Pravděpodobnost a matematická statistika

prof. RNDr. Gejza Dohnal, CSc.
dohnal@nipax.cz

VII. Náhodné procesy

https://sms.nipax.cz/pas

Náhodné procesy

Uvažujme funkci dvou proměnných $X(\omega,t) = X_t(\omega)$:

$$X : \Omega \times R \longrightarrow R$$

Systém konečněrozměrných distribučních funkcí:

$$F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = P(X_{t_1} \le x_1, \dots, X_{t_n} \le x_n)$$

symetrie: $F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = F(x_{j_1}, \dots, x_{j_n}; t_{j_1}, \dots, t_{j_n})$

pro libovolnou permutaci $(j_1,\dots,j_n)$ čísel $(1,\dots,n)$

(nezáleží na pořadí)

konzistence: $\lim\limits_{x_n \to \infty} F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = F(x_1, \dots, x_{n-1}; t_1, \dots, t_{n-1})$

funkce střední hodnoty: $\mu_t = E(X_t),\ t \in R$

autokovarianční funkce: $c(s,t) = Cov(X_s, X_t) = E(X_s X_t) - E(X_s)E(X_t)$

autokorelační funkce: $r(s,t) = \rho(s,t) = \dfrac{Cov(X_s, X_t)}{\sqrt{Var(X_s)Var(X_t)}}$

Náhodné procesy

Náhodný proces $X_t, t \in R$ je *kovariančně (slabě) stacionární,* pokud je $\mu_t = \mu,\ t \in R$ a platí $c(s,t) = c(t-s)$ pro všechna s a t.

Náhodný proces $X_t, t \in R$ je *silně stacionární,* pokud pro libovolnou n-tici $t_1, \ldots, t_n$ a libovolné $\delta > 0$ platí

$$F(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = F(x_1, \ldots, x_n; t_1 + \delta, \ldots, t_n + \delta)$$

Náhodný proces $X_t, t \in R$ má *nezávislé (nekorelované) přírůstky,* pokud pro libovolnou čtveřici časů $s_1,\ t_1,\ s_2,\ t_2$ jsou náhodné veličiny $(X_{t_1} - X_{s_1}),\ (X_{t_2} - X_{s_2})$ stochasticky nezávislé (nekorelované).

Náhodné procesy

Příklady náhodných procesů:

1) Poissonův proces N_t:
   - $N_0=0$
   - má nezávislé přírůstky ((N_t - N_s) a (N_u-N_v) jsou stoch. nezávislé)
   - (N_t - N_s) má Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda(t-s)$.

2) Standardní Wienerův proces $\{W_t, t \geq 0\}$:
   - $P(W_0=0)=1$ (skoro jistě)
   - má nezávislé přírůstky, tj. pro libovolné $0 \leq t_1 < \ldots < t_n$ jsou $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ stoch. nezávislé náh. vel.
   - (W_t - W_s) má normální rozdělení $N(0, \sigma^2|t-s|)$.

3) Obecný Wienerův proces $\{W_t, t \geq 0\}$ (s driftem):
   - $P(W_0=0)=1$ (skoro jistě)
   - má nezávislé přírůstky, tj. pro libovolné $0 \leq t_1 < \ldots < t_n$ jsou $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ stoch. nezávislé náh. vel.
   - (W_t - W_s) má normální rozdělení $N(\mu(t-s), \sigma^2|t-s|)$.

Náhodné procesy

Ukažte, že pro standardní Wienerův proces $\{W(t),\, t \geq 0\}$ jsou následující procesy opět standardní Wienerovy procesy:

1) $X_t = cW(t/c^2), \quad t \geq 0, \;\; c > 0$

2) $Y_t = W(t+h) - W(h), \quad t \geq 0, \;\; h > 0$

3) $Z_t = tW(1/t), \quad t > 0, \;\; h > 0$
$Z_0 = 0$

Markovské procesy

Náhodný proces $\{X_t,\ t \in T\}$ se stavy v množině H splňuje tzv. Markovskou vlastnost, jestliže platí

$$P(X_{t_n} = x_n \,|\, X_{t_{n-1}} = x_{n-1},\, X_{t_{n-2}} = x_{n-2},\, \ldots,\, X_{t_{n-k}} = x_{n-k}) = \\ P(X_{t_n} = x_n \,|\, X_{t_{n-1}} = x_{n-1}) = p(t_{n-1}, t_n; x_{n-1}, x_n)$$

pro libovolné časy $0 \le t_{n-k} < \ldots < t_n$ a hodnoty $x_\mathrm{n}, \ldots, x_{n-k} \in H$.

Rozlišujeme:

- procesy v diskrétním čase (řetězce, posloupnosti), $T=N$
- procesy ve spojitém čase, $T=R^+$
- procesy s konečně mnoha diskrétními stavy $H=\{1,2,\ldots,m\}$
- procesy s nekonečně mnoha diskrétními stavy $H=\{1,2,\ldots\}$
- procesy se spojitými stavy $H \subset R$
- .....

Markovské řetězce

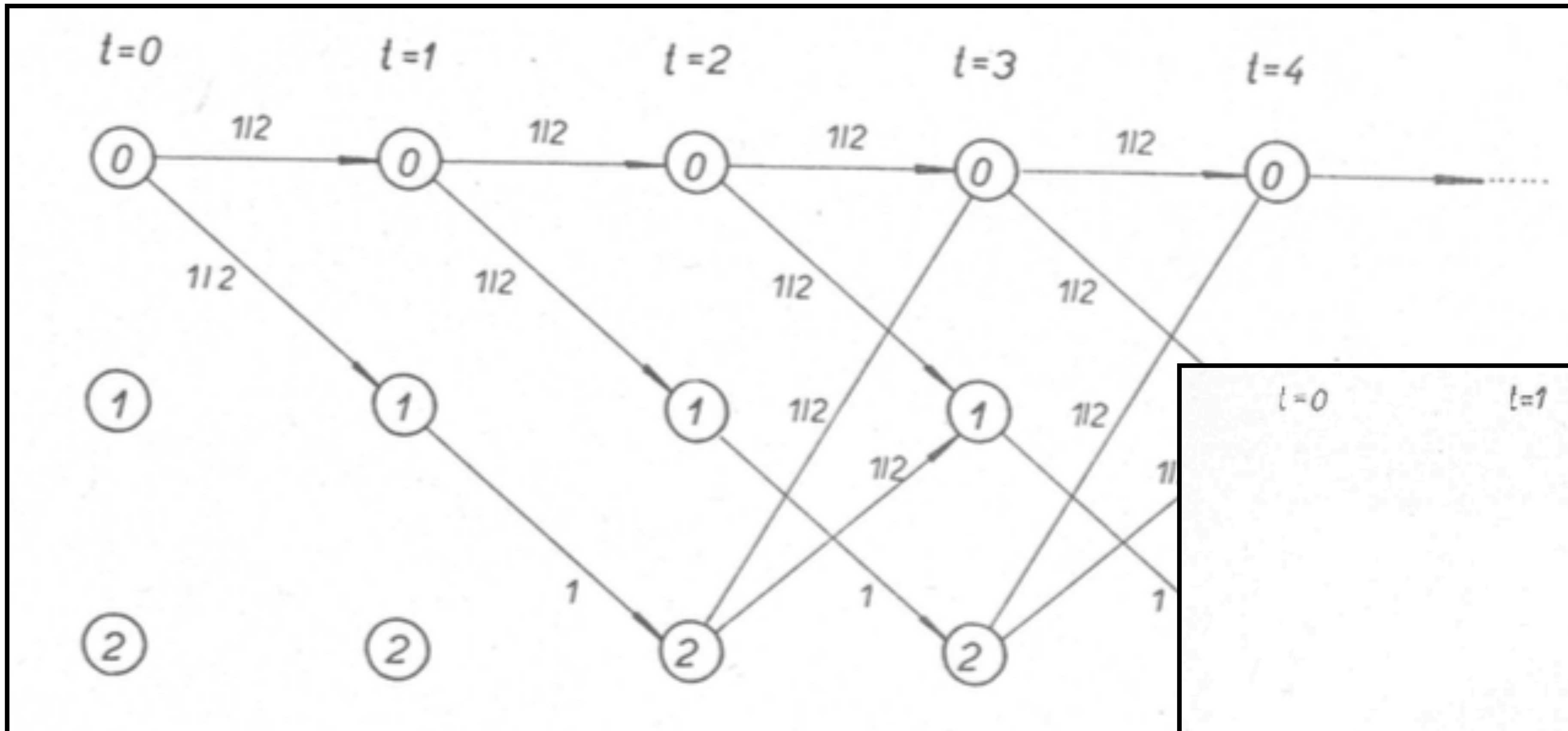
Náhodný proces $\{X_t,\ t \in N\}$ v diskrétním čase se spočetně mnoha stavy splňuje Markovskou vlastnost, jestliže platí

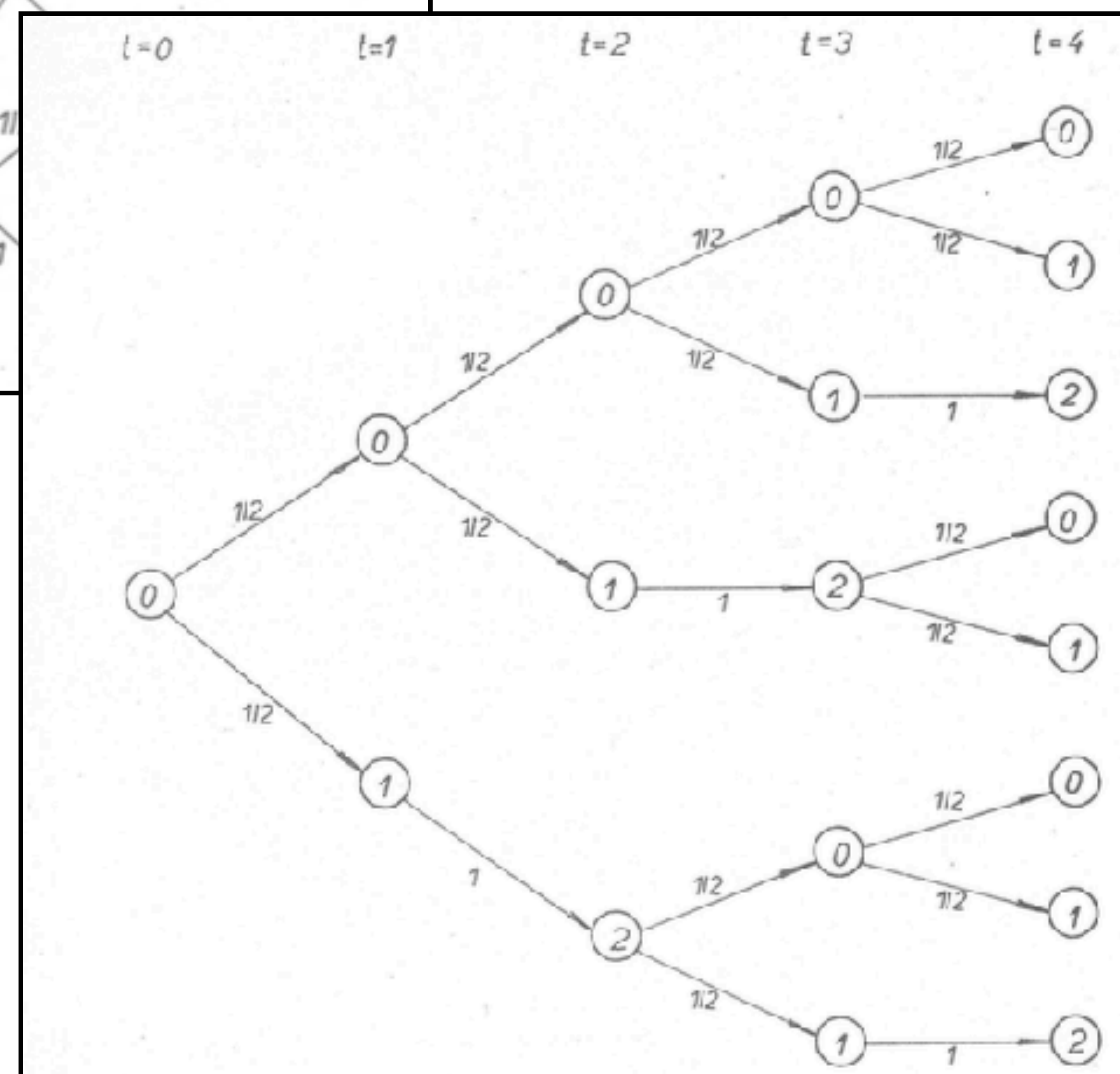
$$P(X_n = i \,|\, X_{n-1} = j,\, X_{n-2} = j_2,\, \ldots,\, X_{n-k} = j_k) =$$
$$P(X_n = i \,|\, X_{n-1} = j) = p(i, j; n, n-1) = p_{i,j}(n)$$

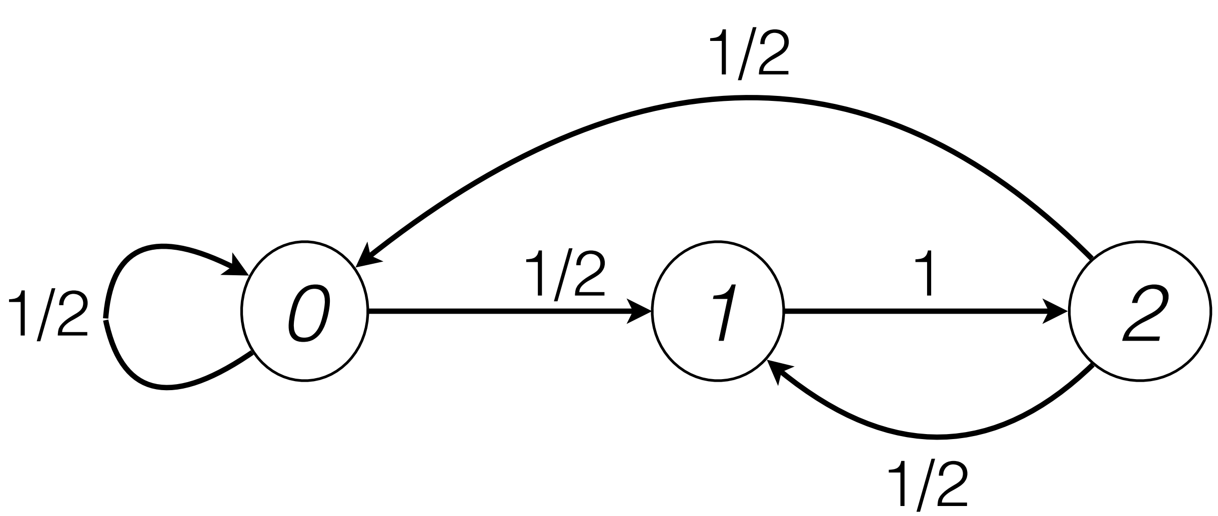
pro libovolné časy $0 \leq n\text{-}k < \ldots < n$ a stavy $i, j, j_2, \ldots, j_k$.

- jedná se o Markovský řetězec

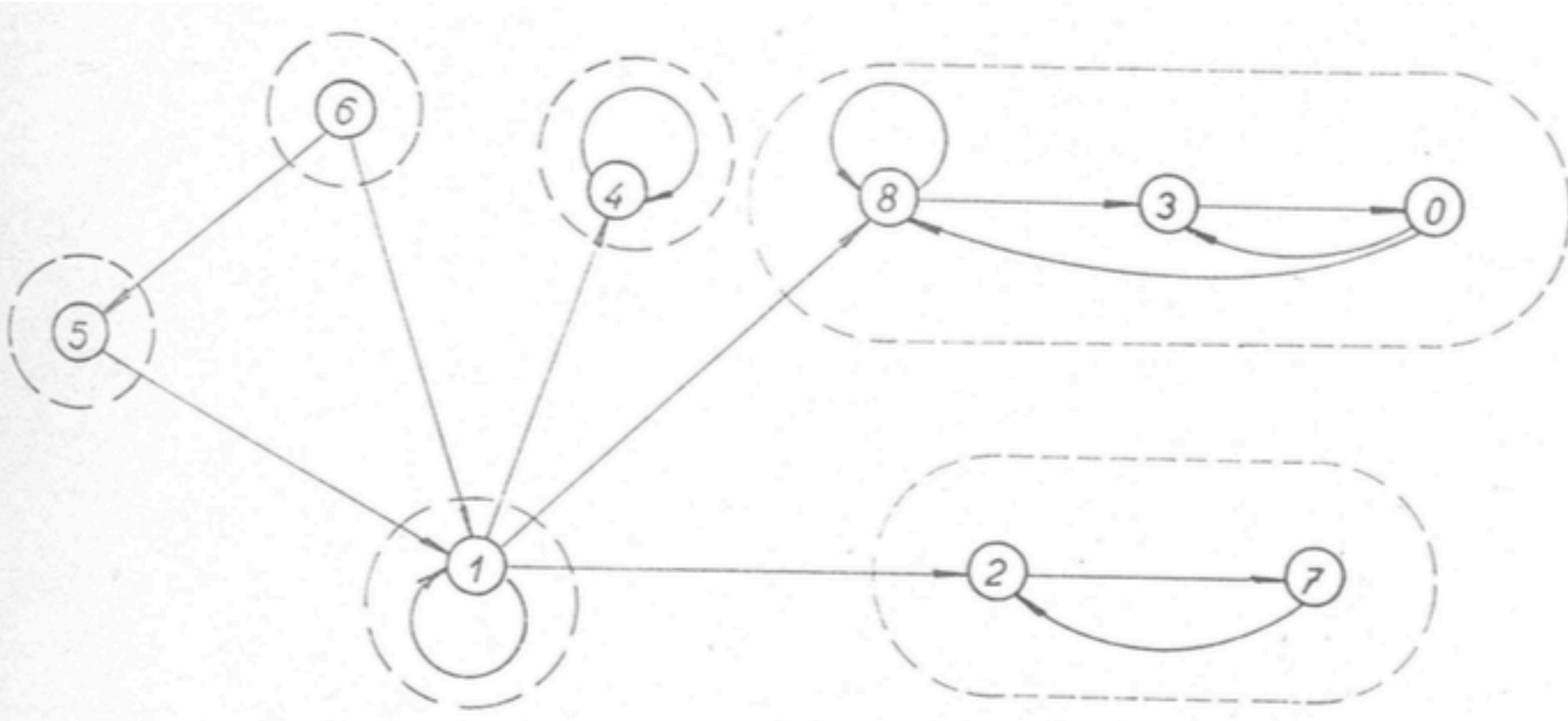
Markovské řetězce

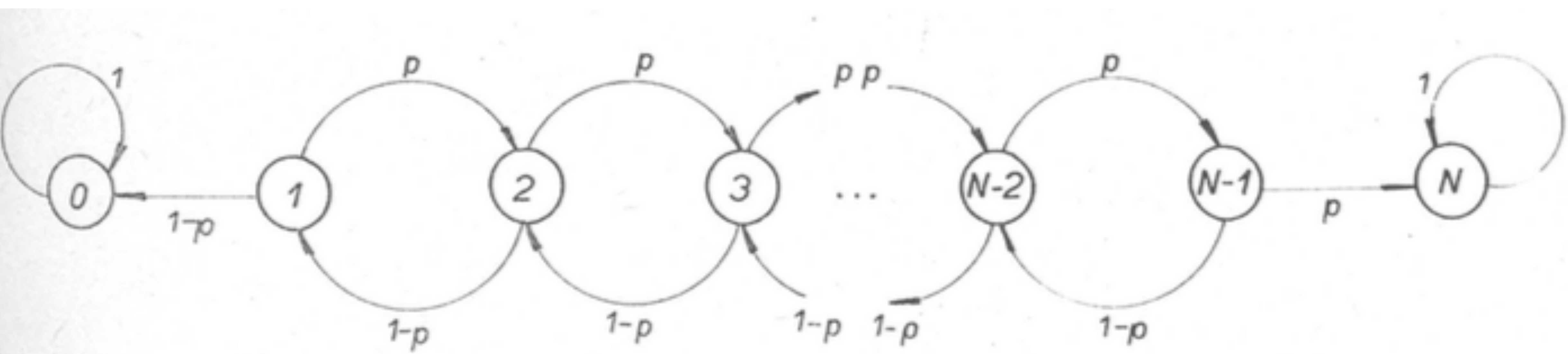




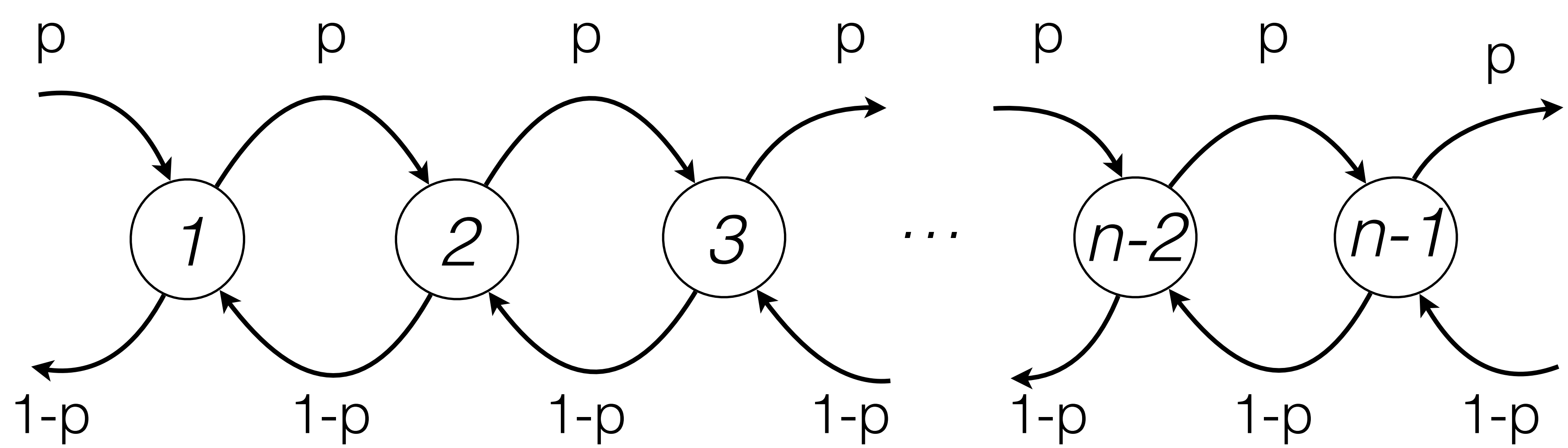


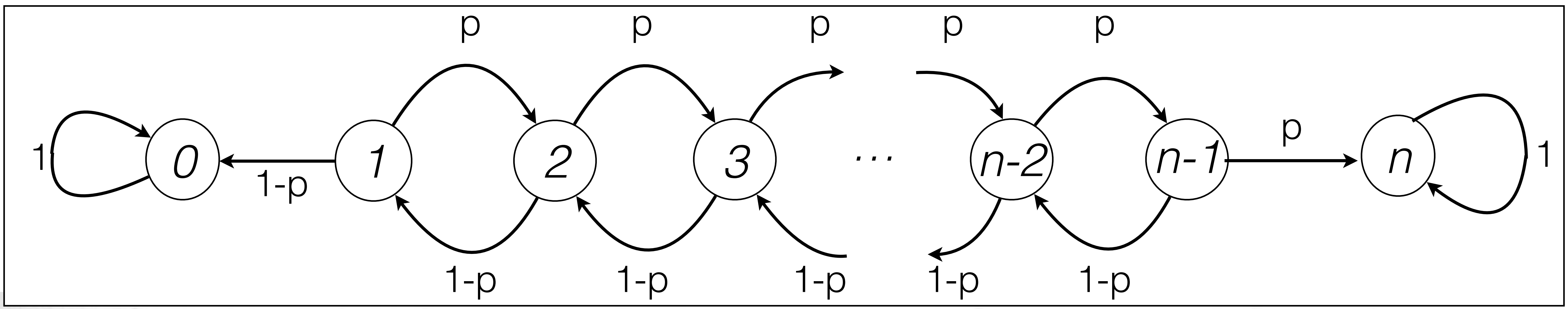
Markovské řetězce

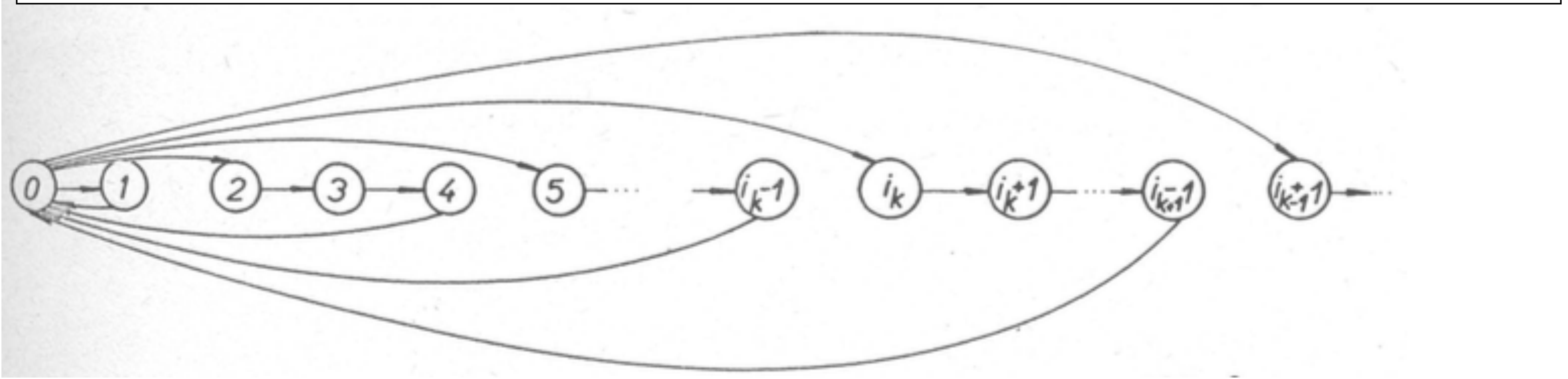




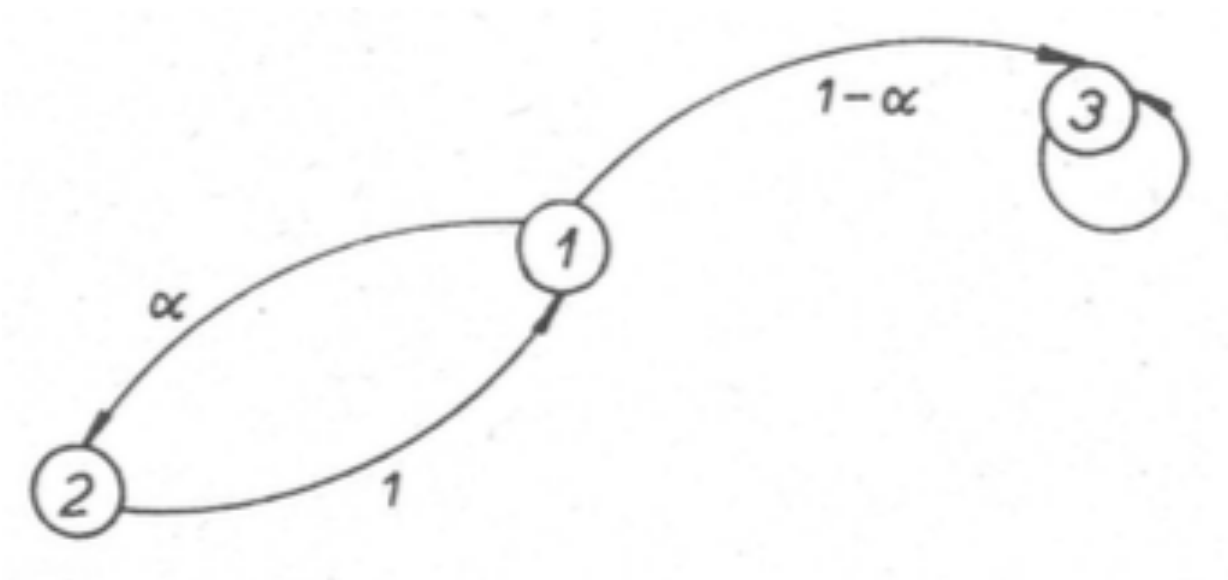
Markovské řetězce

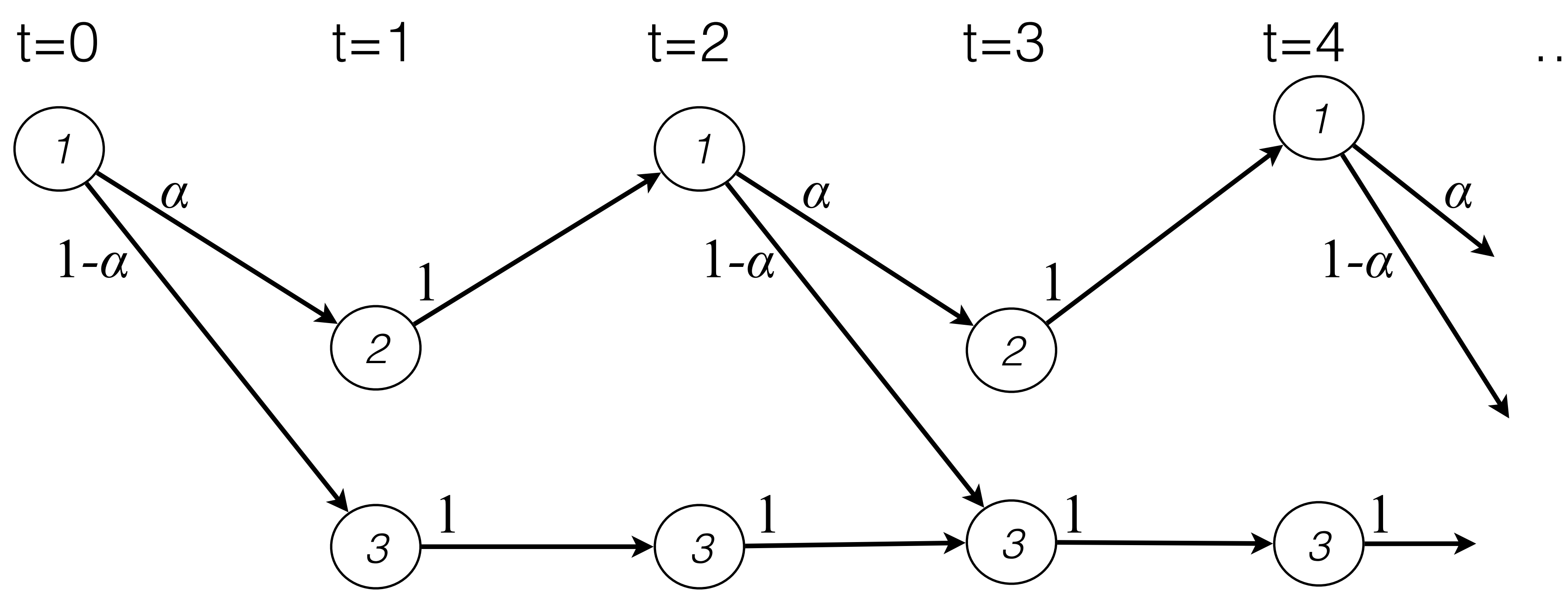




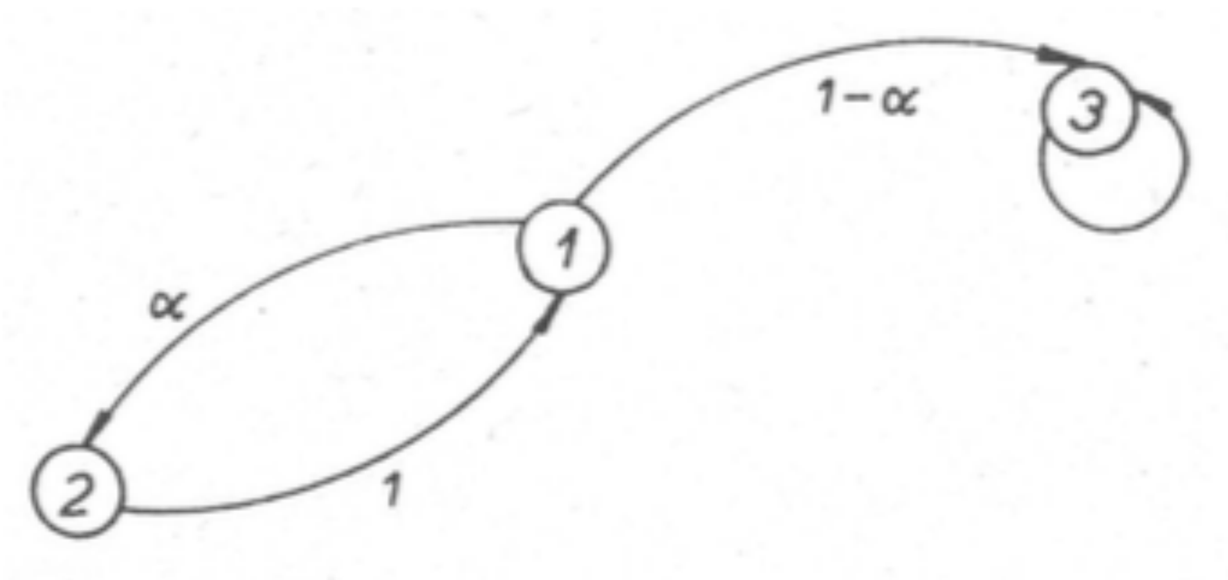


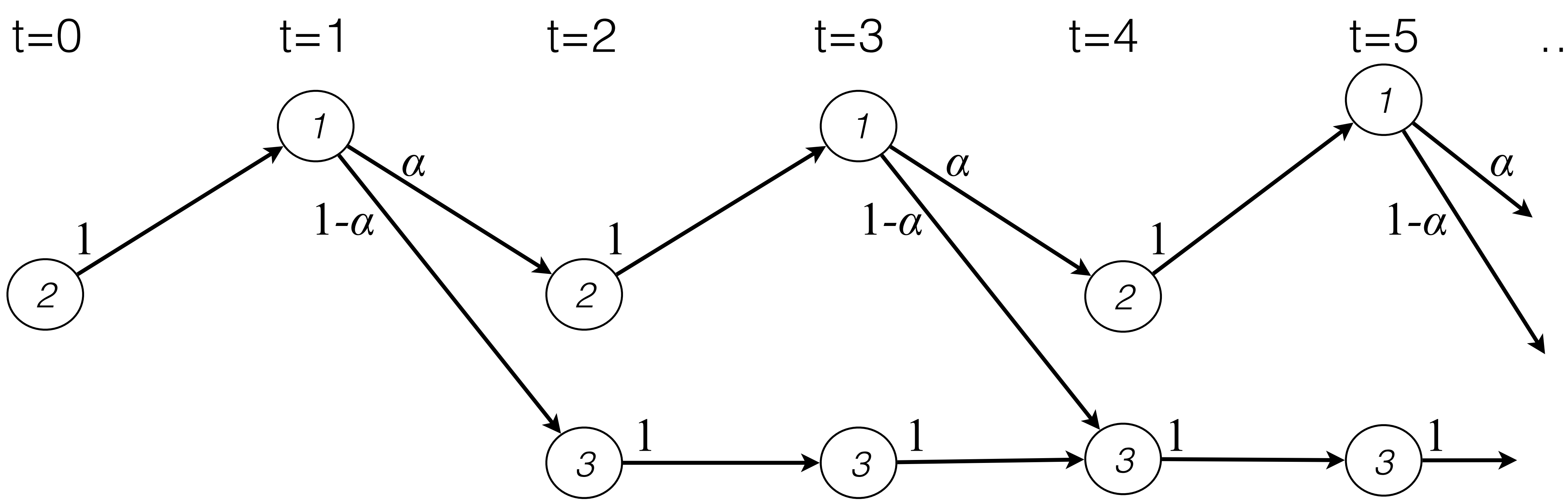
Markovské řetězce



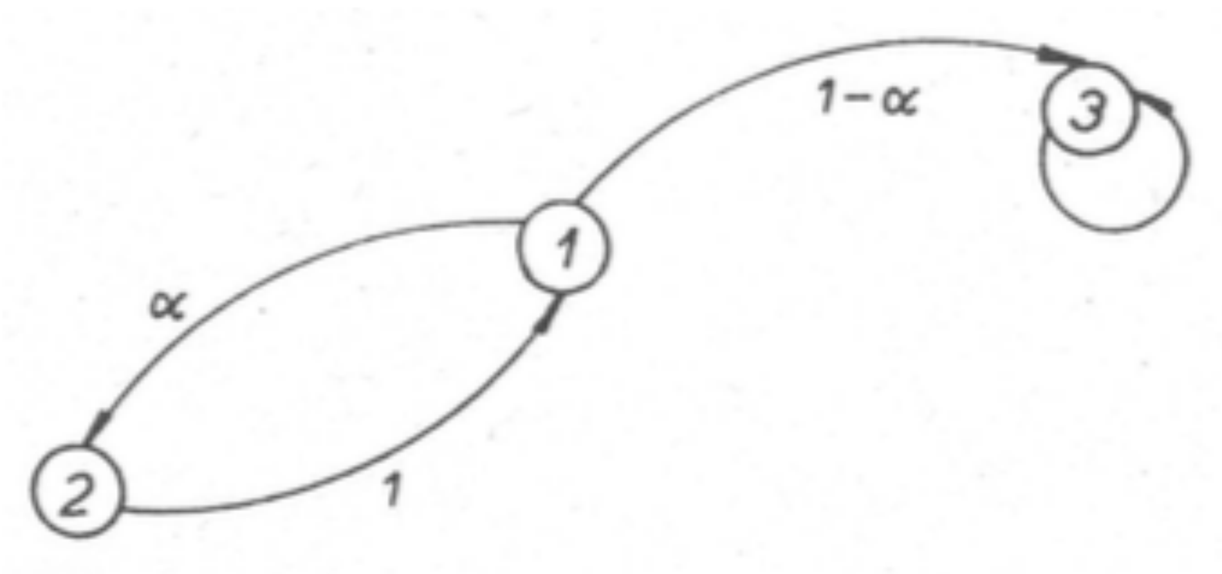


Markovské řetězce

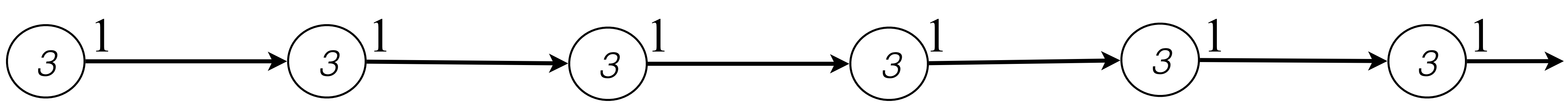




Markovské řetězce



t=0 t=1 t=2 t=3 t=4 t=5 …



Homogenní Markovský řetězec s konečně mnoha stavy

- Markovský řetězec, Markovská posloupnost

- předpokládáme $X_n \in \{1, 2, \ldots, m\}, \quad n = 1, 2, \ldots$

nezávisí na n

$$P(X_n = j \mid X_{n-1} = i) = p_{ij}, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, m$$

$$P = \left(p_{ij} \right)_{i=1,2,\ldots,m}^{j=1,2,\ldots,m}$$

- matice pravděpodobností přechodu po jednom kroku

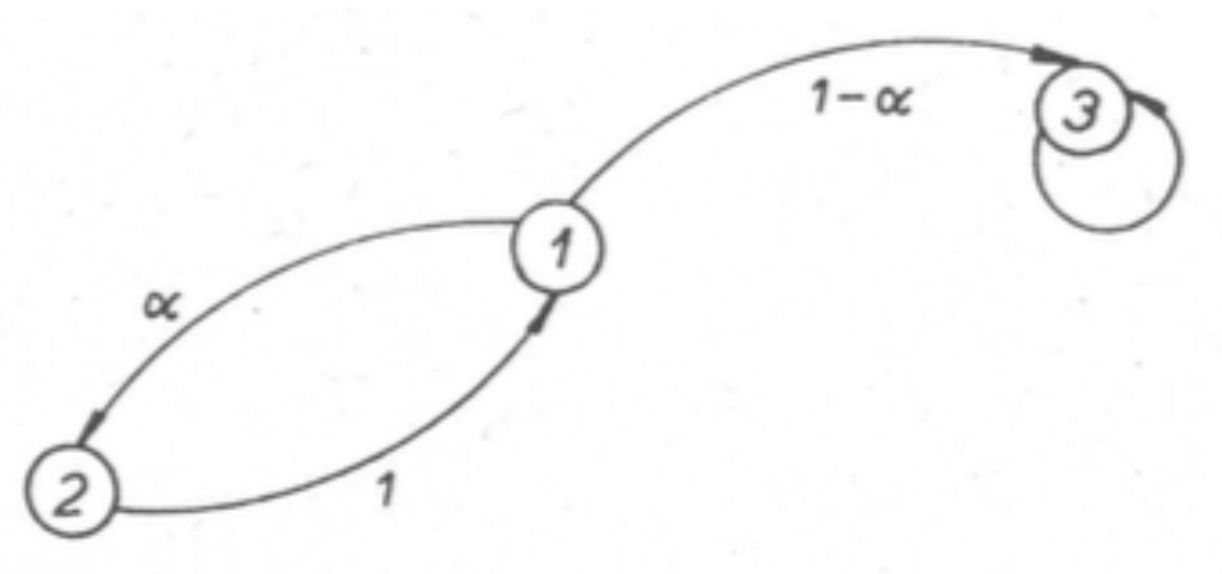
- stochastická matice: $P.\vec{e}^{\,T} = \vec{e}$

$$\vec{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m)$$

- vektor počátečního rozdělení: $\vec{\pi}\vec{e}^{\,T} = 1$

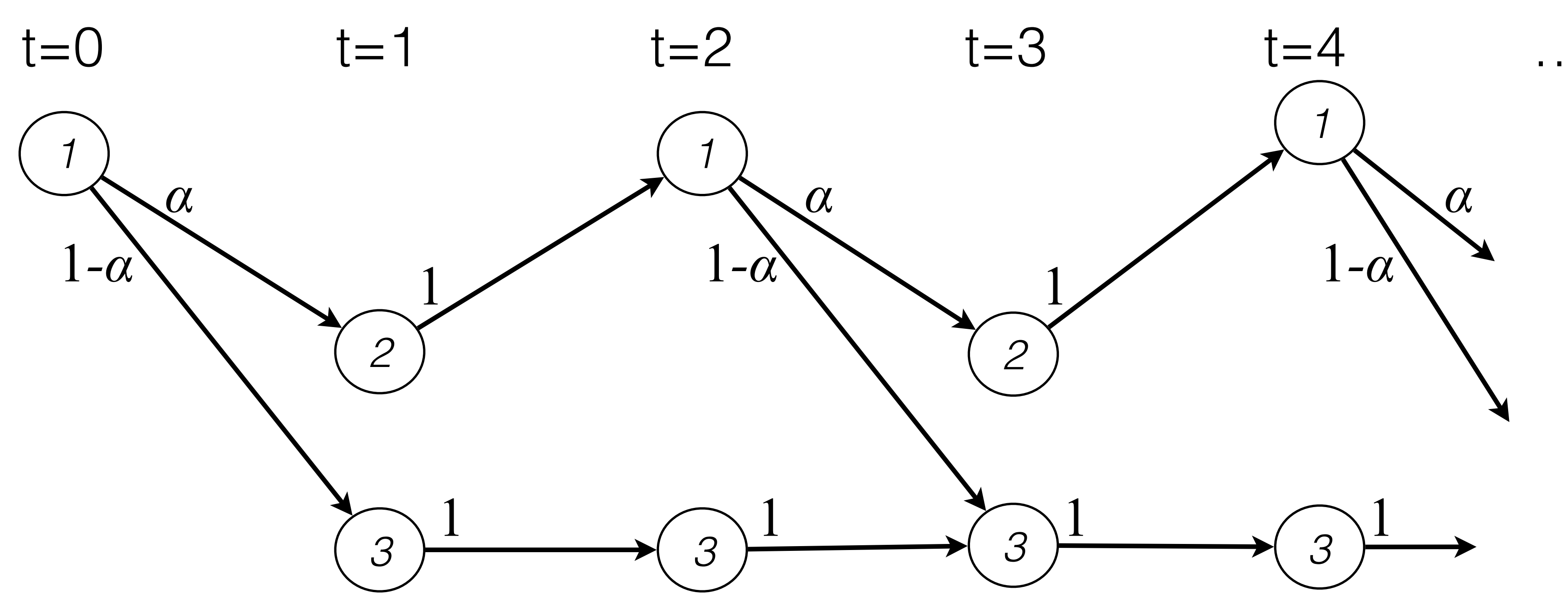
(vektory zde chápeme jako řádkové)

Homogenní Markovský řetězec s konečně mnoha stavy

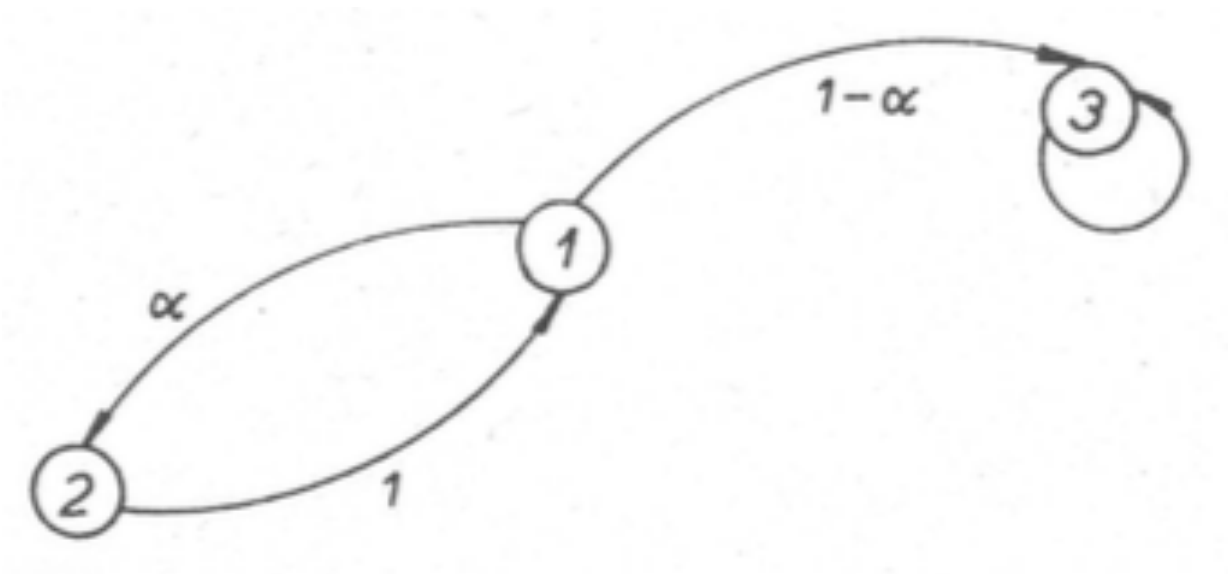


$$P = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 1-\alpha \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\pi} = (1,\, 0,\, 0)$$

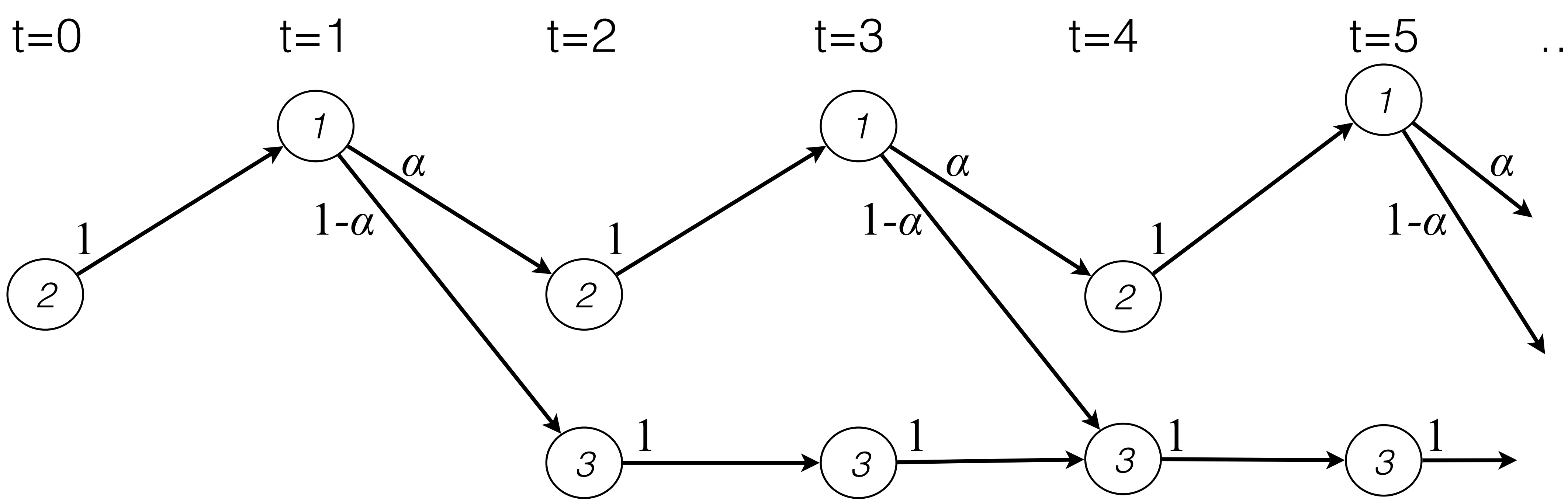


Homogenní Markovský řetězec s konečně mnoha stavy

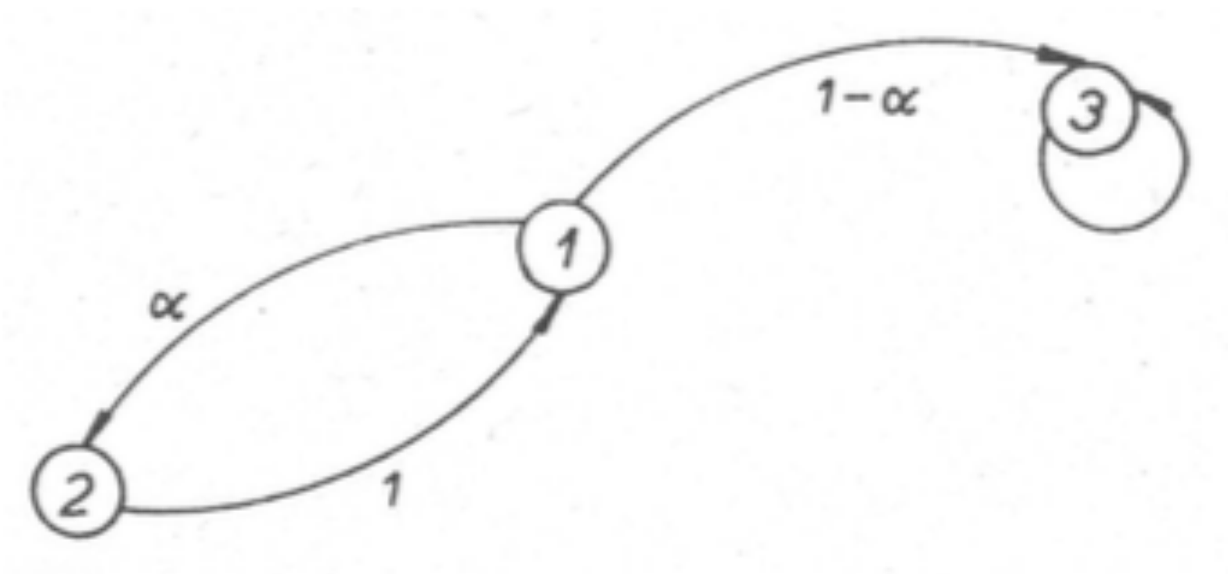


$$P = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 1-\alpha \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\pi} = (0,\, 1,\, 0)$$



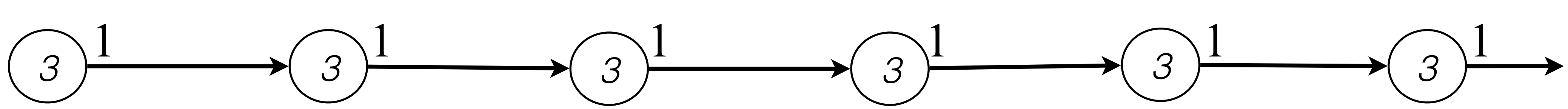
Homogenní Markovský řetězec s konečně mnoha stavy



$$P = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 1-\alpha \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\pi} = (0,\ 0,\ 1)$$

t=0 t=1 t=2 t=3 t=4 t=5 …



Homogenní Markovský řetězec s konečně mnoha stavy

Chapman - Kolmogorovova rovnost (pro dva kroky):

Nechť $\{X_n\}$ je homogenní Markovův řetězec s konečně mnoha stavy a maticí přechodu P. Potom pro libovolné dva stavy i,j a libovolné $n > 1$ platí

$$P(X_n = j \,|\, X_{n-2} = i) = \sum_{k=1}^{m} p_{ik}.p_{kj}$$

- $P(X_n = j \,|\, X_{n-2} = i) = p_{ij}^{(2)}$ vyjadřuje pravděpodobnost přechodu řetězce $\{X_n\}$ ze stavu i do stavu j po dvou krocích

$$\left(p_{ij}^{(2)}\right)_{i=1,\ldots,m}^{j=1,\ldots,m} = P^2$$

Homogenní Markovský řetězec s konečně mnoha stavy

Chapman - Kolmogorovova rovnost (obecně):

Nechť $\{X_n\}$ je homogenní Markovův řetězec s konečně mnoha stavy a maticí přechodu P. Potom pro libovolné dva stavy i,j a libovolná $n > s > r > 0$ platí

$$P(X_n = j \mid X_r = i) = p_{ij}^{(n-r)} = \sum_{k=1}^{m} p_{ik}^{(s-r)} p_{kj}^{(n-s)}$$

- pro homogenní řetězec stačí

$$P(X_n = j \mid X_0 = i) = p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} p_{ik}^{(s)} p_{kj}^{(n-s)}$$

- je zřejmě $\left(p_{ij}^{(n)}\right)_{i=1,\ldots,m}^{j=1,\ldots,m} = P^n$

Homogenní Markovský řetězec s konečně mnoha stavy

Označme $p_i(n)$ pravděpodobnost, že řetězec bude v čase n ve stavu i. Zřejmě je $p_i(0) = \pi_i$.

- podle Ch-K rovnosti je zřejmě $p_i(1) = \sum_{k=1}^{m} \pi_k . p_{ki}$

a dále $p_i(n) = \sum_{k=1}^{m} \pi_k . p_{ki}^{(n)}$

- označíme-li $\vec{p}(n) = (p_1(n), p_2(n), \ldots, p_m(n))$, potom je zřejmě

$$\vec{p}(n) = \vec{\pi}.P^n$$

nebo také $\vec{p}(n) = \vec{p}^{(n-1)}.P$

obecně $\vec{p}(n) = \vec{p}^{(s)}.P^{n-s}$ pro libovolné $n > s > 0$

Homogenní Markovský řetězec s konečně mnoha stavy

Zajímá nás, jak se bude chovat řetězec po dlouhé době běhu.

- hledáme $\vec{p}^* = \lim_{n\to\infty} \vec{p}(n)$ pokud existuje
  - tzv. stacionární rozdělení

Lze ukázat, že stacionární rozdělení je řešením soustavy rovnic $\vec{p}^* = \vec{p}^*.P$ s podmínkou $\vec{p}^*\vec{e}^T = 1$.

Příklad: Najděte stacionární rozdělení řetězce s maticí pravděpodobností přechodu

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 1-\alpha \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(pokud existuje).