

Základy pravděpodobnosti a matematické statistiky

6. Náhodný vektor



6. Náhodný vektor

Náhodný vektor Z=(X,Y)

Dvourozměrné rozdělení pravděpodobnosti:
sdružená distribuční funkce $F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$

$$F(x,y) = P(X \leq x \wedge Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y | X \leq x)$$

$$F(x,y) = F(x)F(y|x)$$

Pokud jsou X a Y stochasticky nezávislé, potom je

$$F(x,y) = P(X \leq x \wedge Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y)$$

$$F(x,y) = F(x)F(y)$$

Platí to i opačně: pokud je $F(x,y) = F(x)F(y)$, potom jsou X a Y stochasticky nezávislé.

Spojity náhodný vektor Z=(X,Y)

Jsou-li X a Y spojité náhodné veličiny, potom je i $F(x,y)$ spojitou diferencovatelnou funkcí a její druhou smíšenou parciální derivaci nazýváme sdruženou hustotou náhodného vektoru (X,Y) .

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f(x, y)$$

Objem pod plochou $z = f(x,y)$ určuje pravděpodobnost nad odpovídající oblastí v rovině xy a zřejmě musí platit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

Tedy je

$$P((X, Y) \in W) = \iint_W f(x, y) dx dy$$

Speciálně

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv$$

Spojity náhodný vektor Z=(X,Y)

Jaké je rozdělení pravděpodobnosti složky X ?

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= P(X \leq x \wedge Y \leq \infty) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy dx \\ &= \int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \right) dx = \int_{-\infty}^x f_X(u) du \end{aligned}$$

Hustotu

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

nazýváme marginální hustotou složky X vektoru $Z=(X, Y)$.

Podobně

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

je marginální hustotou složky Y .

Spojity náhodný vektor Z=(X,Y)

Složky X a Y náhodného vektoru $Z=(X,Y)$ jsou stochasticky nezávislé právě když platí jedna z rovností

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

Příklad: Nechť náhodný vektor (X,Y) má rovnoměrné rozdělení na jednotkovém kruhu. Jsou jeho složky X a Y stochasticky nezávislé náhodné veličiny?

$$f(x, y) = \begin{cases} \text{const}, & (x, y) \in K = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\} \\ 0, & \text{jinde} \end{cases}$$

$$\text{const} = \frac{1}{\pi}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} dy = \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle$$

Charakteristiky náhodného vektoru

Střední hodnota náhodného vektoru $Z=(X,Y)$ je rovna vektoru středních hodnot jeho složek: $E(Z) = (EX, EY)$.

$$EX = \sum_i \sum_j x_i p_{ij} = \sum_i x_i \sum_j p_{ij} = \sum_i x_i p_i^X,$$

$$EY = \sum_i \sum_j y_j p_{ij} = \sum_j y_j \sum_i p_{ij} = \sum_j y_j p_j^Y.$$

$$EX = \iint_{R^2} x f(x,y) dx dy = \int_R x \int_R f(x,y) dy dx = \int_R x f^X(x) dx,$$

$$EY = \iint_{R^2} y f(x,y) dx dy = \int_R y \int_R f(x,y) dx dy = \int_R y f^Y(y) dy.$$

Charakteristiky náhodného vektoru

Kovariance $cov(X,Y)$ náhodných veličin X, Y je definována jako

$$cov(X,Y) = E[(X-EX).(Y-EY)] = EXY - EX.EY$$

kde $EXY = \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij}$, $EXY = \iint_{R^2} xy f(x,y) dx dy$.

Jsou-li X a Y stochasticky nezávislé, potom je

$$EXY = \sum_i \sum_j x_i y_j p_i^X p_j^Y = \sum_i x_i p_i^X \sum_j y_j p_j^Y = EX.EY,$$

$$EXY = \iint_{R^2} xy f^X(x) f^Y(y) dx dy = \int_R x f^X(x) dx \int_R y f^Y(y) dy = EX.EY.$$

a tedy

$$cov(X, Y) = EXY - EX.EY = EX.EY - EX.EY = 0.$$

Charakteristiky náhodného vektoru

Korelační koeficient $\rho(X,Y)$ náhodných veličin X, Y je roven

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}$$

Je-li $\rho(X, Y) = 0$ t, říkáme, že X a Y jsou nekorelované.

Kovarianční matice náhodného vektoru $Z=(X, Y)$ má tvar

$$D(X, Y) = \begin{pmatrix} \text{Var}(X) & \text{cov}(X, Y) \\ \text{cov}(Y, X) & \text{Var}(Y) \end{pmatrix}$$

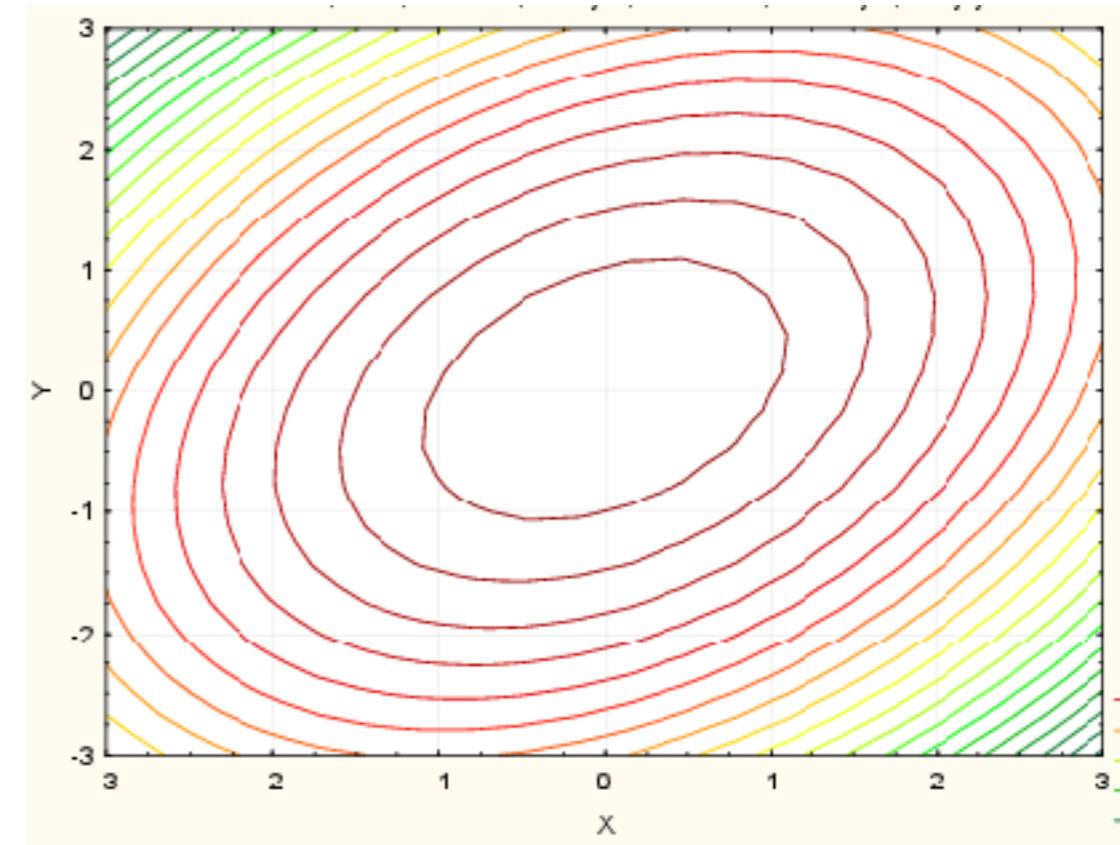
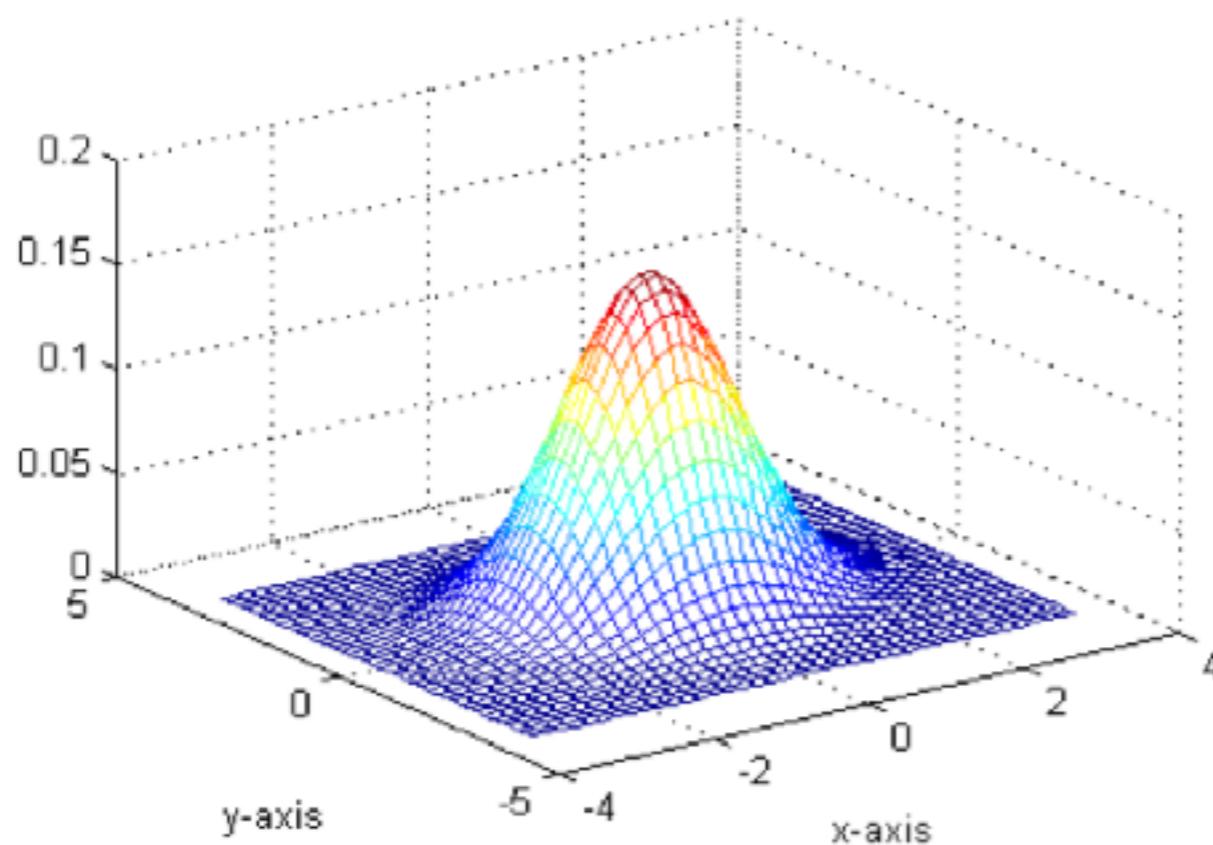
Korelační matice náhodného vektoru $Z=(X, Y)$ má tvar

$$R(X, Y) = \begin{pmatrix} 1 & \rho(X, Y) \\ \rho(Y, X) & 1 \end{pmatrix}$$

Dvourozměrné normální rozdělení

Náhodný vektor (X, Y) má dvourozměrné normální rozdělení se střední hodnotou (μ_1, μ_2) a kovarianční maticí $D = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$ je-li jeho dvourozměrná hustota rovna

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)}$$



Dvouzměrné normální rozdělení

Úloha: Při měření dvou rozměrů součástky má chyba (X, Y) dvouzměrné normální rozdělení s nezávislými složkami, nulovým vektorem středních hodnot a stejnými rozptyly σ^2 . Vypočtěte střední hodnotu tedy s hustotou a rozptyl celkové velikosti chyby dané náhodnou veličinou $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

$$E(Z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} Z(x, y) f(x, y) dx dy$$

V tomto případě pro $x, y \in \mathbf{R}^2$ dostíváme

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$$

Dvourozměrné normální rozdělení

Úloha: Při měření dvou rozměrů součástky má chyba (X, Y) dvourozměrné normální rozdělení s nezávislými složkami, nulovým vektorem středních hodnot a stejnými rozptyly σ^2 .

Vypočtěte střední hodnotu tedy s hustotou a rozptyl celkové velikosti chyby dané náhodnou veličinou $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

$$E(Z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} Z(x, y) f(x, y) dx dy$$

V tomto případě pro $x, y \in \mathbf{R}^2$ dostíváme

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \quad \text{a tedy} \quad E(Z) = \iint \frac{1}{2\pi\sigma^2} \sqrt{x^2 + y^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} dx dy$$

$$\left[\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r^2 e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr d\theta$$

Dvourozměrné normální rozdělení

Řešení: Počítáme i -tý obecný moment Z : je $Z^i = (X^2 + Y^2)^{\frac{i}{2}}$, tedy

$$EZ^i = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int \int_R^2 (x^2 + y^2)^{\frac{i}{2}} e^{\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} dx dy.$$

Substitucí $x = r\cos\beta, y = r\sin\beta$, jejíž Jakobián je r , dostaváme

$$EZ^i = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^{2\pi} d\beta \int_0^\infty r^{i+1} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr$$

a s použitím další substituce $t = \frac{r^2}{2\sigma^2}$

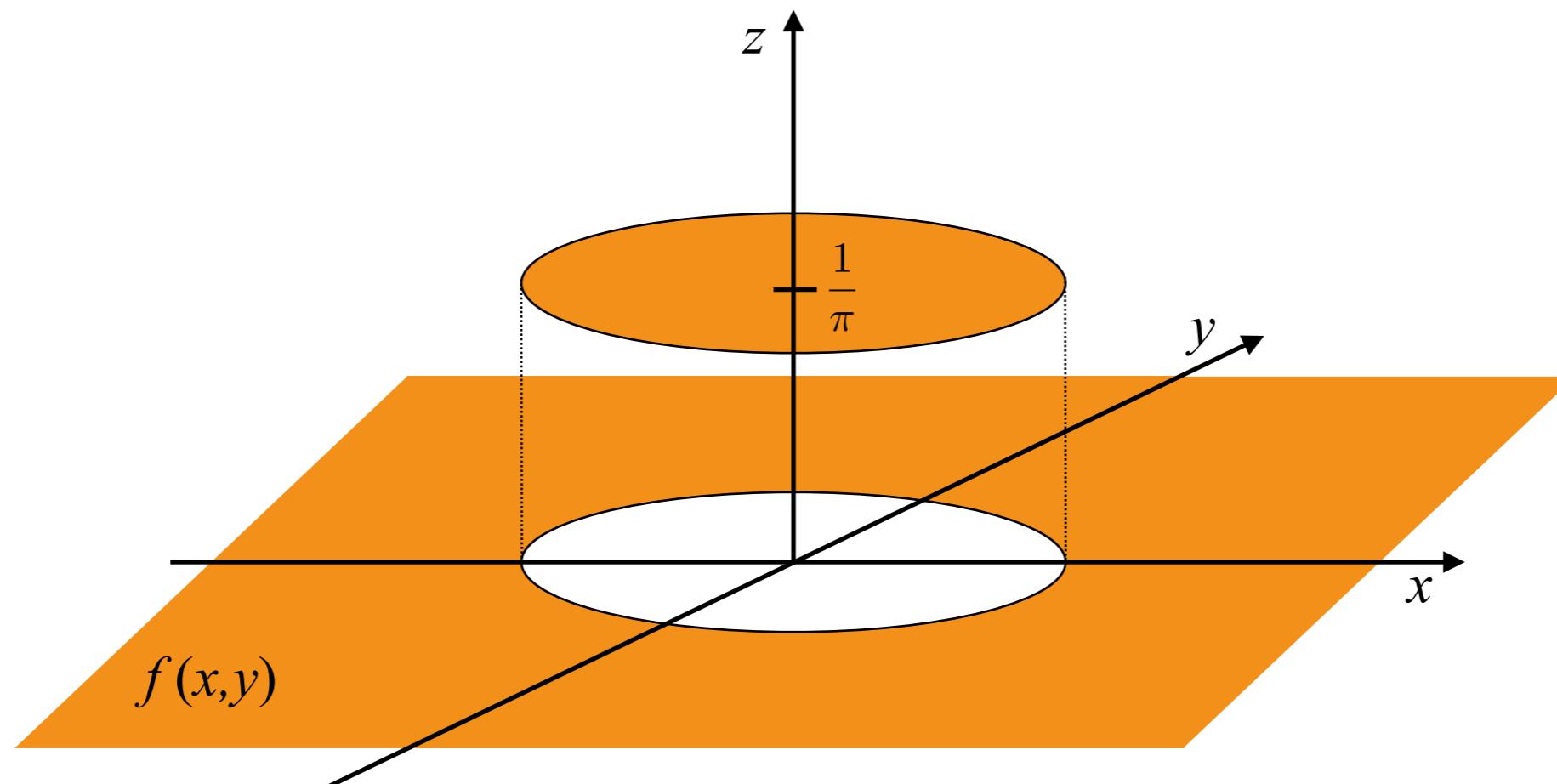
$$EZ^i = \sigma^i \int_0^\infty (2t)^{\frac{i}{2}} e^{-t} dt = \left(\sigma\sqrt{2}\right)^i \Gamma\left(\frac{i}{2} + 1\right).$$

Odsud specielně plyne $EZ = \sigma\sqrt{2}\Gamma(\frac{3}{2}) = 1,253\sigma$. Pomocí druhého obecného momentu $EZ^2 = 2\sigma^2\Gamma(2)$ je rozptyl $VarZ = EZ^2 - (EZ)^2 = 0,429\sigma^2$.

Spojitý náhodný vektor Z=(X,Y)

Příklad: Nechť náhodný vektor (X,Y) má rovnoměrné rozdělení na jednotkovém kruhu. Jsou jeho složky X a Y stochasticky nezávislé náhodné veličiny?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & (x, y) \in K = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\} \\ 0, & \text{jinde} \end{cases}$$



Spojity náhodný vektor Z=(X,Y)

Příklad: Nechť náhodný vektor (X,Y) má rovnoměrné rozdělení na jednotkovém kruhu. Jsou jeho složky X a Y stochasticky nezávislé náhodné veličiny?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & (x, y) \in K = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\} \\ 0, & \text{jinde} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} dy = \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle$$

=> složky X a Y jsou stochasticky závislé

$$\text{cov}(X, Y) = ? = E(X - EX)(Y - EY) = EXY - EXEY$$

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x, y) dx dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} x dx dy = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} = 0 = EY$$

$$EXY = \frac{1}{\pi} \iint_K xy dx dy = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 x \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} y dy \right) dx = 0$$

$$\Rightarrow \text{cov}(X, Y) = 0$$

=> složky X a Y jsou nekorelované

Spojitý náhodný vektor Z=(X,Y)

Příklad: Nechť náhodný vektor (X,Y) má rovnoměrné rozdělení na jednotkovém kruhu. Jsou jeho složky X a Y stochasticky nezávislé náhodné veličiny?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & (x, y) \in K = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\} \\ 0, & \text{jinde} \end{cases}$$

$$EZ = (EX, EY) = (0, 0) \quad \text{cov}(X, Y) = 0 \quad \text{var}(X), \text{ var}(Y)?$$

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= EX^2 - (EX)^2 = EX^2 = \frac{1}{\pi} \iint_K x^2 dx dy \quad \left| \begin{array}{l} x = r \cos \phi, \\ y = r \sin \phi, \\ J = r \end{array} \right| \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^3 \cos^2 \phi d\phi dr = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^1 r^3 dr \right) \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi \right) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\text{var}(Y) = \frac{1}{4}$$

$$D(X, Y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Spojitý náhodný vektor Z=(X,Y)

Příklad: Nechť náhodný vektor (X,Y) má rovnoměrné rozdělení nad čtvercem M. Jsou jeho složky X a Y stochasticky nezávislé náhodné veličiny? Jsou korelované?

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & (x,y) \in M = \{(x,y) : |x| \leq 1, |y| \leq 1\} \\ 0, & \text{jinde} \end{cases}$$

