

Základy pravděpodobnosti a matematické statistiky

5. Model s normálním rozdělením



FAKULTA
STROJNÍ
ČVUT V PRAZE



prof. RNDr. Gejza Dohnal, CSc.

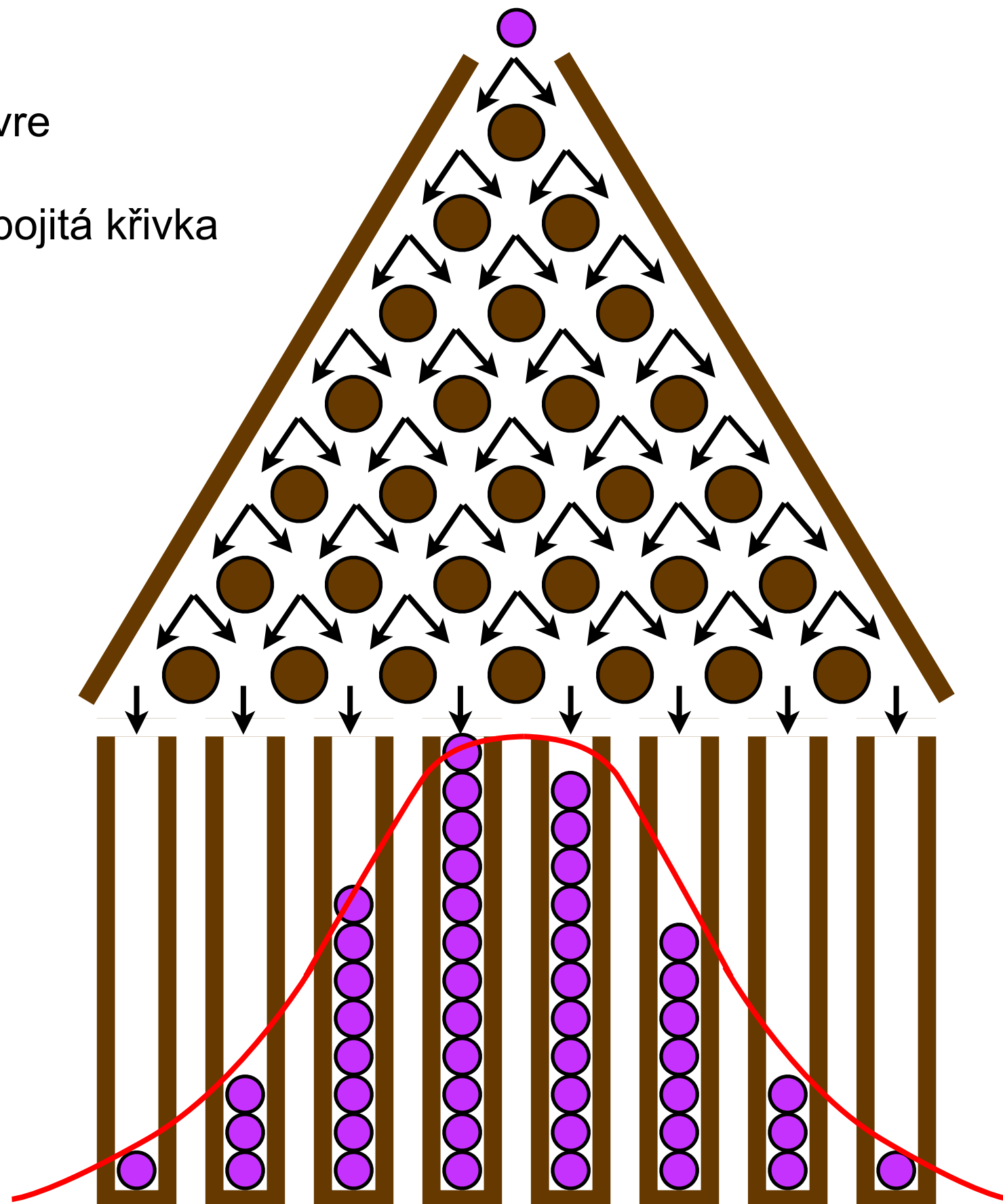
ak. rok 2023/2024

5. Model s normálním rozdělením

Galtonova deska

1733 : Abraham de Moivre

pokusy s mincemi → spojitá křivka



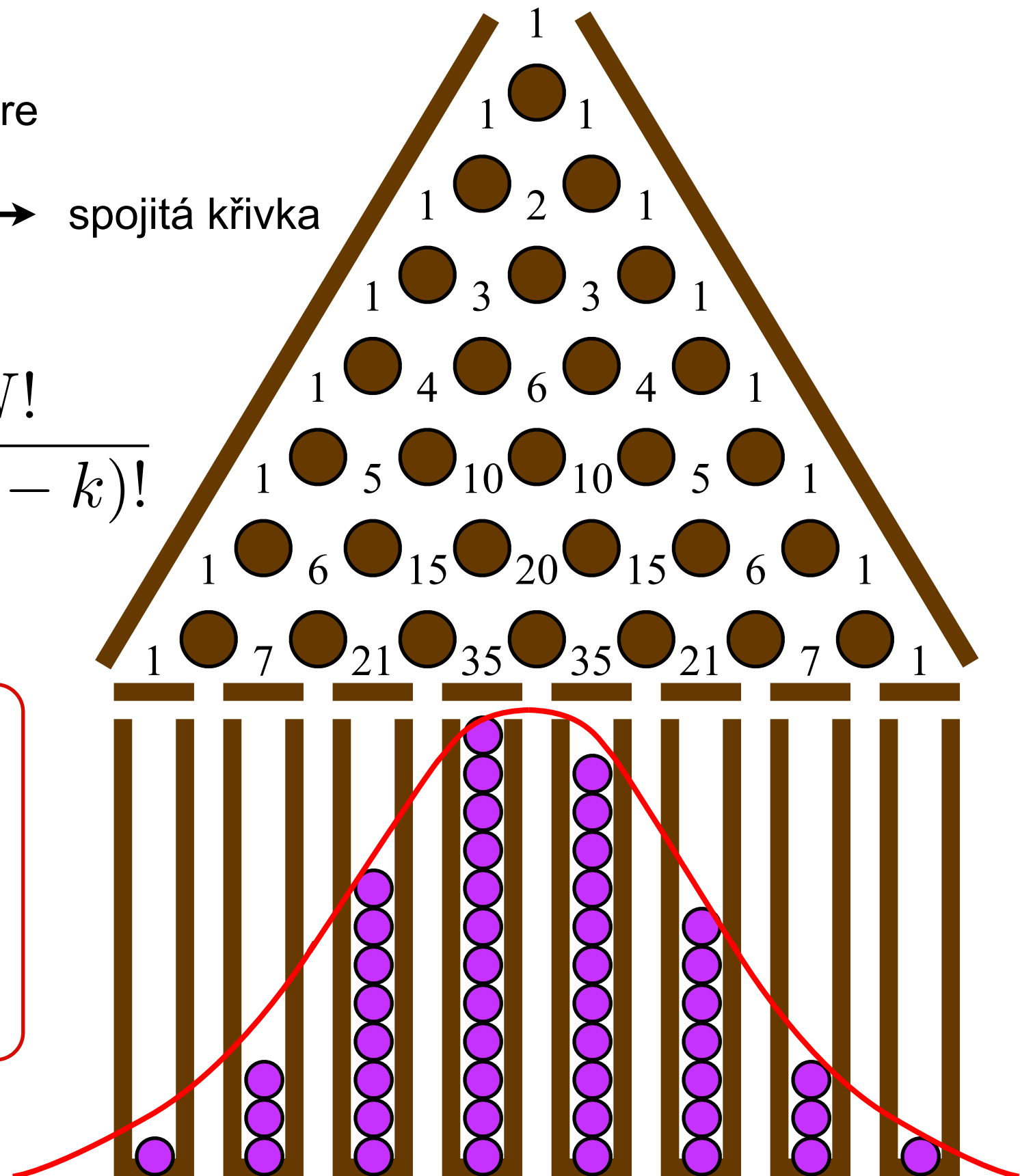
Galtonova deska

1733 : Abraham de Moivre

pokusy s mincemi → spojitá křivka

Pascalův trojúhelník

$$n_k = \binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$$



Moivre navrhl rovnici:

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$y = Ke^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}}$$

Rozdělení chyb měření

přelom 18. a 19. století: rozdíly v astronomických měřeních
- která hodnota je správná?

Karl Friedrich Gauss a Piere Laplace: “křivka chyb měření”

gaussova křivka

Model „normálního“ vojáka

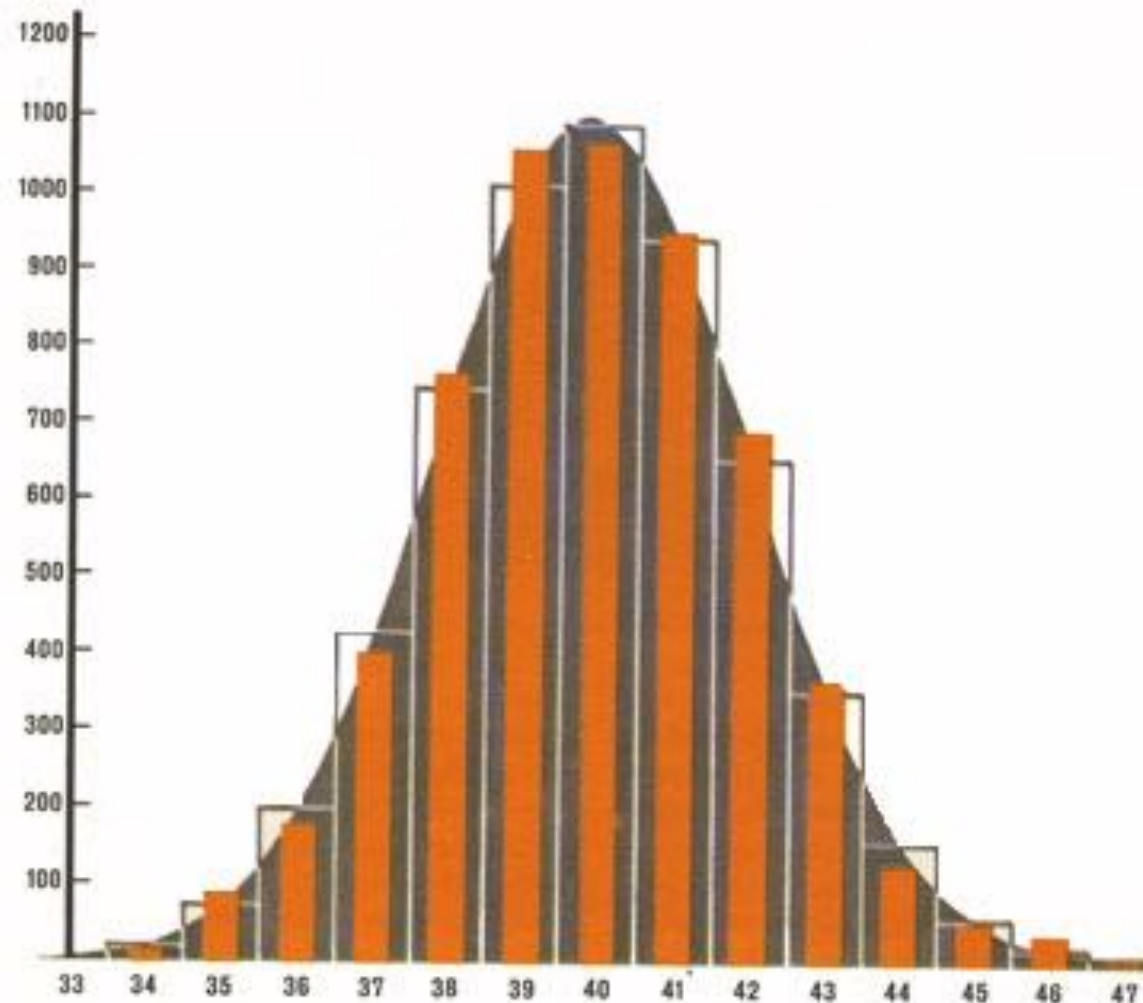
přelom 18. a 19. století: rozdíly v astronomických měřeních
- která hodnota je správná?

Karl Friedrich Gauss a Pierre Laplace: “křivka chyb měření”

gaussova křivka

počátek 19. století: Adolphe Quételet

- antropometrická měření anglických vojáků



Obvod hrudi skotských vojáků v
palcích, naměřený Quételetem
ve dvacátých letech 19. století

Normální (Gaussovo) rozdělení

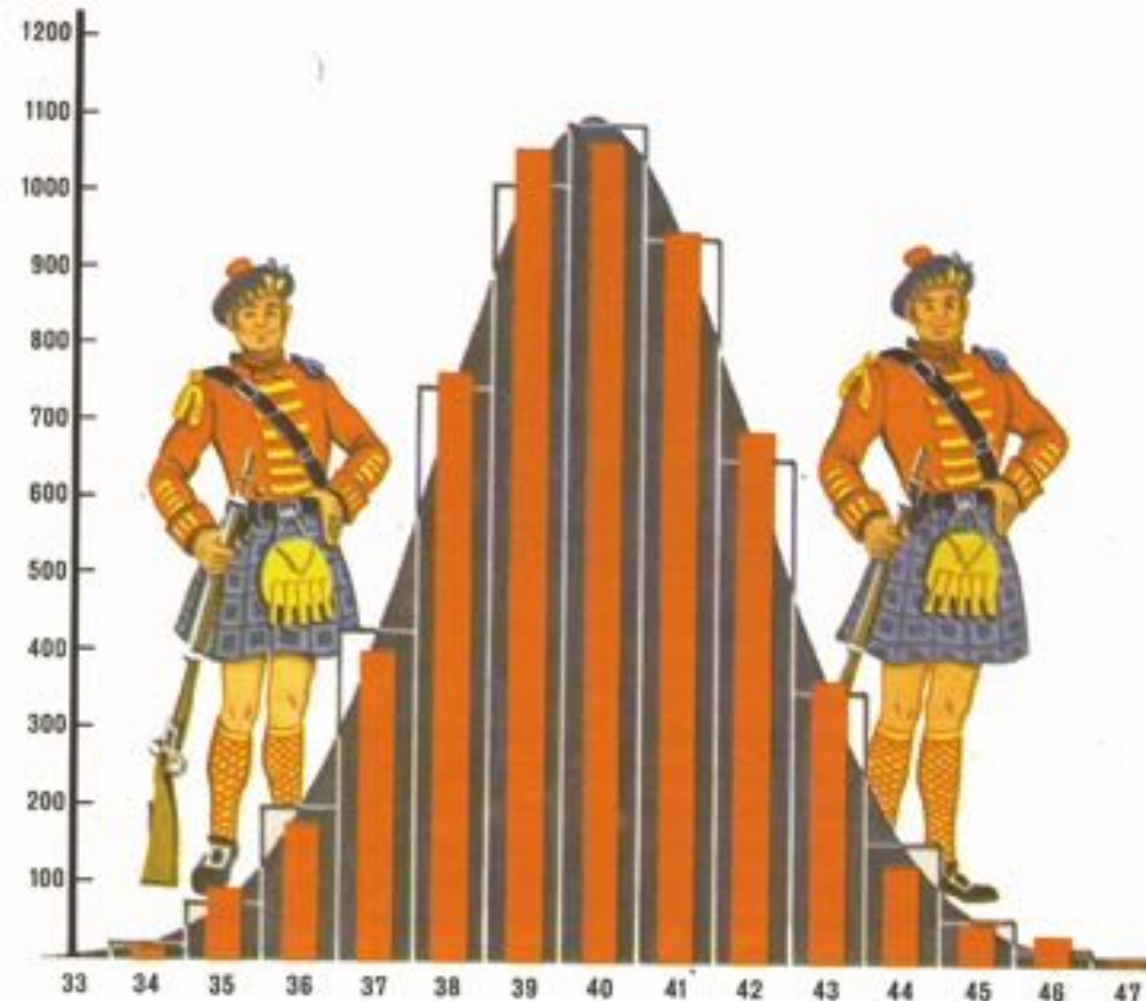
přelom 18. a 19. století: rozdíly v astronomických měřeních
- která hodnota je správná?

Karl Friedrich Gauss a Pierre Laplace: “křivka chyb měření”

gaussova křivka

počátek 19. století: Adolphe Quételet

- antropometrická měření anglických vojáků



Obvod hrudi skotských vojáků v
palcích, naměřený Quételetem
ve dvacátých letech 19. století

normální rozdělení

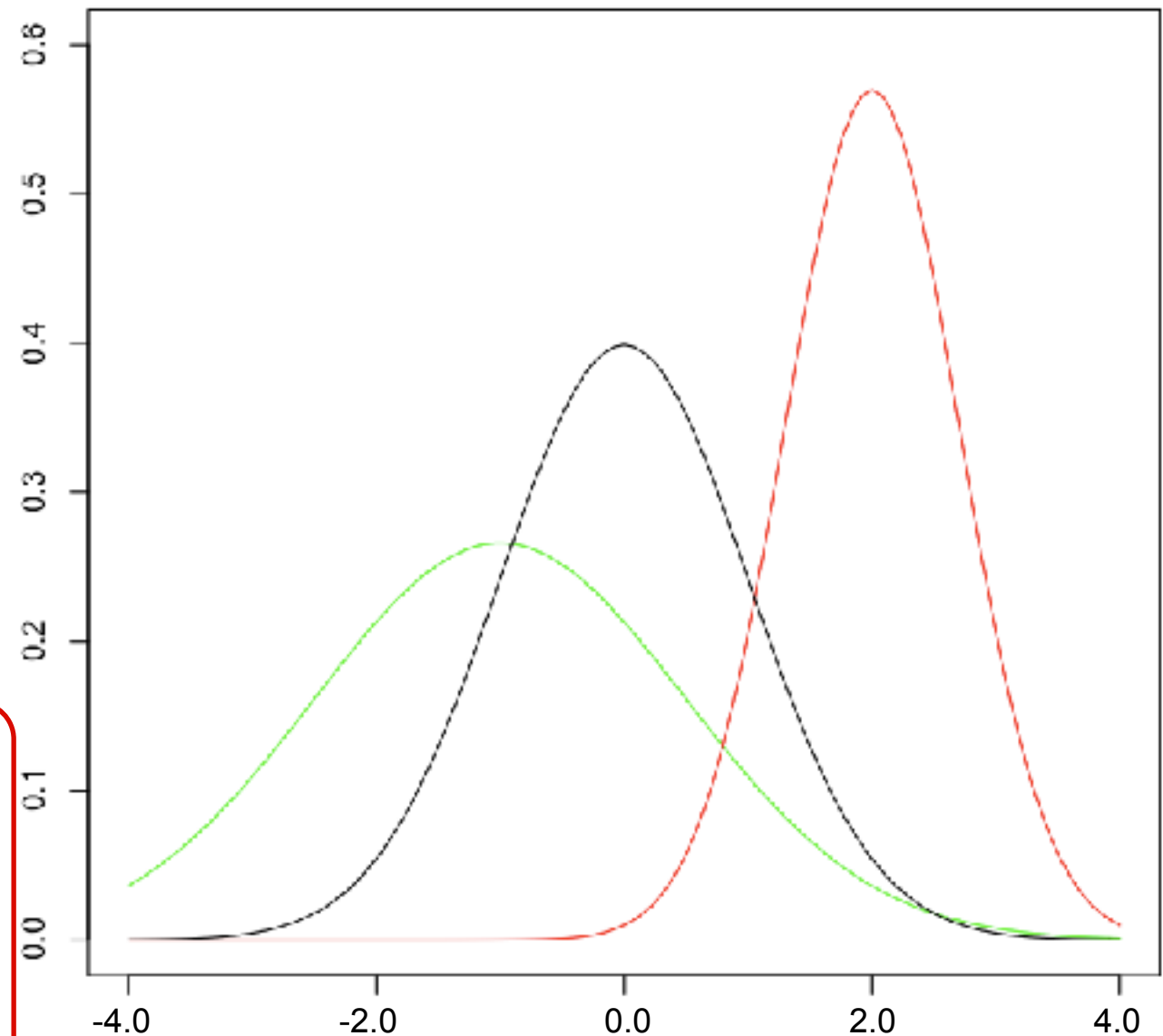
Normální (Gaussovo) rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$
$$x \in R$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

hustota pravděpodobnosti



$\sigma > 0$ - parametr měřítka,
 $\mu \in R$ - parametr polohy

Normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$

Normální (Gaussovo) rozdělení

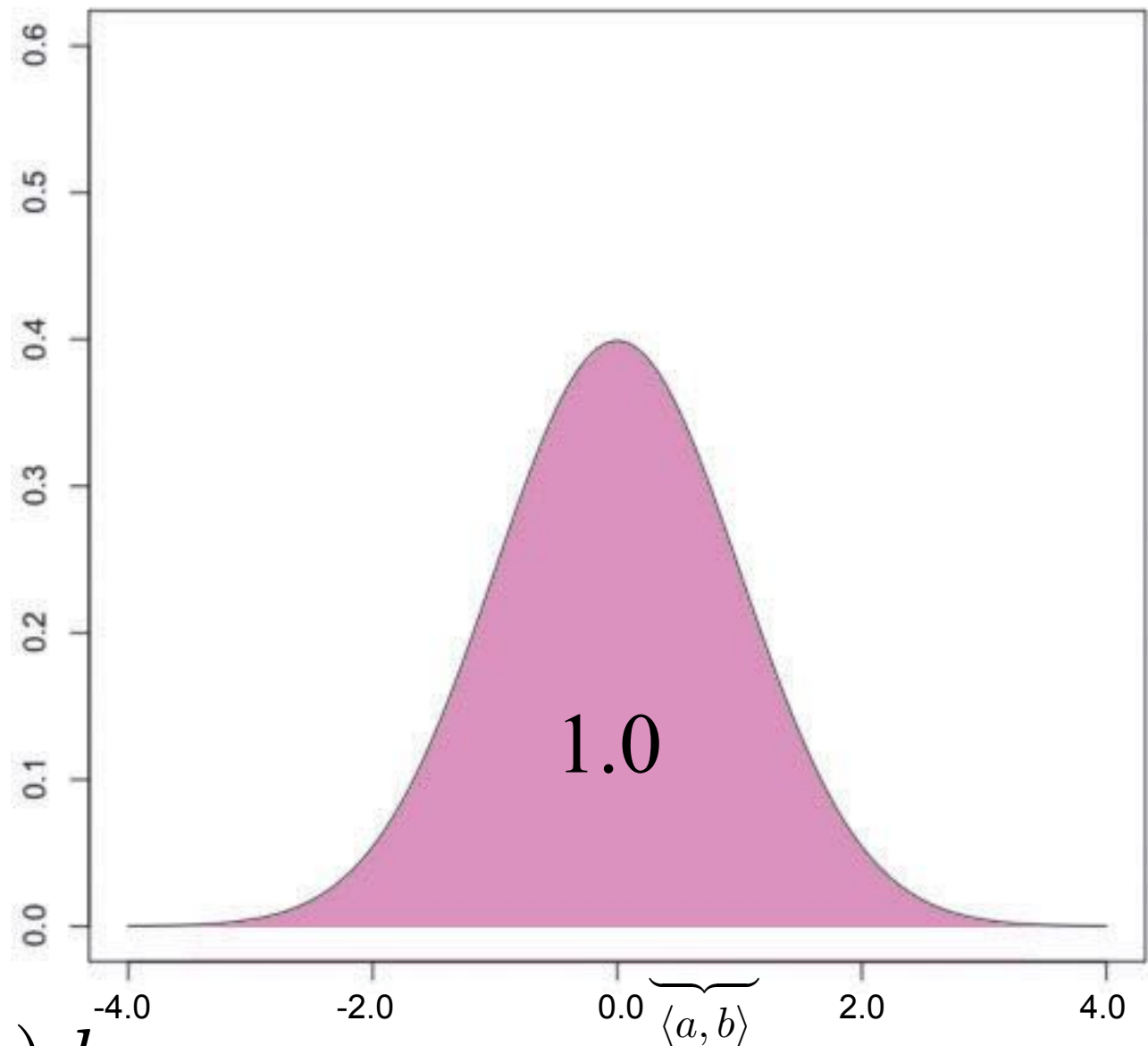
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$
$$x \in \mathbb{R}$$

Standardní normální
rozdělení $N(0,1)$

$$X \sim N(0, 1)$$

$$X \in (-\infty, +\infty)$$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$



Standardizace

$$Y \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow X = \frac{Y - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

Normální (Gaussovo) rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$
$$x \in \mathbb{R}$$

$$X \sim N(0, 1)$$

$$P(-1 \leq X \leq 1) = 0.6826$$

$$P(-2 \leq X \leq 2) = 0.9545$$

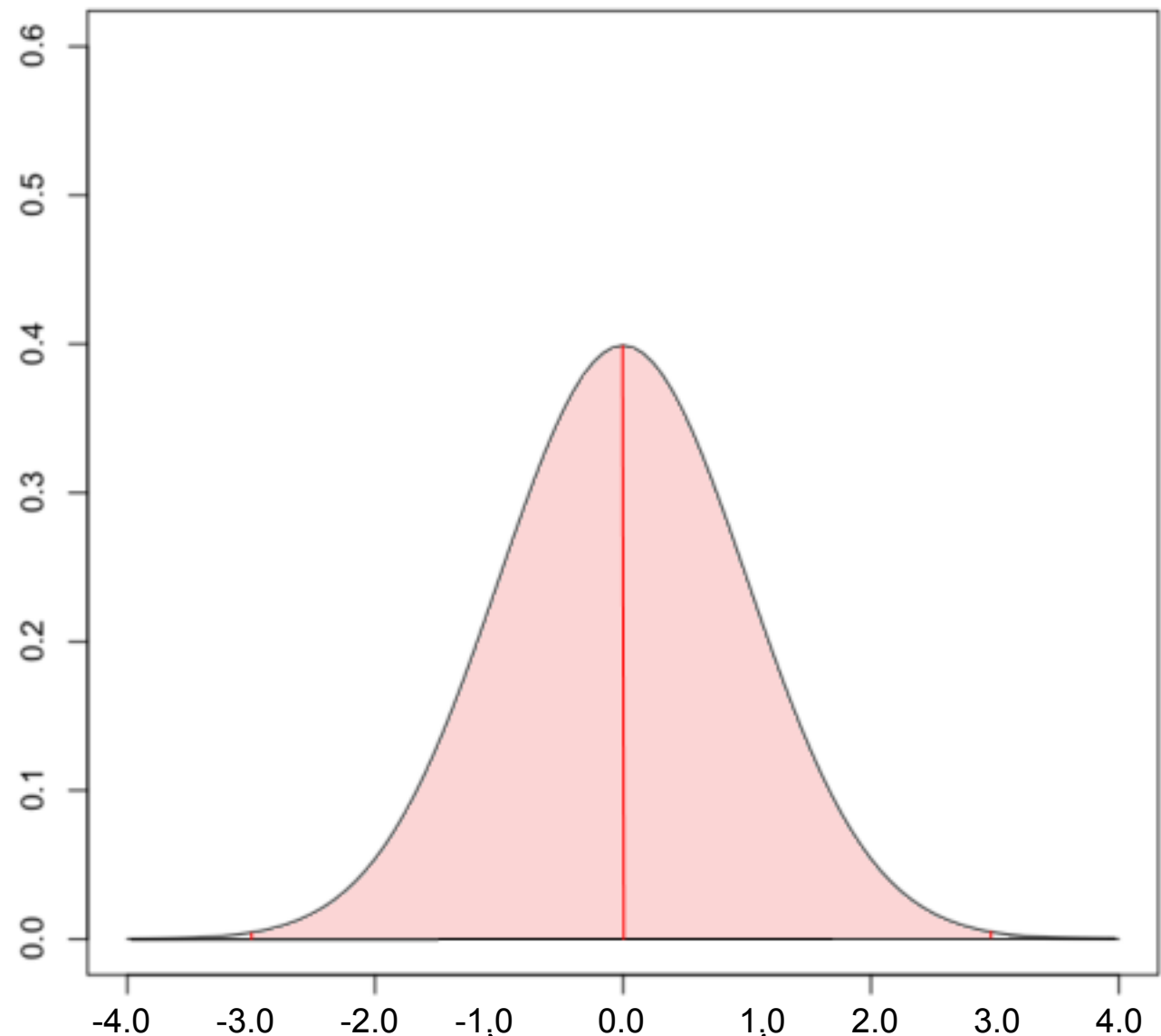
$$P(-3 \leq X \leq 3) = 0.9973$$

$$Y \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$P(\mu - \sigma \leq Y \leq \mu + \sigma) = 0.6826$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq Y \leq \mu + 2\sigma) = 0.9545$$

$$P(\mu - 3\sigma \leq Y \leq \mu + 3\sigma) = 0.9973$$



$$\langle \mu - \sigma, \mu + \sigma \rangle$$

68,26%

$$\langle \mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma \rangle$$

95%

$$\langle \mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma \rangle$$

99.7%

Normální (Gaussovo) rozdělení

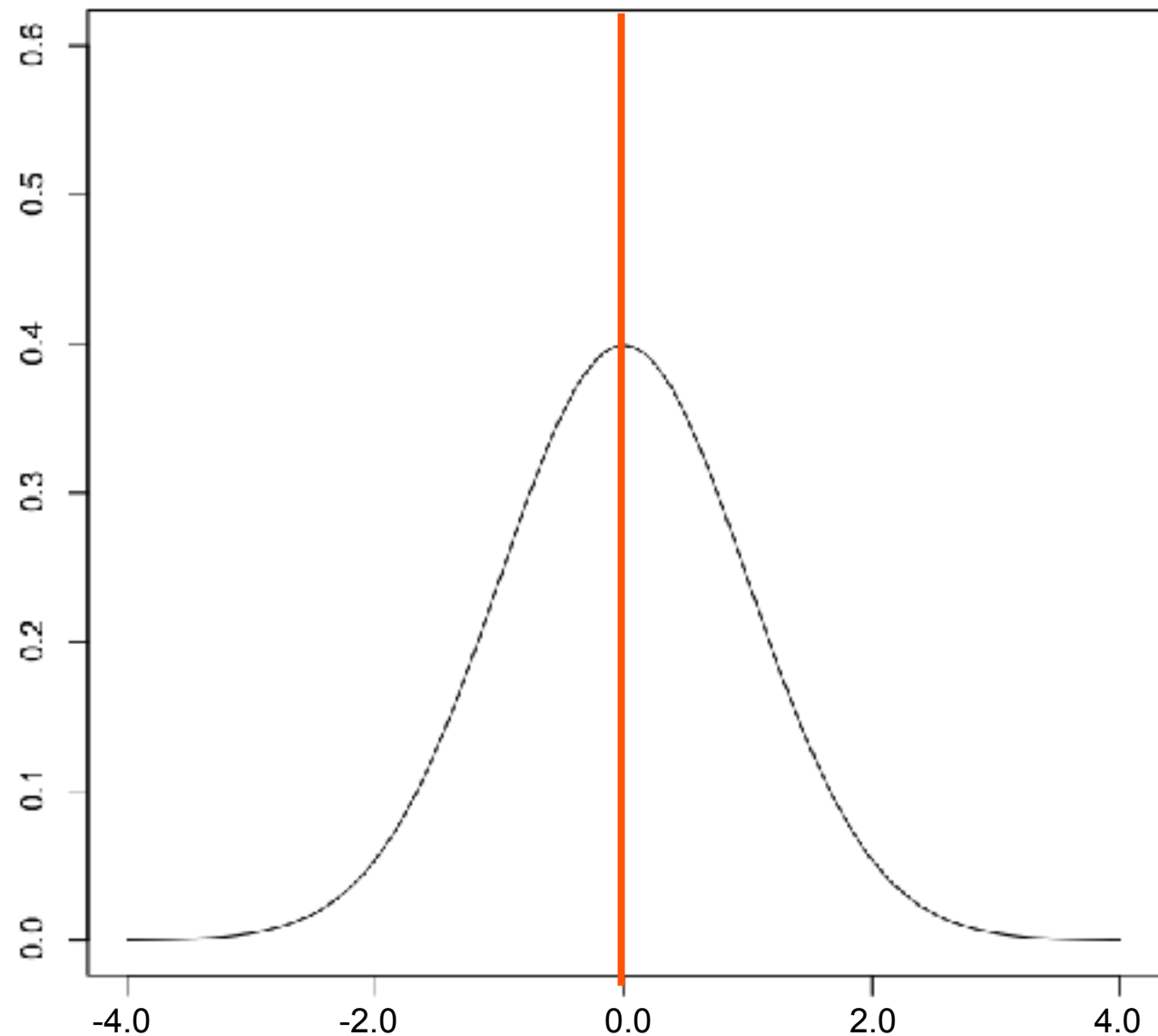
Symetrie:

$$X \sim N(0, 1)$$

$$f(x) = f(-x)$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$f(\mu + x) = f(\mu - x)$$



Normální (Gaussovo) rozdělení

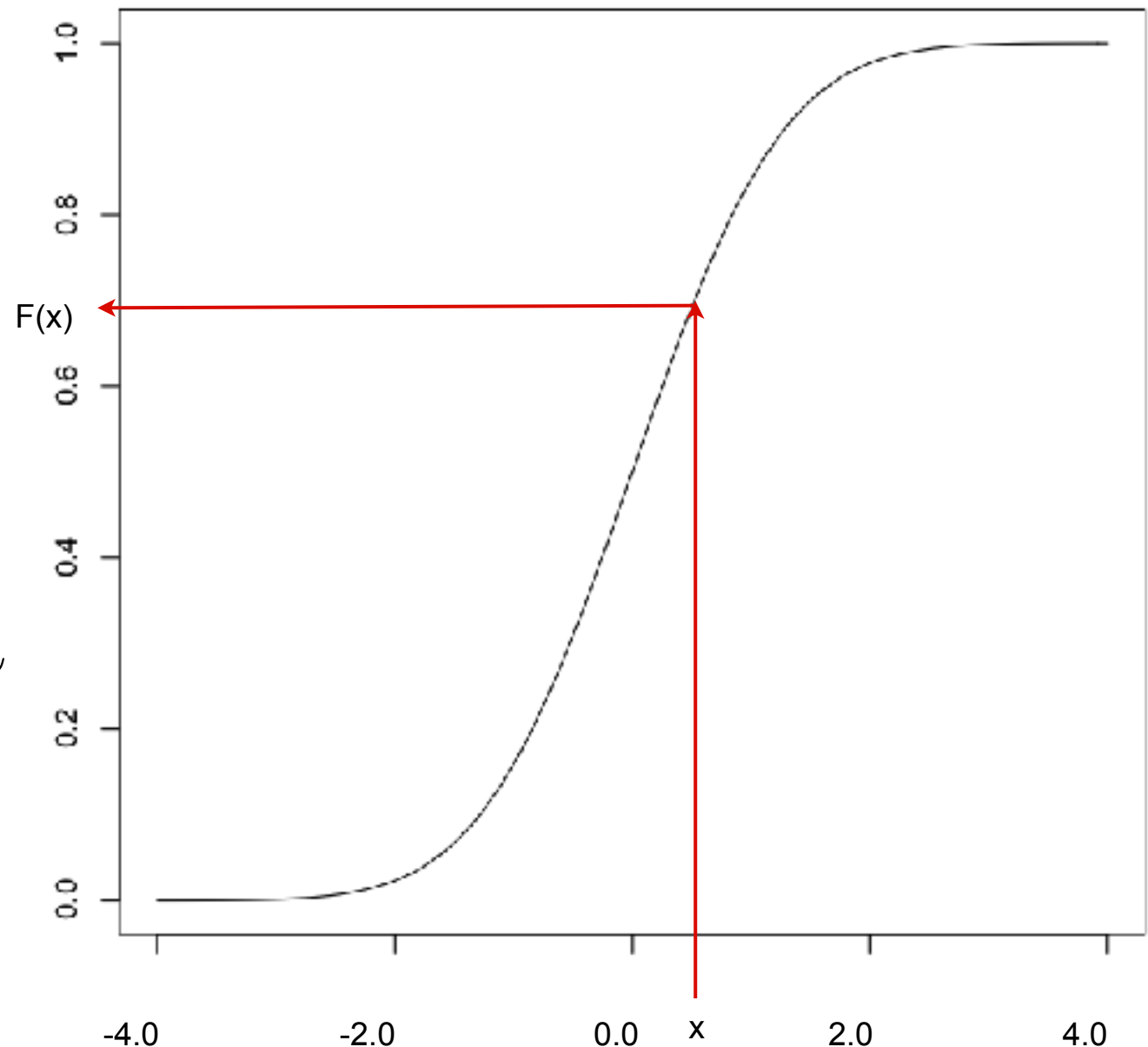
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$
$$x \in \mathbb{R}$$

$$X \sim N(0, 1)$$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

$$\Phi(x) = P(X \leq x)$$

distribuční funkce $N(0,1)$



S jakou pravděpodobností bude hodnota náhodné veličiny X menší než x ?

S jakou pravděpodobností nebude hodnota náhodné veličiny X větší než x ?

S jakou pravděpodobností bude hodnota náhodné veličiny X větší než x ?

$$P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - \Phi(x)$$

Normální (Gaussovo) rozdělení

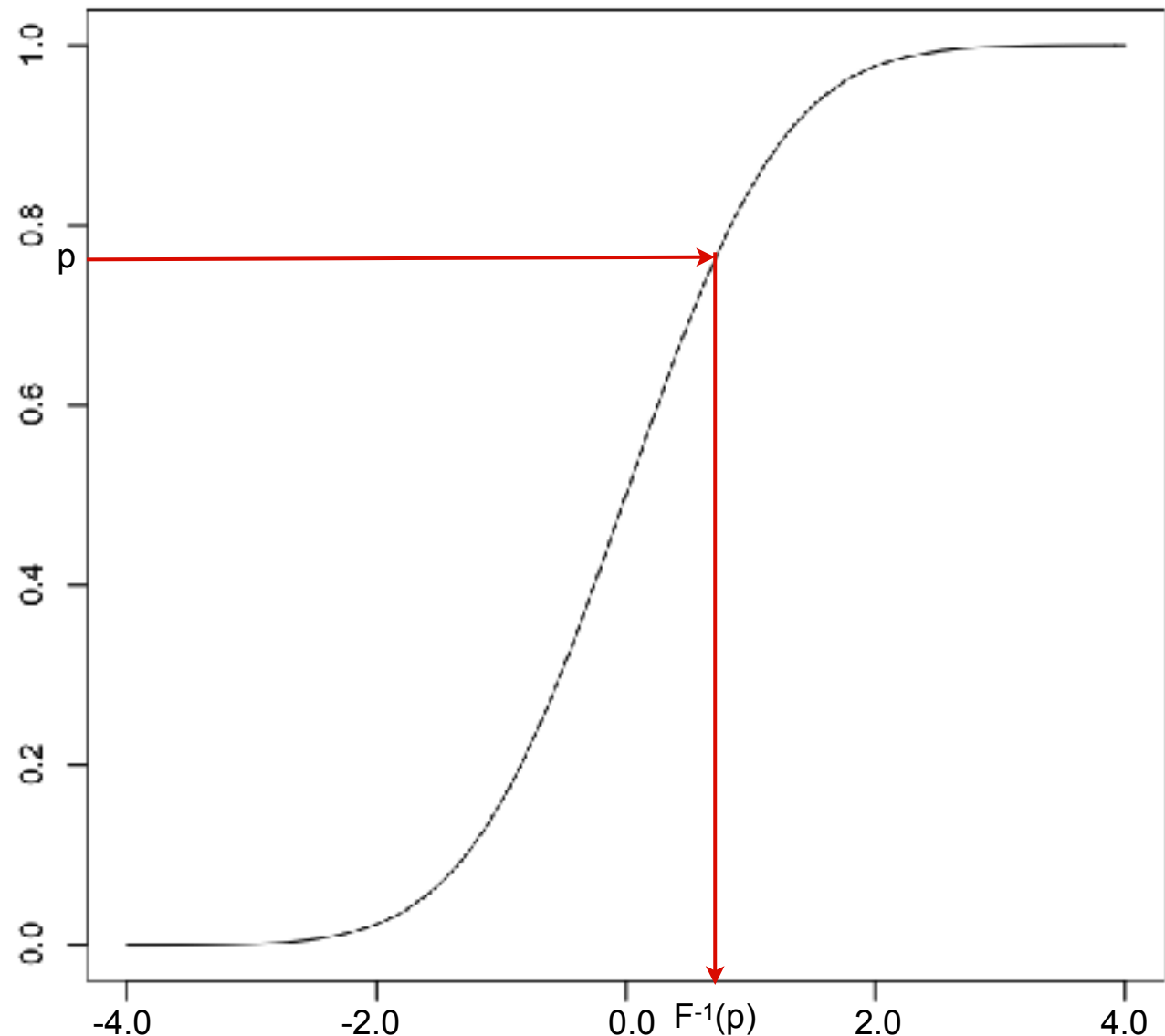
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$
$$x \in \mathbb{R}$$

$$X \sim N(0, 1)$$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

$$\Phi(x) = P(X \leq x)$$

distribuční funkce



Jakou hodnotu náhodná veličina X nepřekročí s pravděpodobností p ?

$$x_p = \Phi^{-1}(p)$$

kvantilová funkce

Jakých hodnot bude náhodná veličina X nabývat s předem danou pravděpodobností p ?

Normální (Gaussovo) rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$
$$x \in R$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

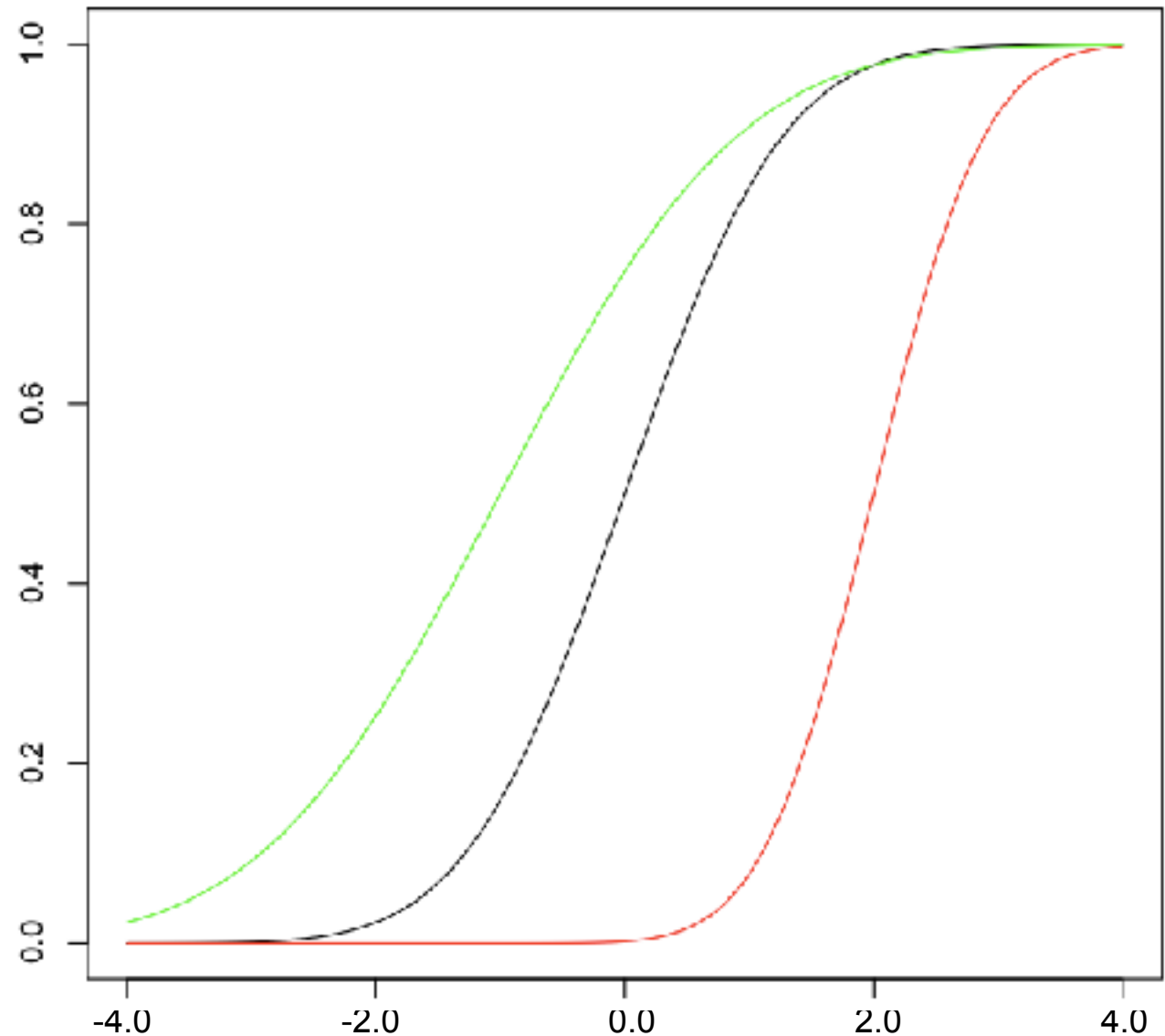
$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

$$F(x) = P(X \leq x)$$

distribuční funkce

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}, \quad x \in R$$

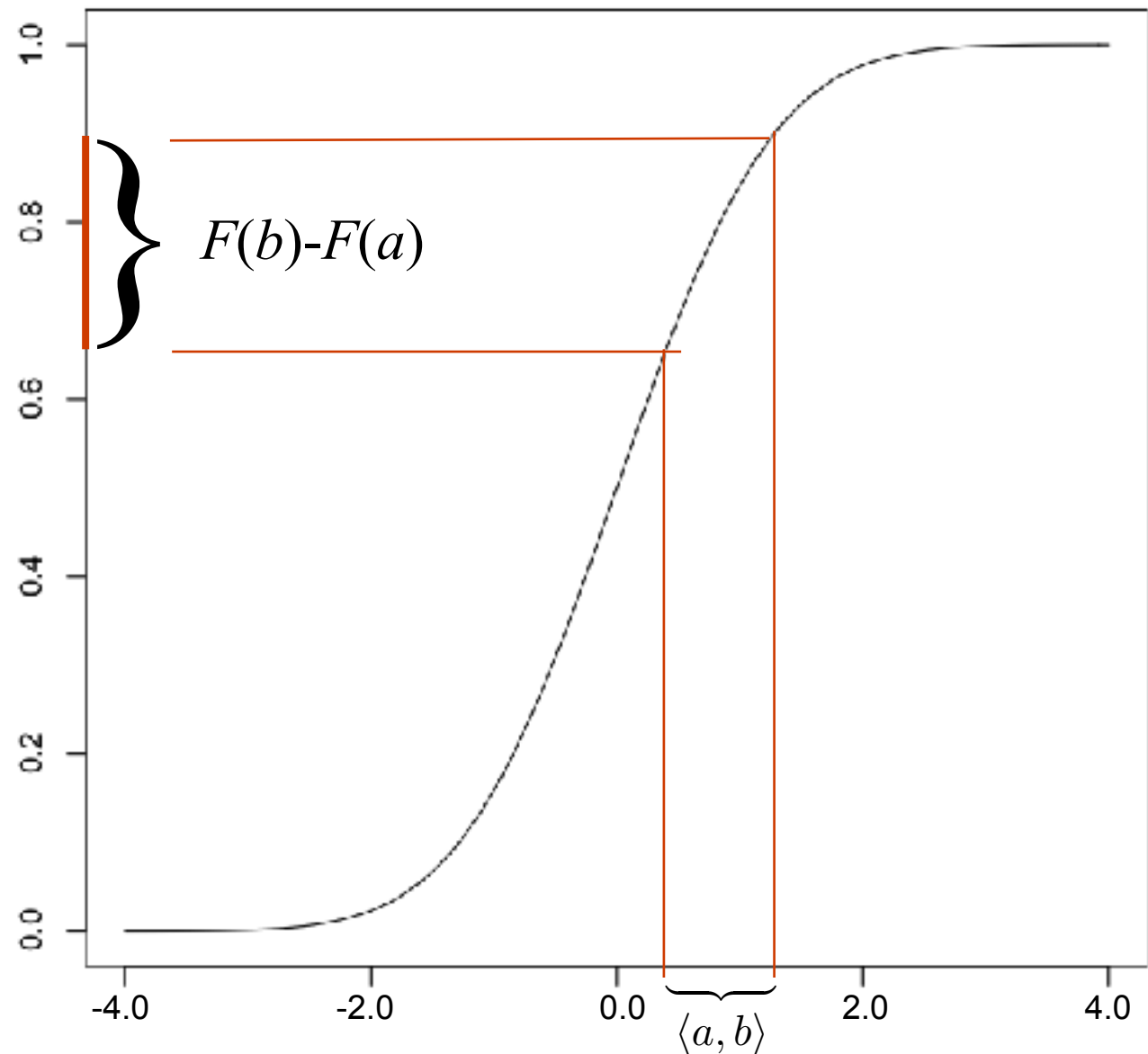


Normální (Gaussovo) rozdělení

S jakou pravděpodobností bude budoucí hodnota náhodné veličiny X v intervalu $\langle a, b \rangle$?

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$
$$= \int_{-\infty}^b f(x) dx - \int_{-\infty}^a f(x) dx$$

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$



Normální (Gaussovo) rozdělení

Symetrie:

$$X \sim N(0, 1)$$

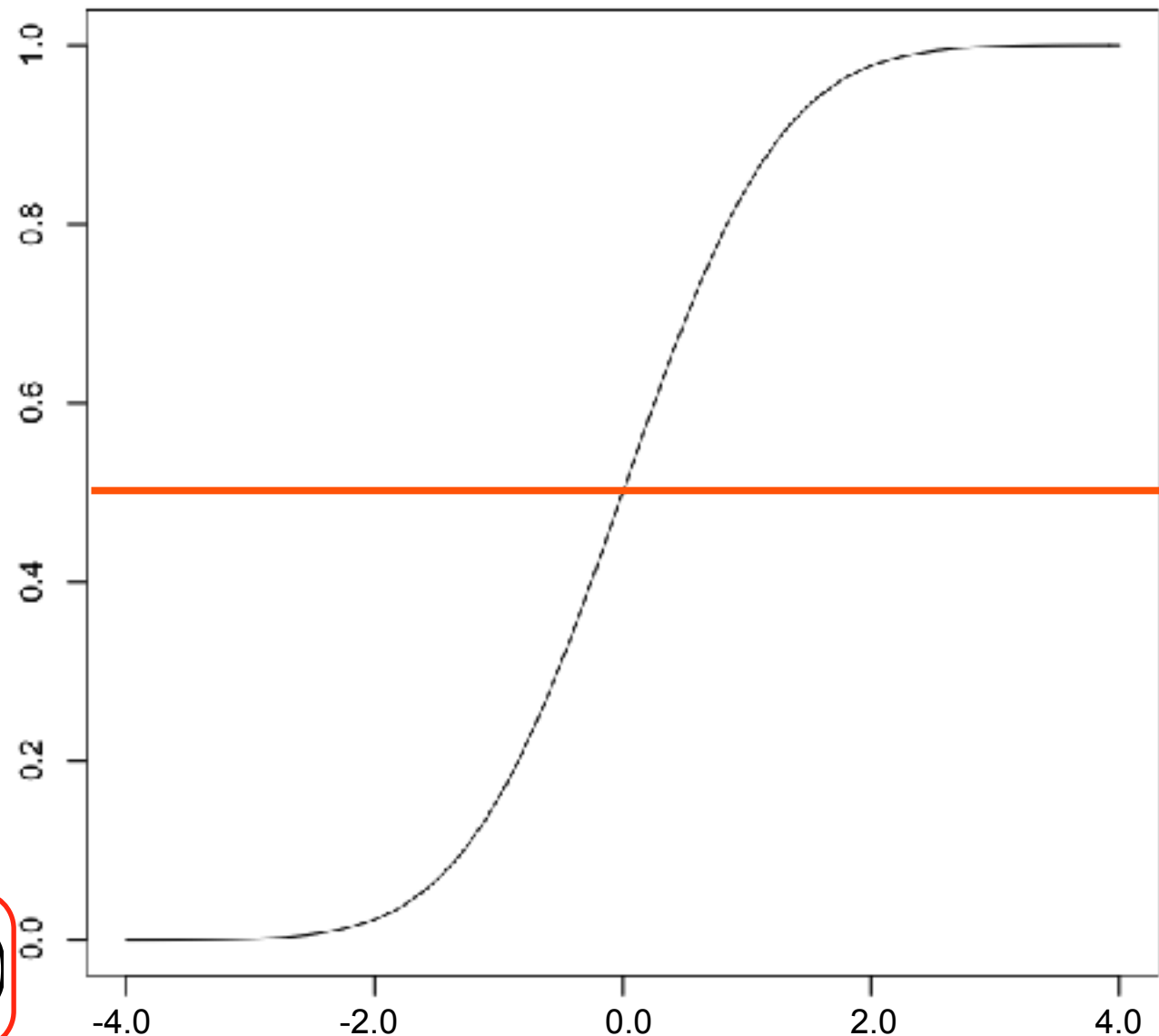
$$f(x) = f(-x)$$

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$f(\mu + x) = f(\mu - x)$$

$$F(\mu + x) = 1 - F(\mu - x)$$



$$P(|X| \leq x) = \Phi(x) - \Phi(-x) = \Phi(x) - (1 - \Phi(x)) = 2\Phi(x) - 1$$

$$P(|X - \mu| \leq x) = F(\mu + x) - F(\mu - x) = \\ F(\mu + x) - (1 - F(\mu + x)) = 2F(\mu + x) - 1$$

Normální (Gaussovo) rozdělení

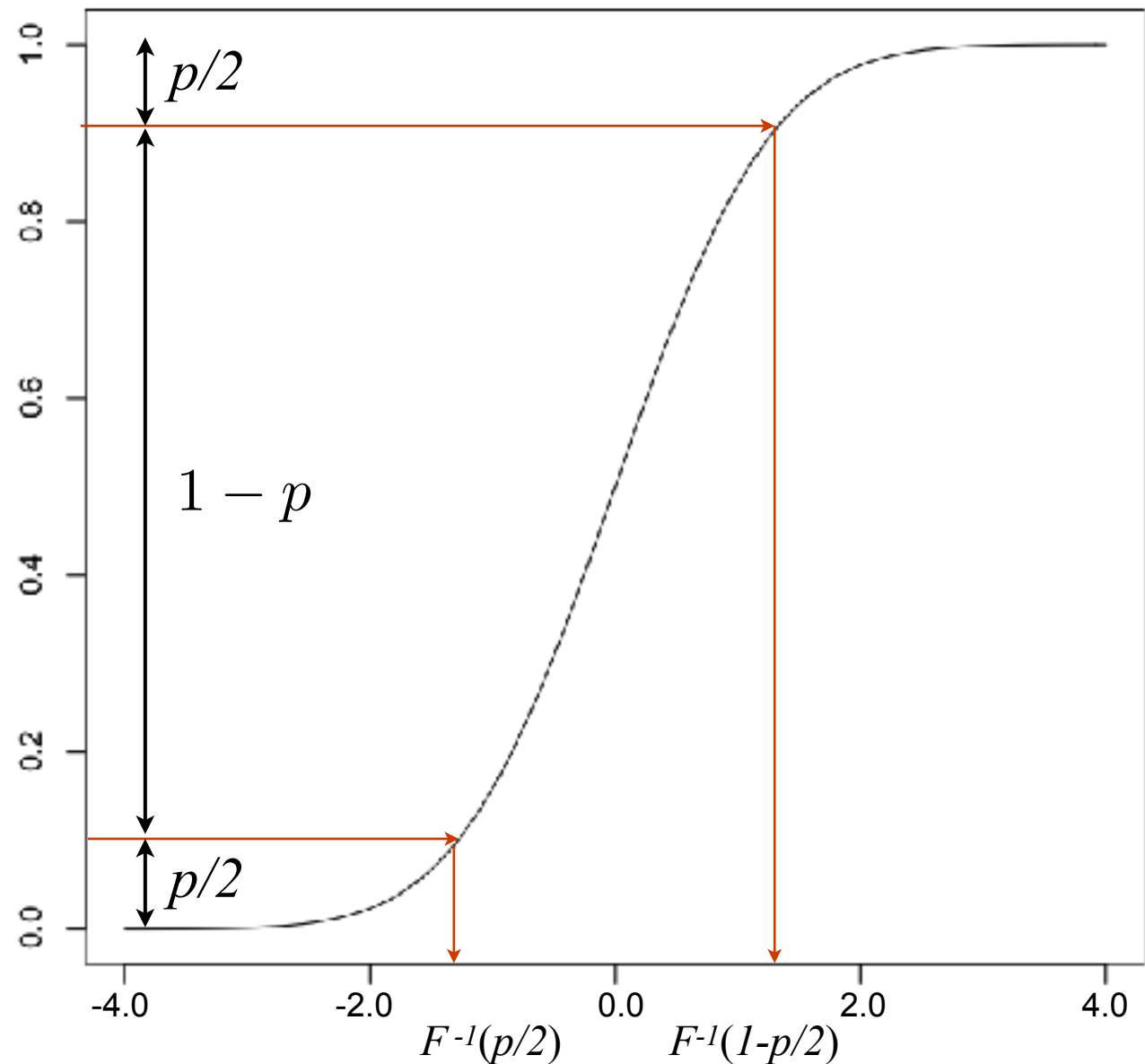
Jakých hodnot kolem střední hodnoty bude náhodná veličina X nabývat s předem danou pravděpodobností $1-p$?

$$P(a \leq X \leq b) = 1 - p$$

$$a = F^{-1}(p/2),$$

$$b = F^{-1}(1 - p/2)$$

$(p/2)$ -kvantil normálního rozdělení a
 $(1-p/2)$ -kvantil normálního rozdělení



Ze symetrie plyne:

$$X \sim N(0, 1) : \quad x_{p/2} = \Phi^{-1}(p/2) = -x_{1-p/2} = -\Phi^{-1}(1 - p/2)$$

$$Y \sim N(\mu, \sigma^2) : \quad y_{p/2} = F^{-1}(p/2) = 2\mu - y_{1-p/2} = 2\mu - F^{-1}(1 - p/2)$$

Normální (Gaussovo) rozdělení

Jaký je vztah mezi $x_{p/2}$ a $y_{p/2}$?

$$X \sim N(0, 1), Y \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$\Rightarrow X = \frac{Y - \mu}{\sigma}$$

$$\Rightarrow Y = \sigma X + \mu$$

$$F(y) = P(Y \leq y) =$$

$$P\left(\frac{Y - \mu}{\sigma} \leq \frac{y - \mu}{\sigma}\right) =$$

$$P\left(X \leq \frac{y - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right)$$

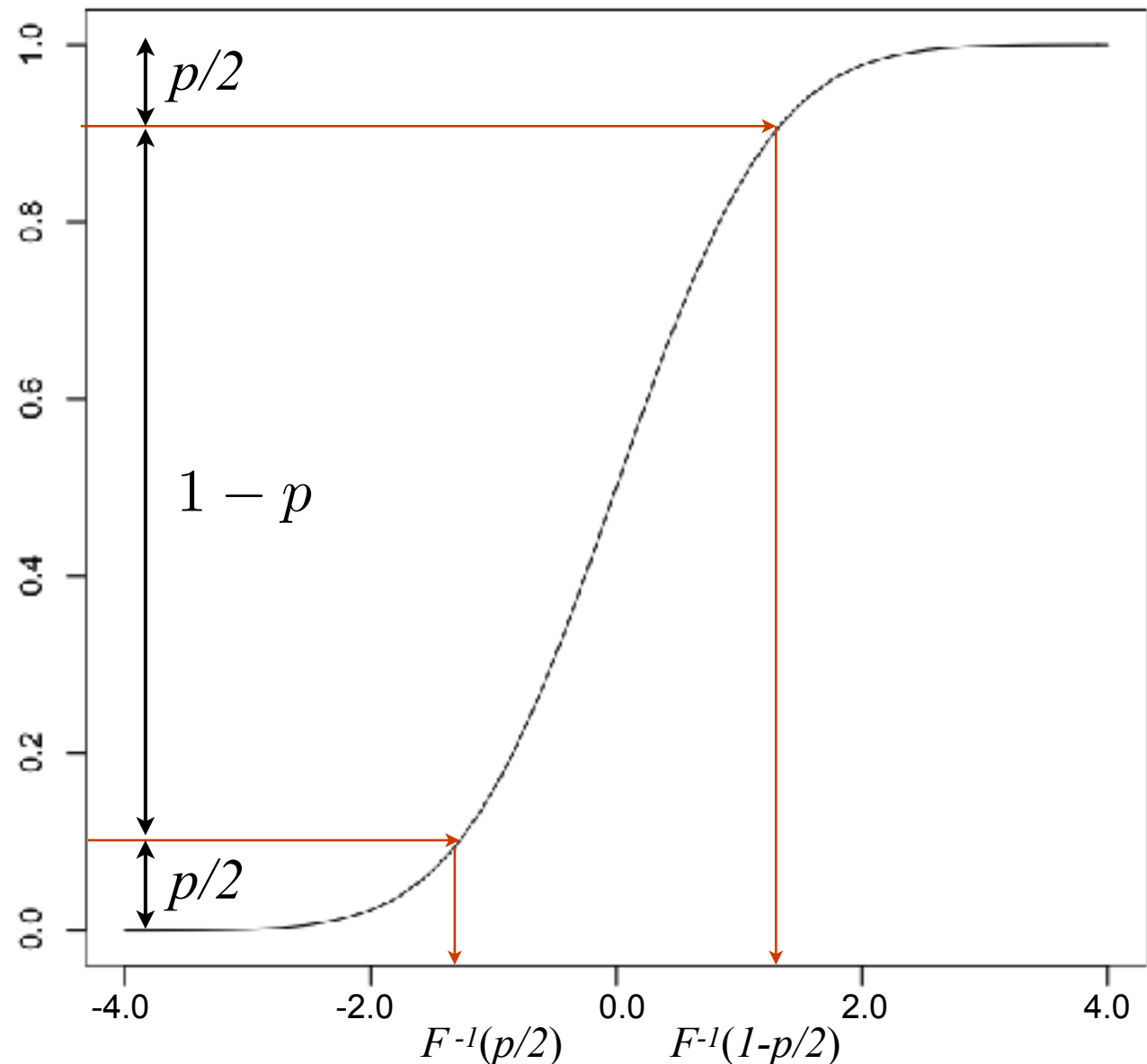
Tedy je:

$$F(y) = \Phi\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right)$$

... a odtud:

$$F^{-1}(p) = \sigma \Phi^{-1}(p) + \mu$$

Vše se prakticky vyjadřuje pouze v tzv. kritických hodnotách: $u_p = \Phi^{-1}(1 - p/2)$



Normální (Gaussovo) rozdělení

Jaký je vztah mezi $x_{p/2}$ a $y_{p/2}$?

... označme tedy

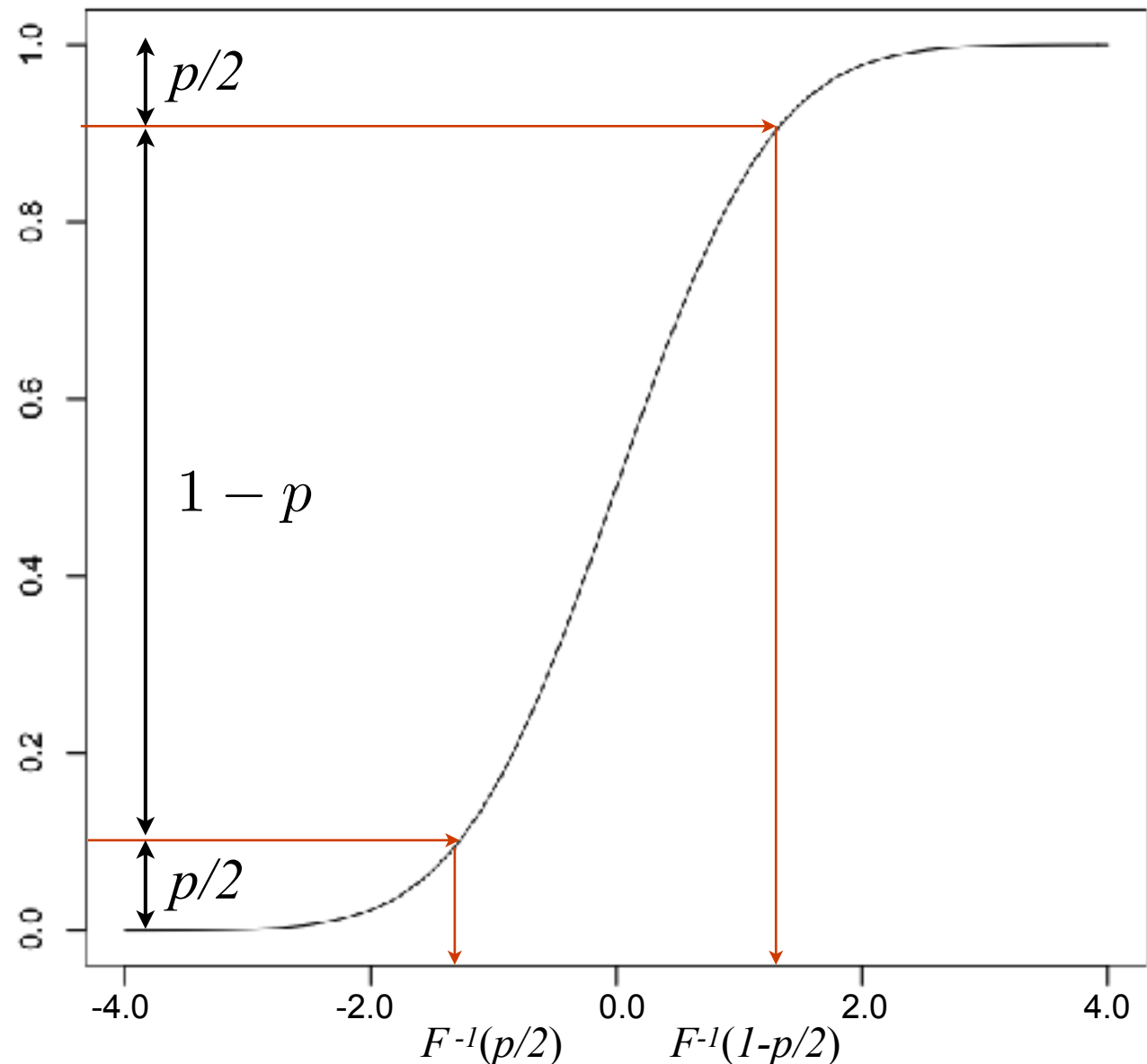
$$\Phi^{-1}(1 - p/2) = u_p$$

... potom

$$\Phi^{-1}(p/2) = -u_p$$

$$F^{-1}(1 - p/2) = \mu + \sigma u_p$$

$$F^{-1}(p/2) = \mu - \sigma u_p$$



Tedy je: $F(y) = \Phi\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right)$

... a odtud: $F^{-1}(p) = \sigma \Phi^{-1}(p) + \mu$

Vše se prakticky vyjadřuje pouze v tzv. kritických hodnotách: $u_p = \Phi^{-1}(1 - p/2)$

Normální (Gaussovo) rozdělení

Jaký je vztah mezi $x_{p/2}$ a $y_{p/2}$?

... označme tedy

$$\Phi^{-1}(1 - p/2) = u_p$$

... potom

$$\Phi^{-1}(p/2) = -u_p$$

$$F^{-1}(1 - p/2) = \mu + \sigma u_p$$

$$F^{-1}(p/2) = \mu - \sigma u_p$$

Tedy pro $\alpha \in (0, 1)$

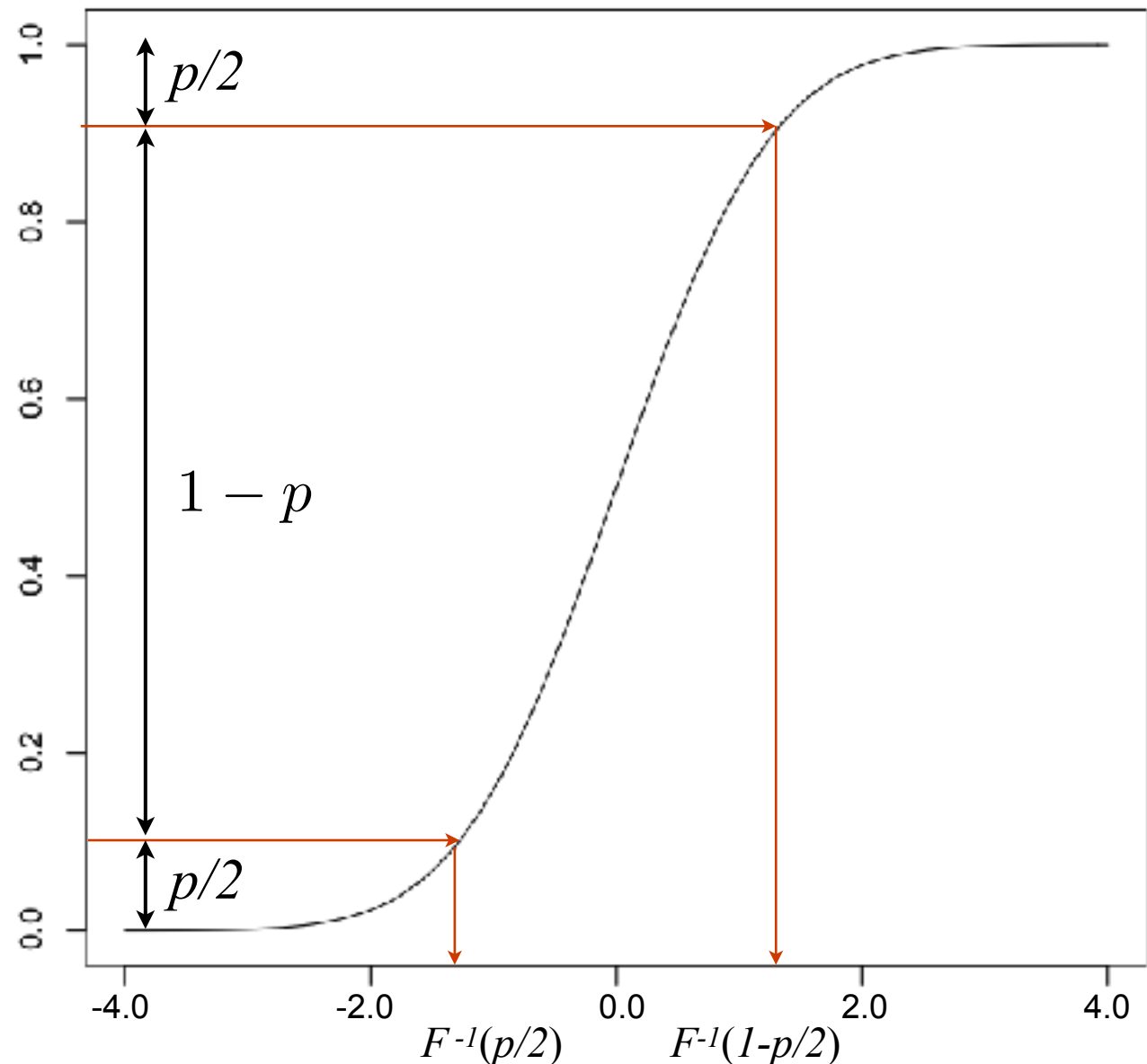
$$X \sim N(0, 1) \Rightarrow$$

$$P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$$

$$Y \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow$$

$$P(\mu - \sigma u_\alpha \leq Y \leq \mu + \sigma u_\alpha) = 1 - \alpha$$

$$P(-u_\alpha \leq \frac{Y - \mu}{\sigma} \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$$



Normální (Gaussovo) rozdělení

Střední hodnota náhodné veličiny X :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Rozptyl náhodné veličiny X :

$$\text{var}(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow E(X) = \mu \quad \text{var}(X) = \sigma^2$$

Jak tyto parametry najít, když máme k dispozici pouze několik měření veličiny X ?

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$$