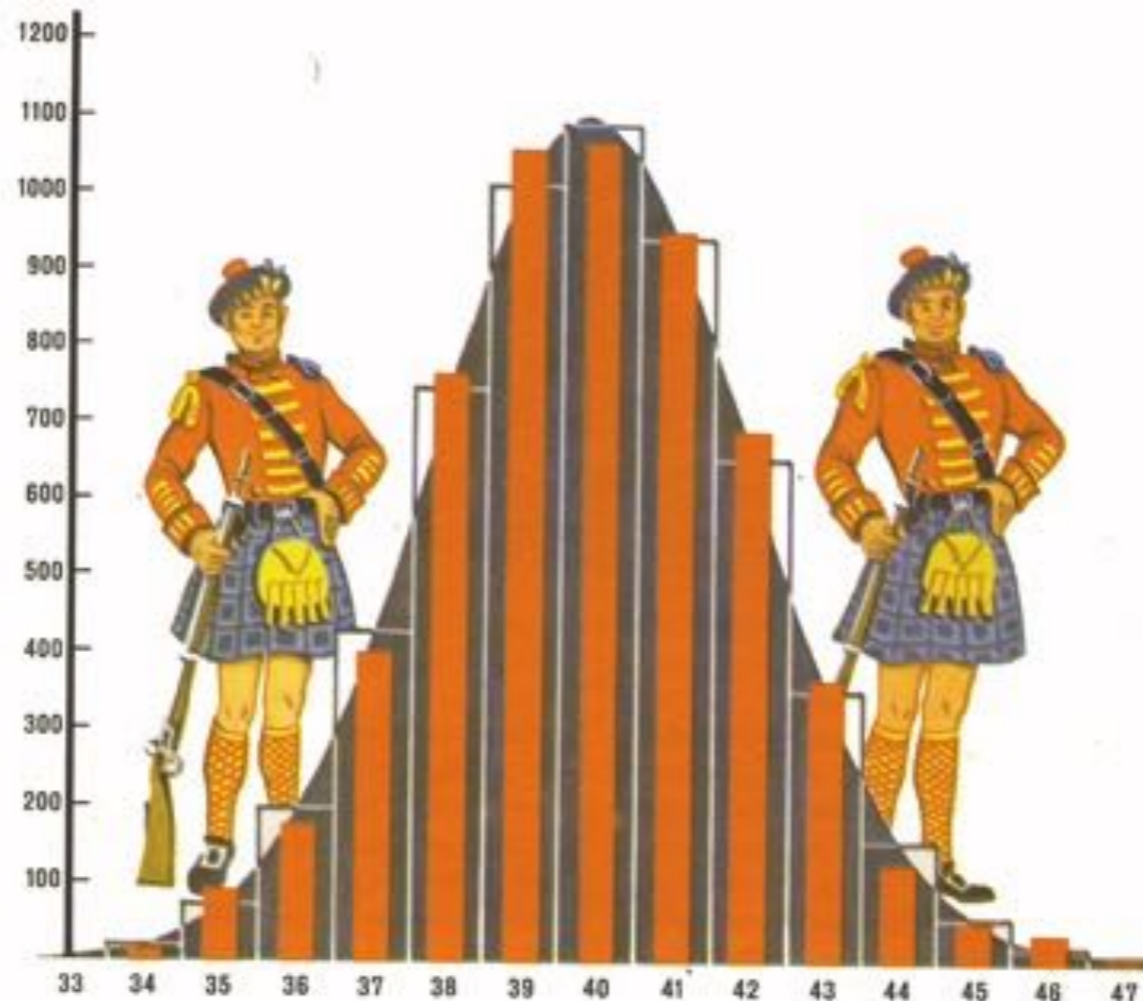
přelom 18. a 19. století: rozdíly v astronomických měřeních  
- která hodnota je správná?

Karl Friedrich Gauss a Piere Laplace: “křivka chyb měření”

*gaussova křivka*

počátek 19. století: Adolphe Quételet

- antropometrická měření anglických vojáků



Obvod hrudi skotských vojáků v  
palcích, naměřený Quételetem  
ve dvacátých letech 19. století

normální rozdělení

# Normální rozdělení

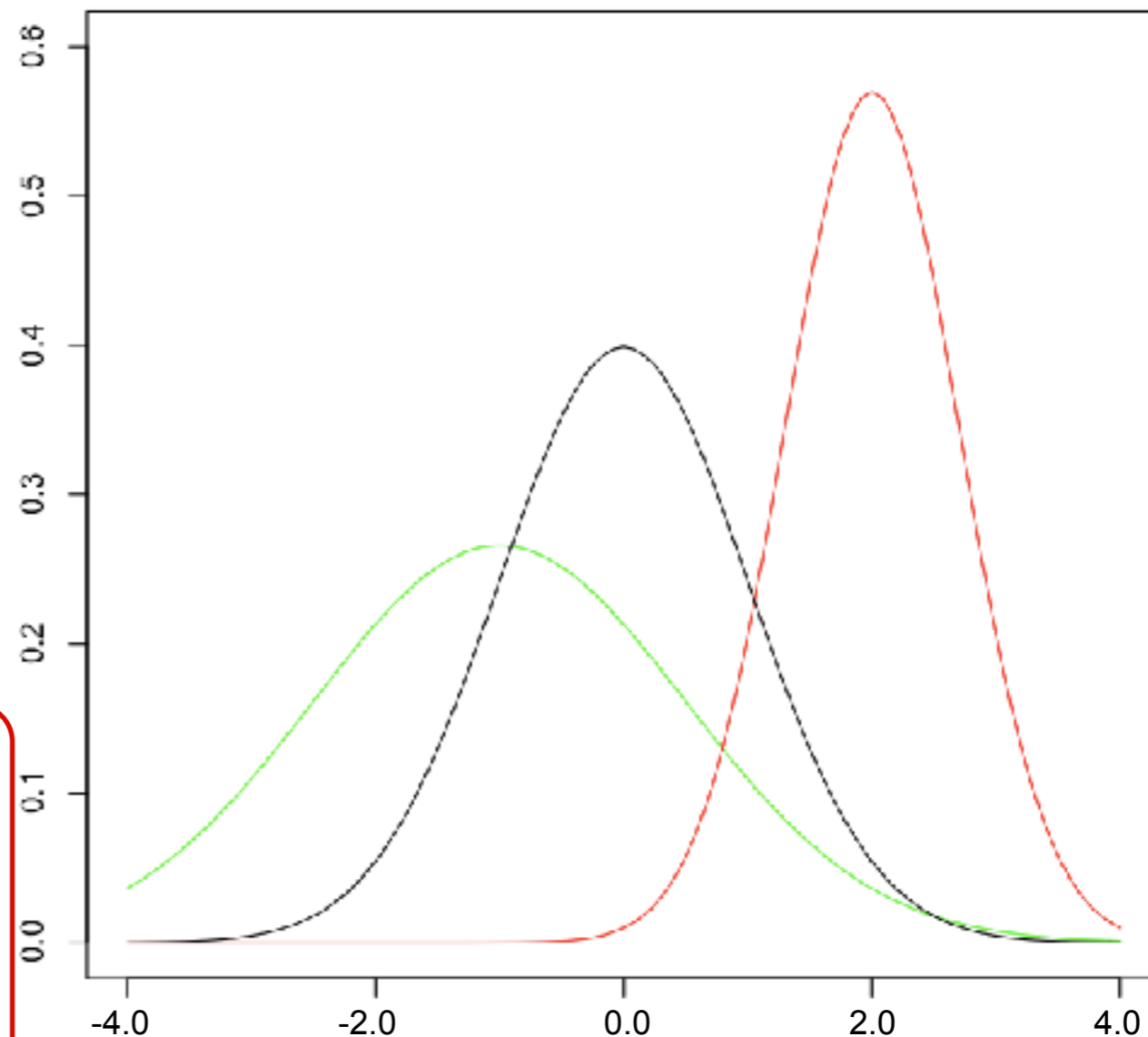
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

hustota pravděpodobnosti



$\sigma > 0$  - parametr měřítka,  
 $\mu \in \mathbb{R}$  - parametr polohy

Normální rozdělení  $N(\mu, \sigma^2)$

# Normální rozdělení

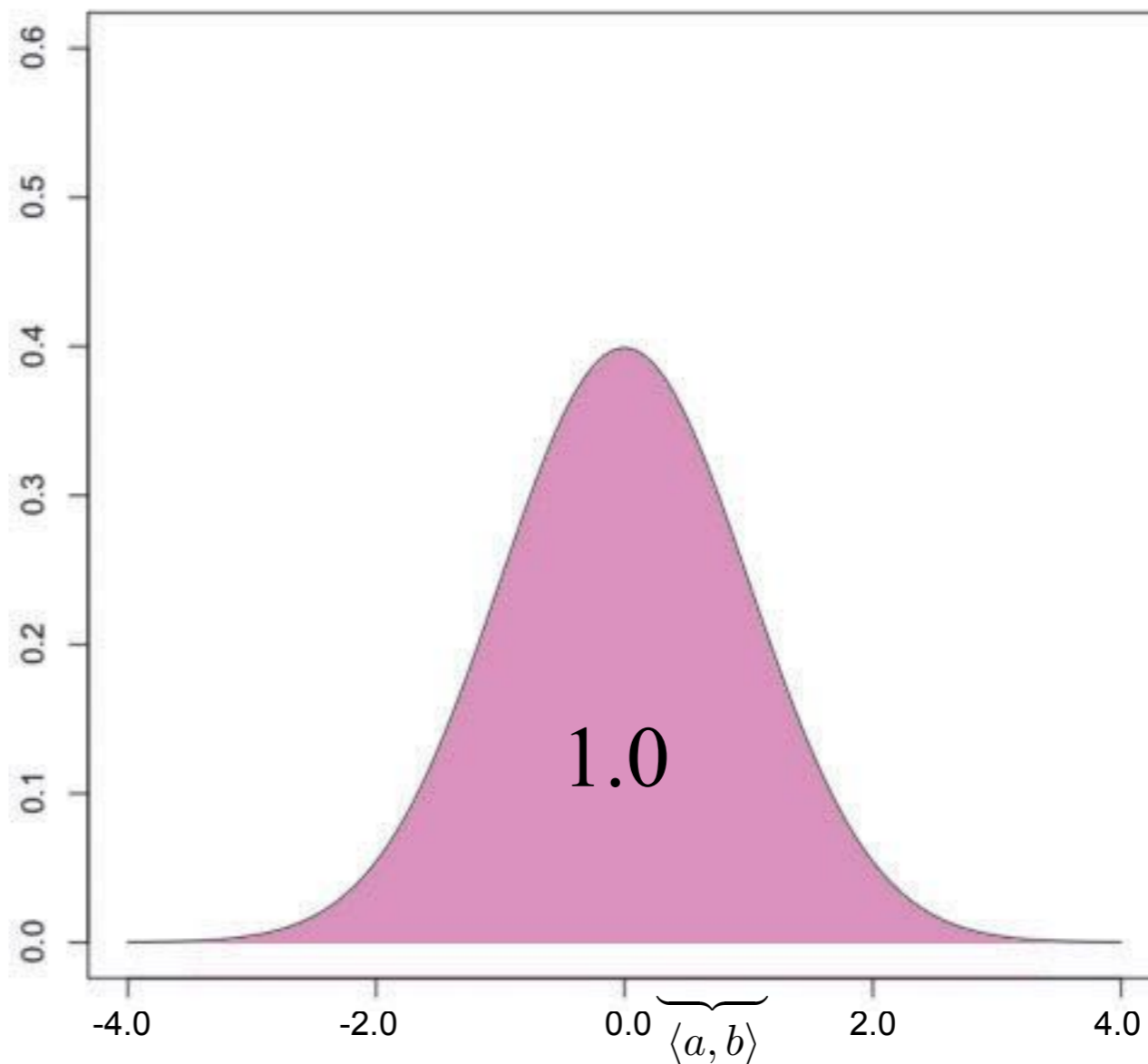
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$
$$x \in \mathbb{R}$$

Standardní normální  
rozdělení  $N(0,1)$

$$X \sim N(0, 1)$$

$$X \in (-\infty, +\infty)$$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$



# Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$
$$x \in \mathbb{R}$$

$$X \sim N(0, 1)$$

$$P(-1 \leq X \leq 1) = 0.6826$$

$$P(-2 \leq X \leq 2) = 0.9545$$

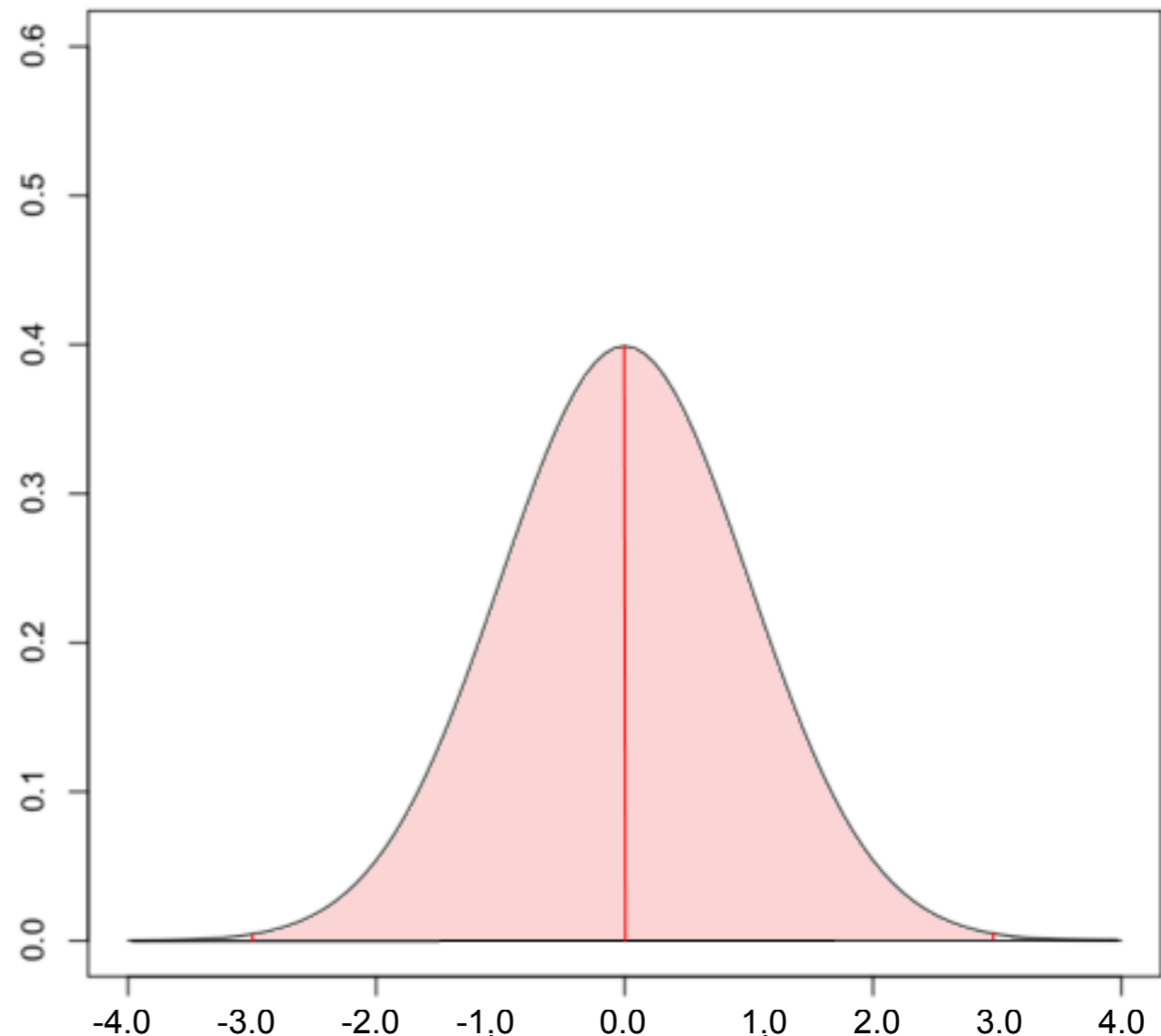
$$P(-3 \leq X \leq 3) = 0.9973$$

$$Y \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$P(\mu - \sigma \leq Y \leq \mu + \sigma) = 0.6826$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq Y \leq \mu + 2\sigma) = 0.9545$$

$$P(\mu - 3\sigma \leq Y \leq \mu + 3\sigma) = 0.9973$$



$\langle \mu - \sigma, \mu + \sigma \rangle$

68,26%

$\langle \mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma \rangle$

95%

$\langle \mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma \rangle$

99.7%



# Normální rozdělení

$$X \sim N(0, 1)$$

$$Y \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$P(-1 \leq X \leq 1) = 0.6826 \quad P(\mu - \sigma \leq Y \leq \mu + \sigma) = 0.6826$$

$$P(-2 \leq X \leq 2) = 0.9545 \quad P(\mu - 2\sigma \leq Y \leq \mu + 2\sigma) = 0.9545$$

$$P(-3 \leq X \leq 3) = 0.9973 \quad P(\mu - 3\sigma \leq Y \leq \mu + 3\sigma) = 0.9973$$

$$P(\mu - k\sigma \leq Y \leq \mu + k\sigma) = P(-k\sigma \leq Y - \mu \leq k\sigma)$$

$$= P\left(-k \leq \frac{Y - \mu}{\sigma} \leq k\right) = P(-k \leq X \leq k)$$

$$Y \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow X = \frac{Y - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

# Normální rozdělení

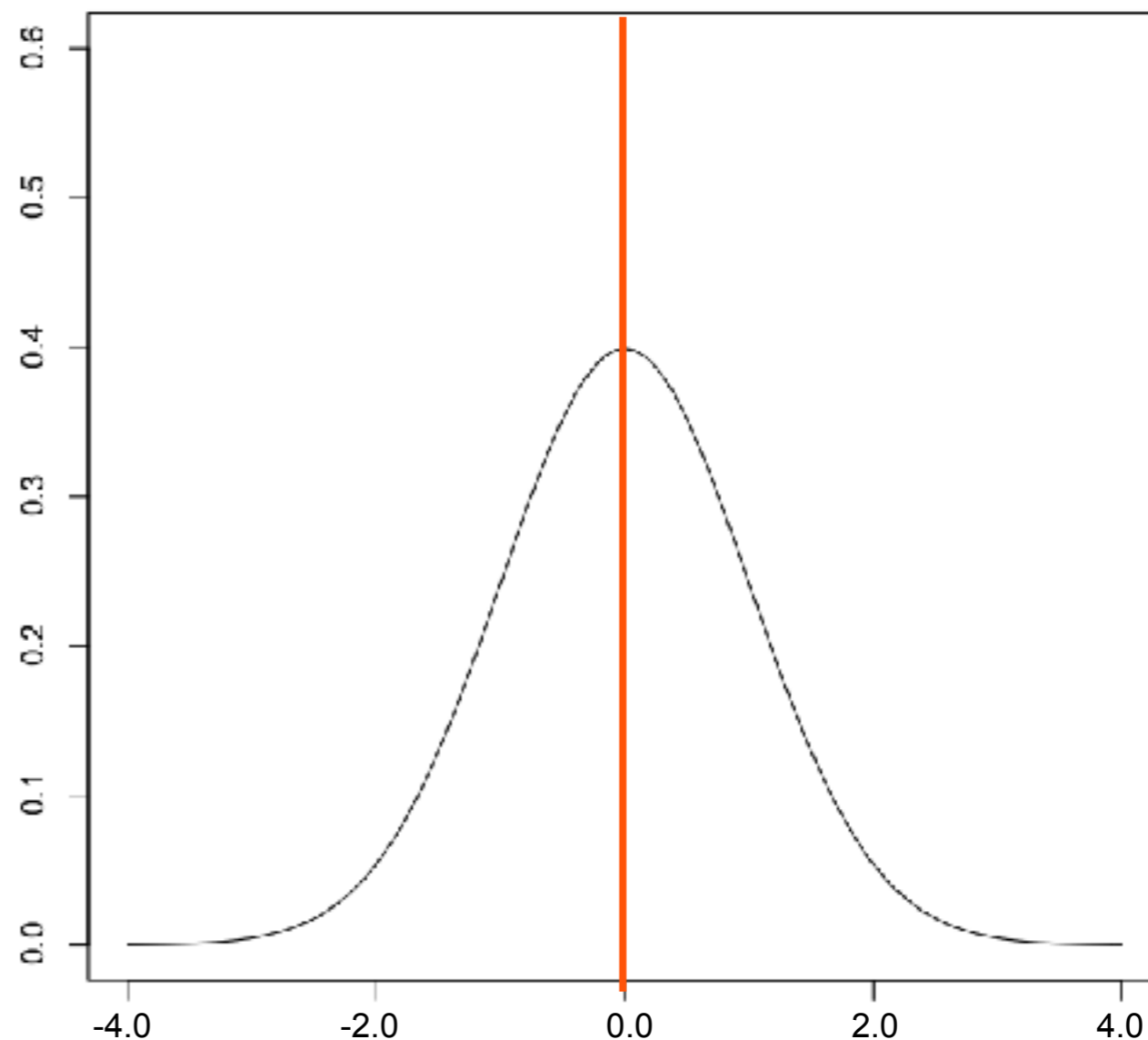
Symetrie:

$$X \sim N(0, 1)$$

$$f(x) = f(-x)$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$f(\mu + x) = f(\mu - x)$$



# Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

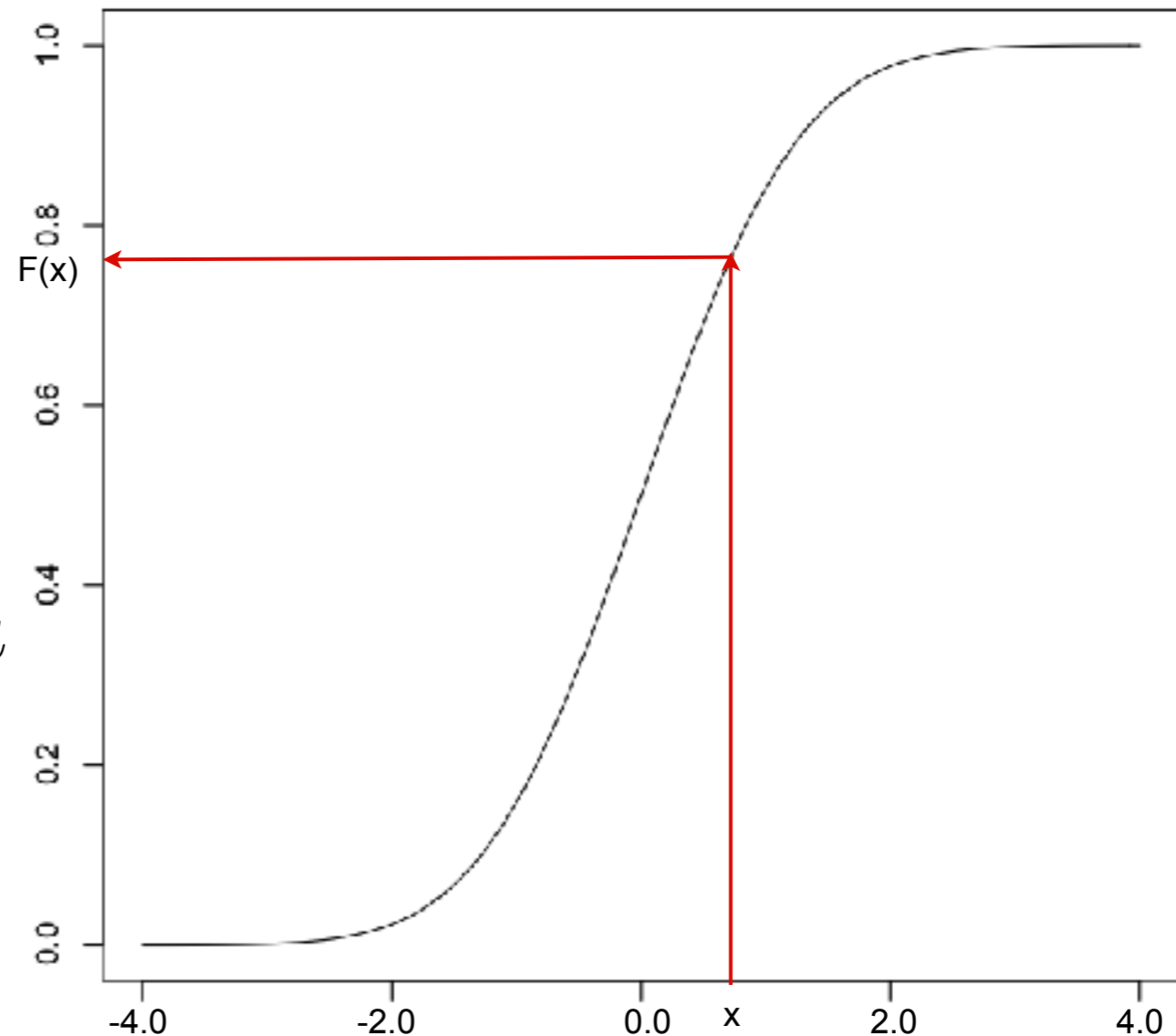
$x \in \mathbb{R}$

$$X \sim N(0, 1)$$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

$$\Phi(x) = P(X \leq x)$$

distribuční funkce



S jakou pravděpodobností bude hodnota náhodné veličiny  $X$  menší než  $x$ ?

S jakou pravděpodobností nebude hodnota náhodné veličiny  $X$  větší než  $x$ ?

S jakou pravděpodobností bude hodnota náhodné veličiny  $X$  větší než  $x$ ?

$$P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - \Phi(x)$$

# Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

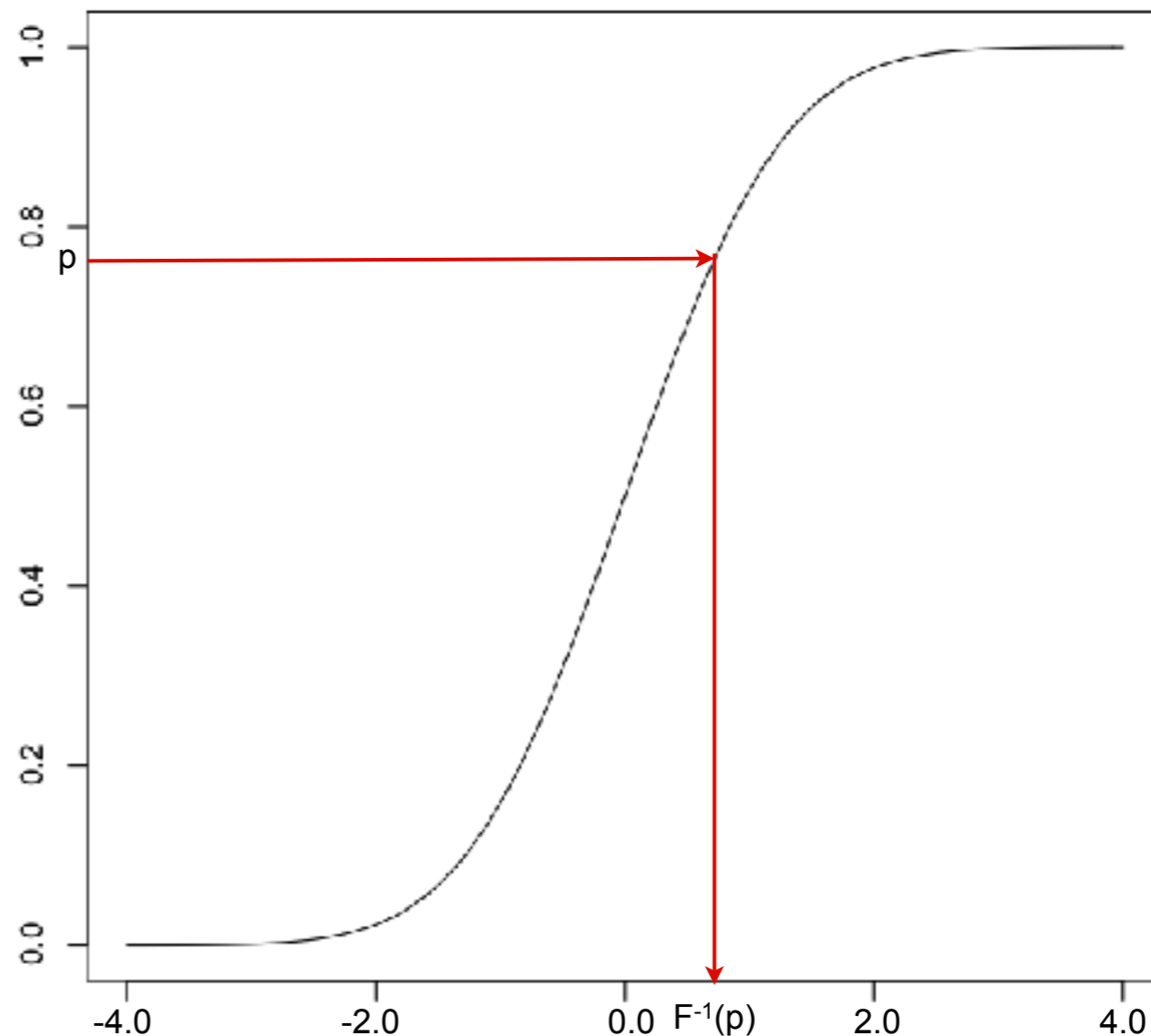
$x \in \mathbb{R}$

$$X \sim N(0, 1)$$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

$$\Phi(x) = P(X \leq x)$$

distribuční funkce



Jakou hodnotu náhodná veličina  $X$  nepřekročí s pravděpodobností  $p$ ?

$$x_p = \Phi^{-1}(p)$$

kvantilová funkce

Jakých hodnot bude náhodná veličina  $X$  nabývat s předem danou pravděpodobností  $p$ ?

# Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

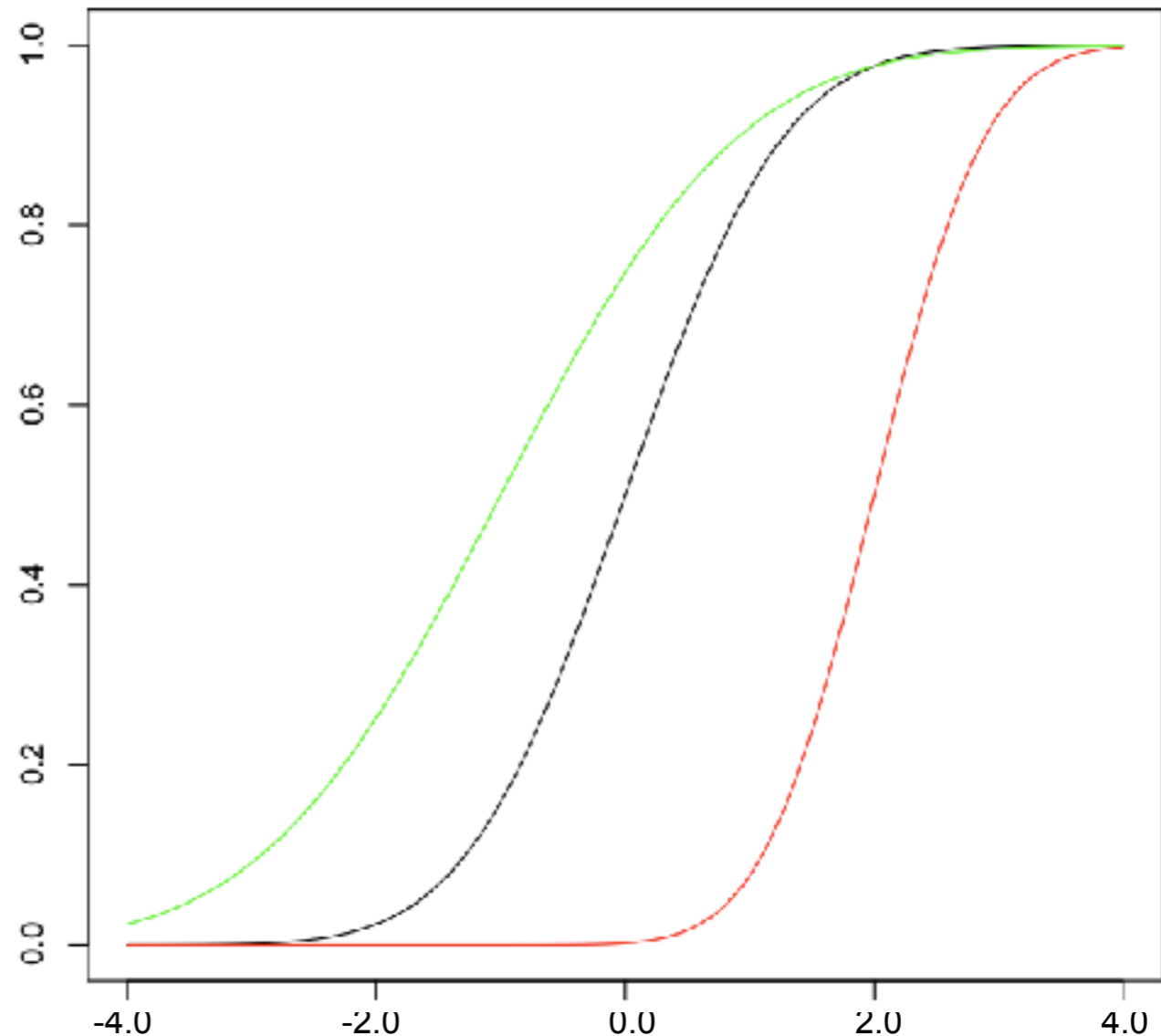
$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

$$F(x) = P(X \leq x)$$

distribuční funkce

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}, \quad x \in \mathbb{R}$$

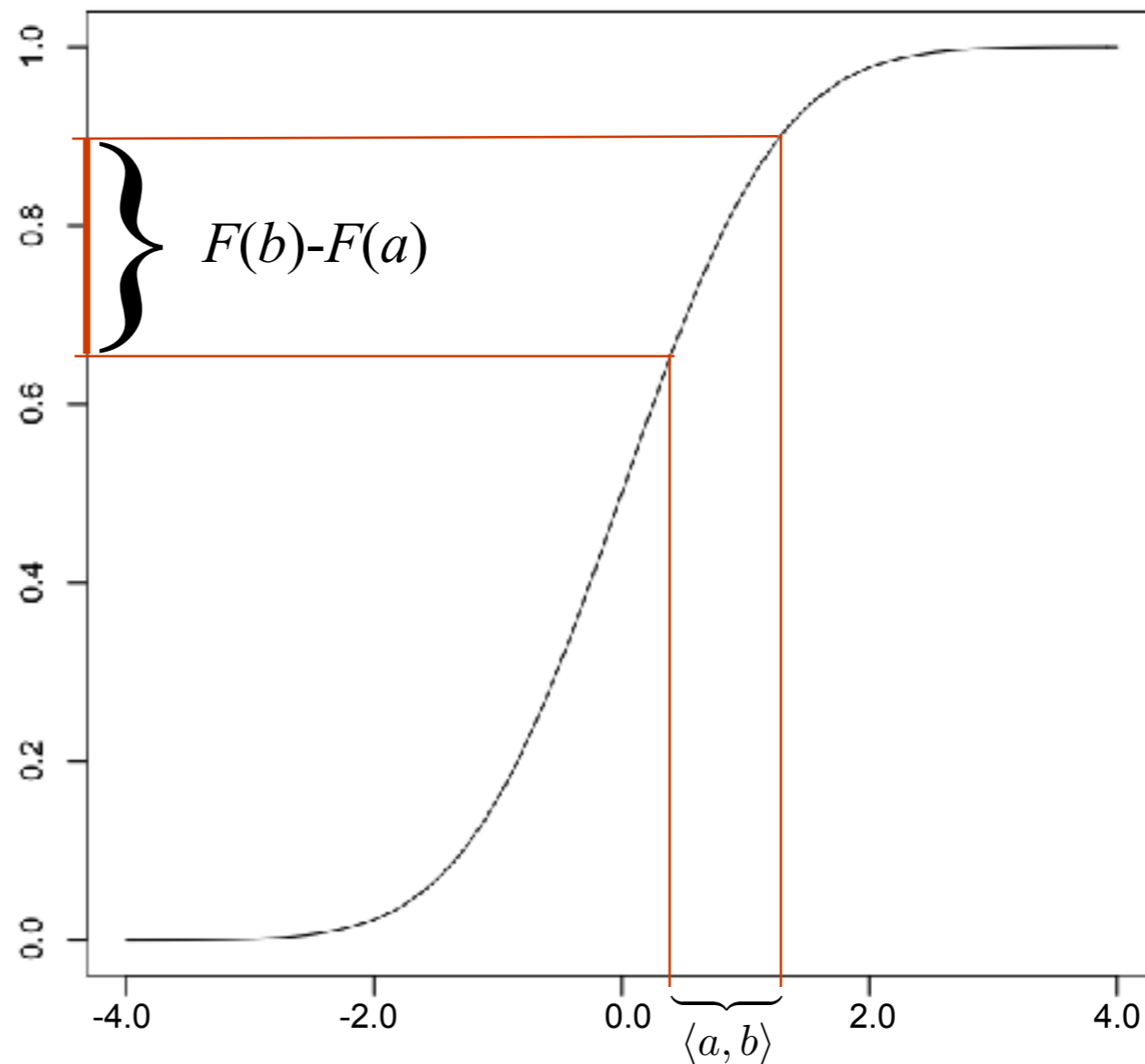


# Normální rozdělení

S jakou pravděpodobností bude budoucí hodnota náhodné veličiny  $X$  v intervalu  $\langle a, b \rangle$  ?

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= \int_a^b f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^b f(x) dx - \int_{-\infty}^a f(x) dx \end{aligned}$$

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$



# Normální rozdělení

Symetrie:

$$X \sim N(0, 1)$$

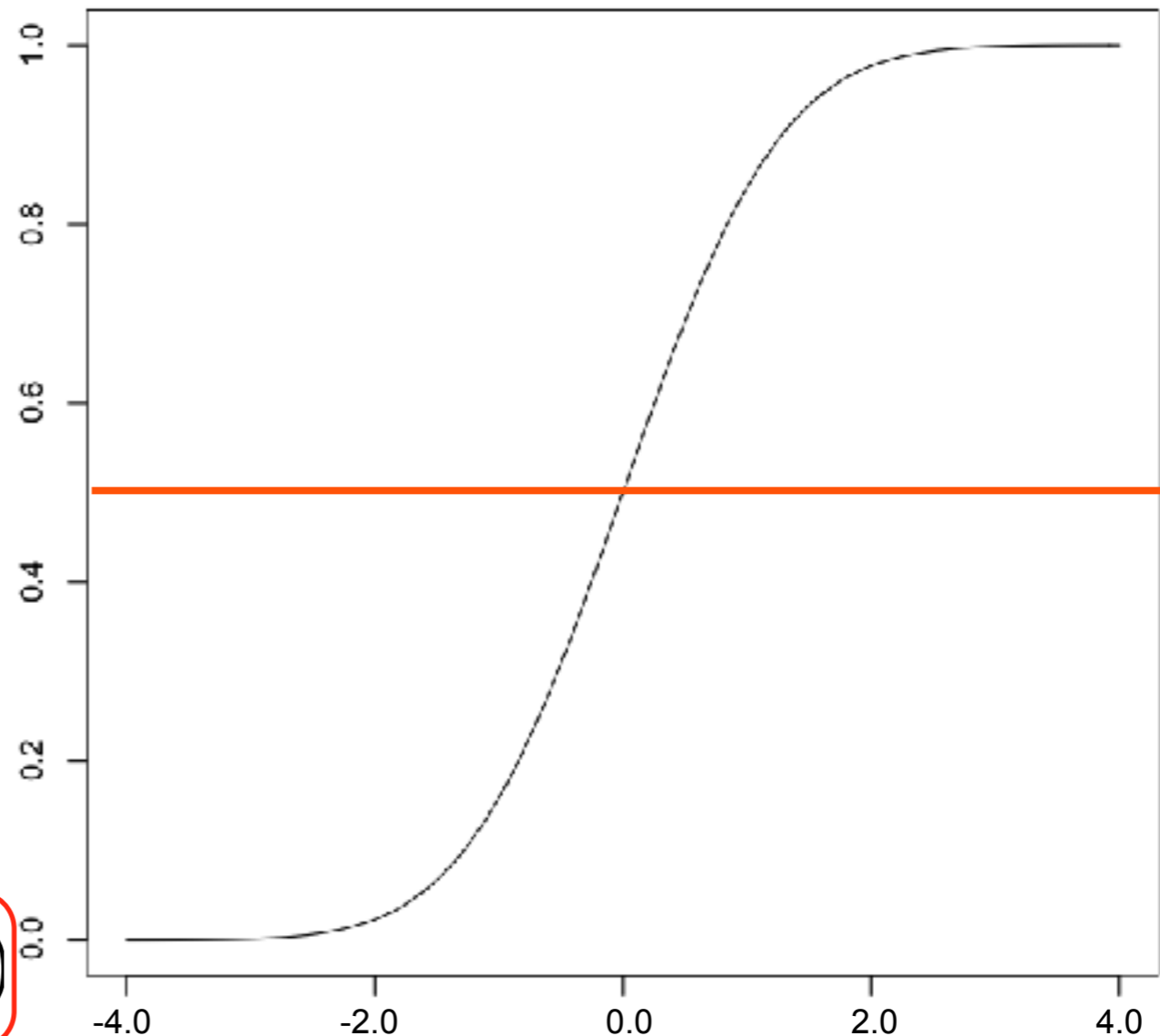
$$f(x) = f(-x)$$

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$f(\mu + x) = f(\mu - x)$$

$$F(\mu + x) = 1 - F(\mu - x)$$



$$P(|X| \leq x) = \Phi(x) - \Phi(-x) = \Phi(x) - (1 - \Phi(x)) = 2\Phi(x) - 1$$

$$P(|X - \mu| \leq x) = F(\mu + x) - F(\mu - x) = \\ F(\mu + x) - (1 - F(\mu + x)) = 2F(\mu + x) - 1$$

# Normální rozdělení

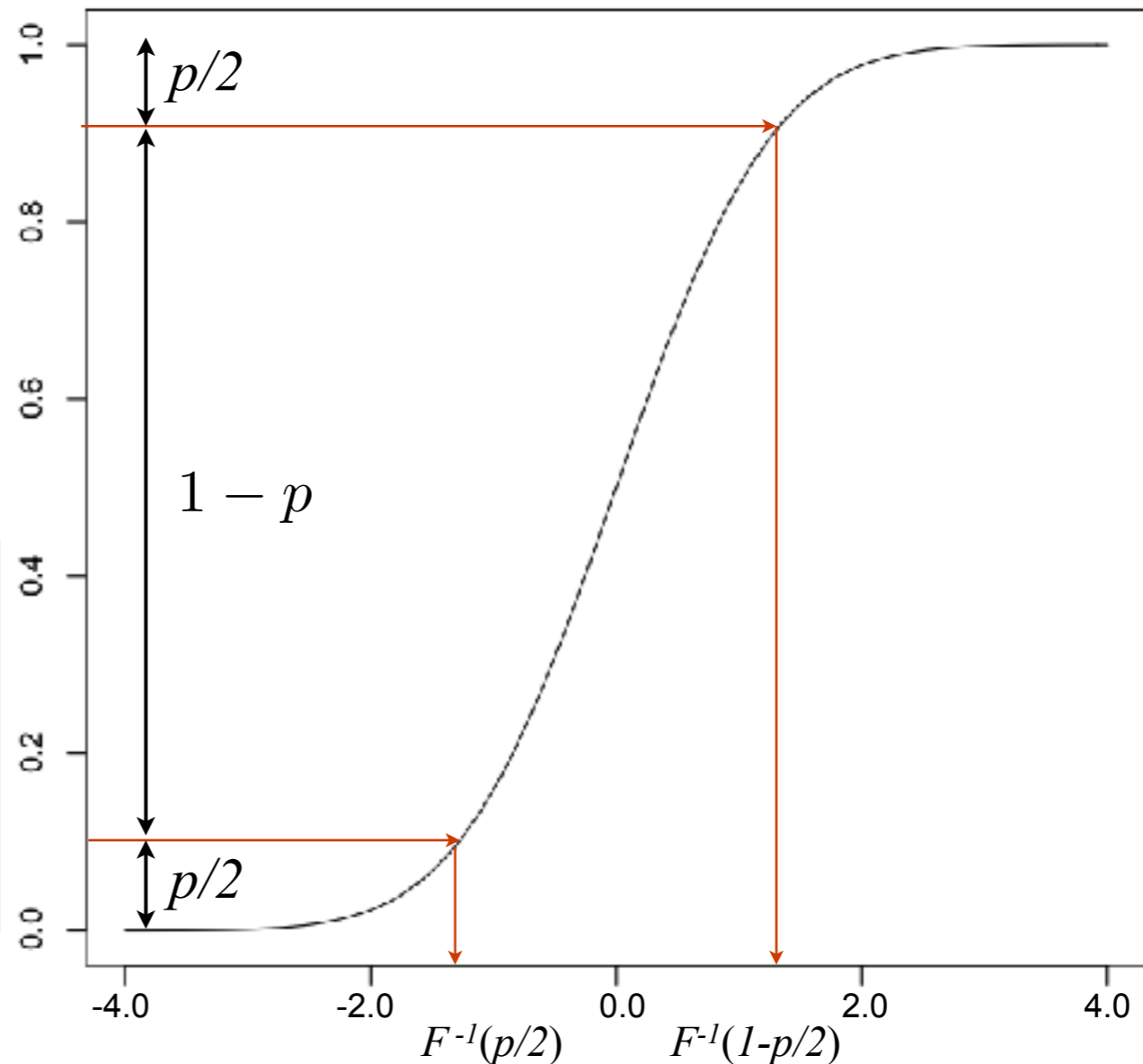
Jakých hodnot kolem střední hodnoty bude náhodná veličina  $X$  nabývat s předem danou pravděpodobností  $1-p$ ?

$$P(a \leq X \leq b) = 1 - p$$

$$a = F^{-1}(p/2),$$

$$b = F^{-1}(1 - p/2)$$

$(p/2)$ -kvantil normálního rozdělení a  
 $(1-p/2)$ -kvantil normálního rozdělení



Ze symetrie plyne:

$$X \sim N(0, 1) : x_{p/2} = \Phi^{-1}(p/2) = -x_{1-p/2} = -\Phi^{-1}(1 - p/2)$$

$$Y \sim N(\mu, \sigma^2) : y_{p/2} = F^{-1}(p/2) = 2\mu - y_{1-p/2} = 2\mu - F^{-1}(1 - p/2)$$



# Normální rozdělení

Jaký je vztah mezi  $x_{p/2}$  a  $y_{p/2}$ ?

$$X \sim N(0, 1), Y \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$\Rightarrow X = \frac{Y - \mu}{\sigma}$$

$$\Rightarrow Y = \sigma X + \mu$$

$$F(y) = P(Y \leq y) =$$

$$P\left(\frac{Y - \mu}{\sigma} \leq \frac{y - \mu}{\sigma}\right) =$$

$$P\left(X \leq \frac{y - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right)$$

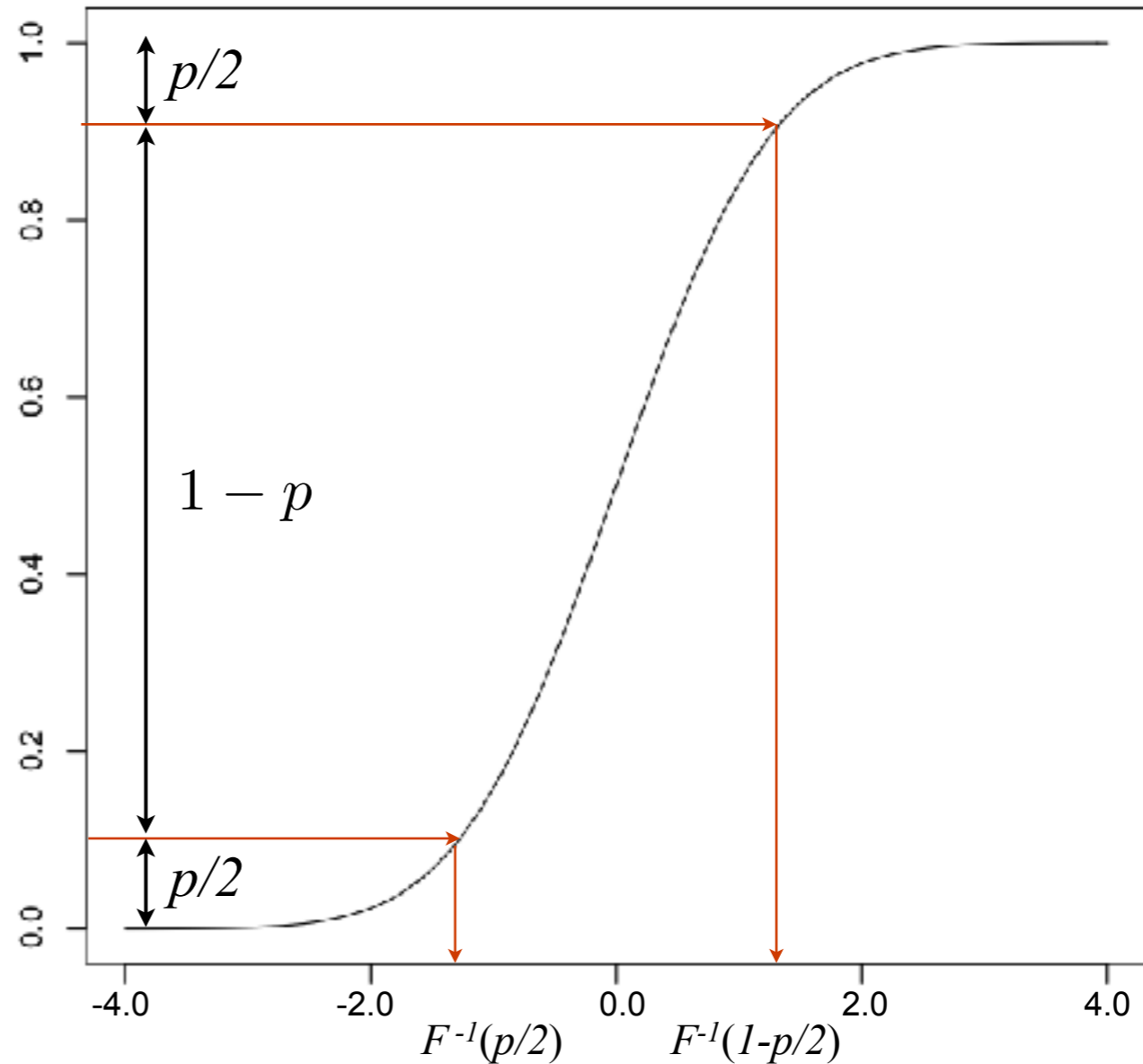
Tedy je:

$$F(y) = \Phi\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right)$$

... a odtud:

$$F^{-1}(p) = \sigma \Phi^{-1}(p) + \mu$$

Vše se prakticky vyjadřuje pouze v tzv. kritických hodnotách:  $u_p = \Phi^{-1}(1 - p/2)$



# Normální rozdělení

Jaký je vztah mezi  $x_{p/2}$  a  $y_{p/2}$ ?

... označme tedy

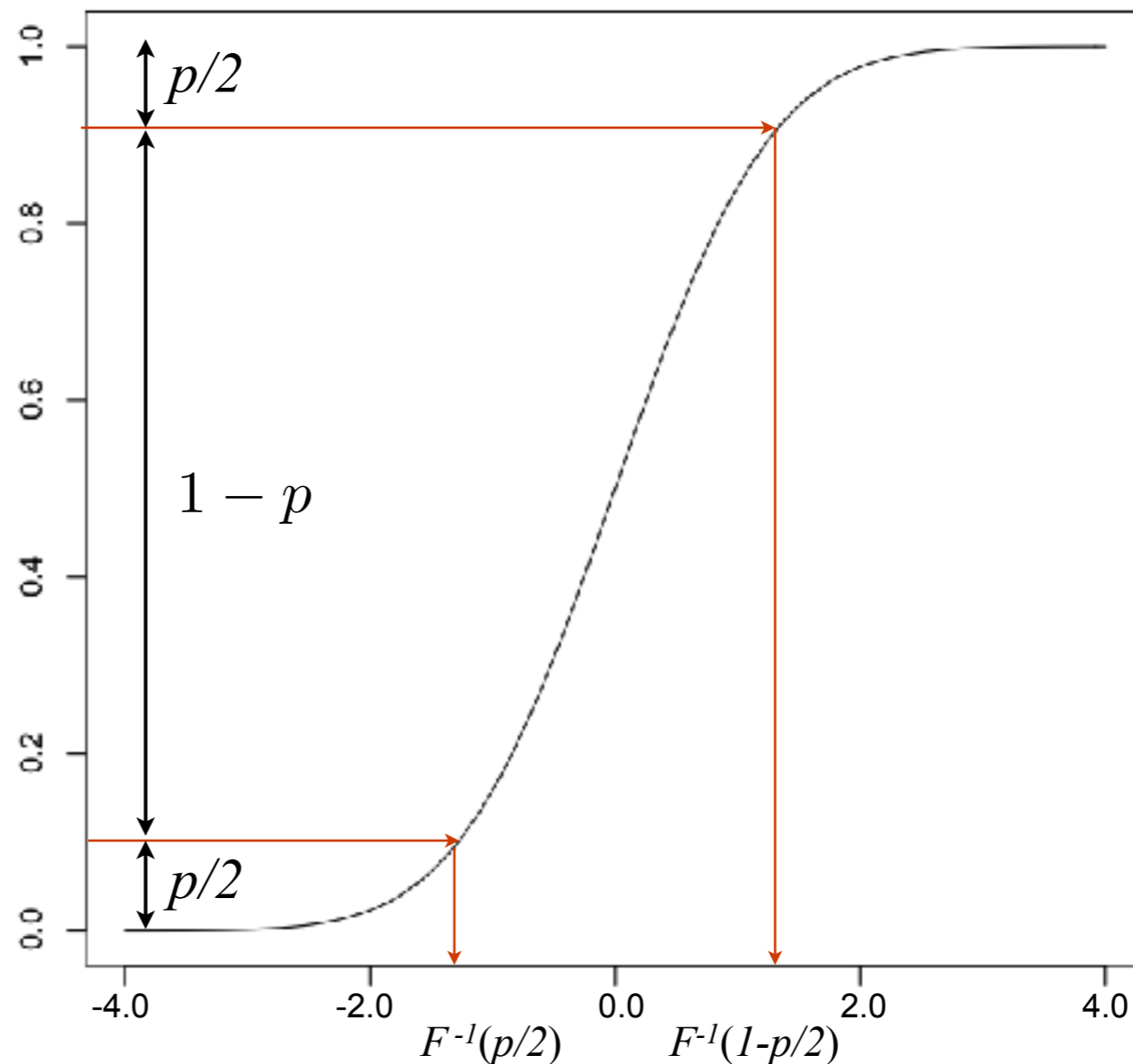
$$\Phi^{-1}(1 - p/2) = u_p$$

... potom

$$\Phi^{-1}(p/2) = -u_p$$

$$F^{-1}(1 - p/2) = \mu + \sigma u_p$$

$$F^{-1}(p/2) = \mu - \sigma u_p$$



Tedy je:

$$F(y) = \Phi\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right)$$

... a odtud:

$$F^{-1}(p) = \sigma \Phi^{-1}(p) + \mu$$

Vše se prakticky vyjadřuje pouze v tzv. kritických hodnotách:  $u_p = \Phi^{-1}(1 - p/2)$

# Normální rozdělení

Jaký je vztah mezi  $x_{p/2}$  a  $y_{p/2}$ ?

... označme tedy

$$\Phi^{-1}(1 - p/2) = u_p$$

... potom

$$\Phi^{-1}(p/2) = -u_p$$

$$F^{-1}(1 - p/2) = \mu + \sigma u_p$$

$$F^{-1}(p/2) = \mu - \sigma u_p$$

Tedy pro  $\alpha \in (0, 1)$

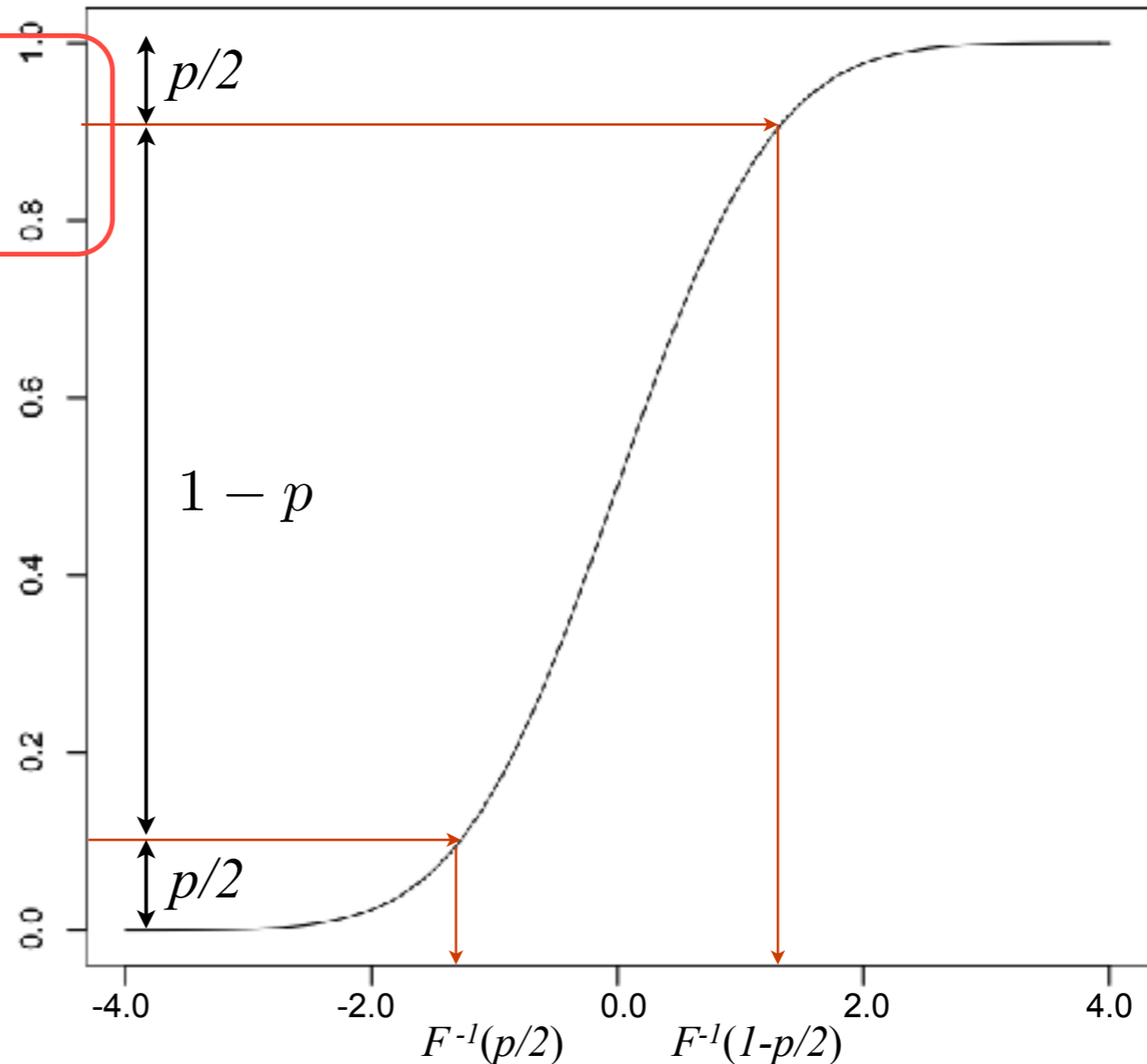
$$X \sim N(0, 1) \Rightarrow$$

$$P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$$

$$Y \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow$$

$$P(\mu - \sigma u_\alpha \leq Y \leq \mu + \sigma u_\alpha) = 1 - \alpha$$

$$P(-u_\alpha \leq \frac{Y - \mu}{\sigma} \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$$



# Parametry normálního rozdělení

Střední hodnota náhodné veličiny  $X$ :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Rozptyl náhodné veličiny  $X$ :

$$\text{var}(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow E(X) = \mu \quad \text{var}(X) = \sigma^2$$

Jak tyto parametry najít, když máme k dispozici pouze několik měření veličiny  $X$ ?

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$$