

Pravděpodobnost a matematická statistika

prof. RNDr. Gejza Dohnal, CSc.

dohnal@nipax.cz



VII. Náhodné procesy

<https://sms.nipax.cz/pas>

Náhodné procesy

Uvažujme funkci dvou proměnných $X(\omega, t) = X_t(\omega)$:

$$X : \Omega \times R \longrightarrow R$$

System konečněrozměrných distribučních funkcí:

$$F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = P(X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n)$$

symetrie: $F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = F(x_{j_1}, \dots, x_{j_n}; t_{j_1}, \dots, t_{j_n})$
pro libovolnou permutaci (j_1, \dots, j_n) čísel $(1, \dots, n)$
(nezáleží na pořadí)

konzistence: $\lim_{x_n \rightarrow \infty} F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = F(x_1, \dots, x_{n-1}; t_1, \dots, t_{n-1})$

funkce střední hodnoty: $\mu_t = E(X_t), t \in R$

autokovarianční funkce: $c(s, t) = Cov(X_s, X_t) = E(X_s X_t) - E(X_s)E(X_t)$

autokorelační funkce: $r(s, t) = \rho(s, t) = \frac{Cov(X_s, X_t)}{\sqrt{Var(X_s)Var(X_t)}}$

Náhodné procesy

Náhodný proces $X_t, t \in R$ je *kovariančně (slabě) stacionární*, pokud je $\mu_t = \mu, t \in R$ a platí $c(s, t) = c(t - s)$ pro všechna s a t .

Náhodný proces $X_t, t \in R$ je *silně stacionární*, pokud pro libovolnou n -tici t_1, \dots, t_n a libovolné $\delta > 0$ platí

$$F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = F(x_1, \dots, x_n; t_1 + \delta, \dots, t_n + \delta)$$

Náhodný proces $X_t, t \in R$ má *nezávislé (nekorelované) přírůstky*, pokud pro libovolnou čtveřici časů s_1, t_1, s_2, t_2 jsou náhodné veličiny $(X_{t_1} - X_{s_1}), (X_{t_2} - X_{s_2})$ stochasticky nezávislé (nekorelované).

Náhodné procesy

Příklady náhodných procesů:

1) Poissonův proces N_t :

- $N_0=0$
- má nezávislé přírůstky ($(N_t - N_s)$ a $(N_u - N_v)$ jsou stoch. nezávislé)
- $(N_t - N_s)$ má Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda(t-s)$.

2) Standardní Wienerův proces $\{W_t, t \geq 0\}$:

- $P(W_0=0)=1$ (skoro jistě)
- má nezávislé přírůstky, tj. pro libovolné $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ jsou $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ stoch. nezávislé náh. vel.
- $(W_t - W_s)$ má normální rozdělení $N(0, \sigma^2|t-s|)$.

3) Obecný Wienerův proces $\{W_t, t \geq 0\}$ (s driftem):

- $P(W_0=0)=1$ (skoro jistě)
- má nezávislé přírůstky, tj. pro libovolné $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ jsou $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ stoch. nezávislé náh. vel.
- $(W_t - W_s)$ má normální rozdělení $N(\mu(t-s), \sigma^2|t-s|)$.

Náhodné procesy

Ukažte, že pro standardní Wienerův proces $\{W(t), t \geq 0\}$ jsou následující procesy opět standardní Wienerovy procesy:

1) $X_t = cW(t/c^2), \quad t \geq 0, \quad c > 0$

2) $Y_t = W(t+h) - W(h), \quad t \geq 0, \quad h > 0$

3) $Z_t = tW(1/t), \quad t > 0, \quad h > 0$
 $Z_0 = 0$

Markovské procesy

Náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ se stavy v množině H splňuje tzv. **Markovskou vlastnost**, jestliže platí

$$P(X_{t_n} = x_n \mid X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, X_{t_{n-2}} = x_{n-2}, \dots, X_{t_{n-k}} = x_{n-k}) = P(X_{t_n} = x_n \mid X_{t_{n-1}} = x_{n-1}) = p(t_{n-1}, t_n; x_{n-1}, x_n)$$

pro libovolné časy $0 \leq t_{n-k} < \dots < t_n$ a hodnoty $x_n, \dots, x_{n-k} \in H$.

Rozlišujeme:

- procesy v diskrétním čase (řetězce, posloupnosti), $T=N$
- procesy ve spojitém čase, $T=R^+$
- procesy s konečně mnoha diskrétními stavy $H=\{1,2,\dots,m\}$
- procesy s nekonečně mnoha diskrétními stavy $H=\{1,2,\dots\}$
- procesy se spojitými stavy $H \subset R$
-

Markovské řetězce

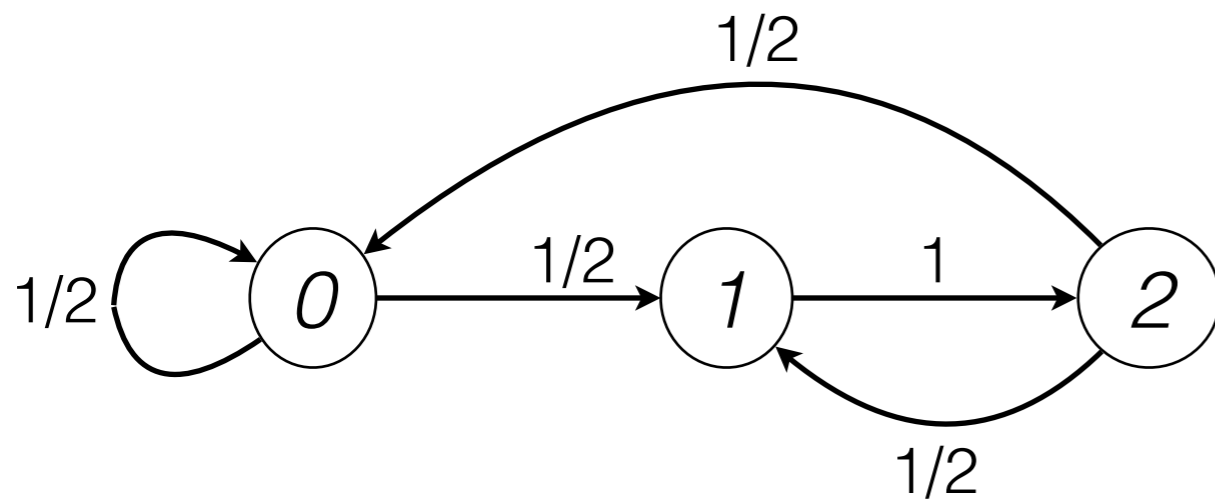
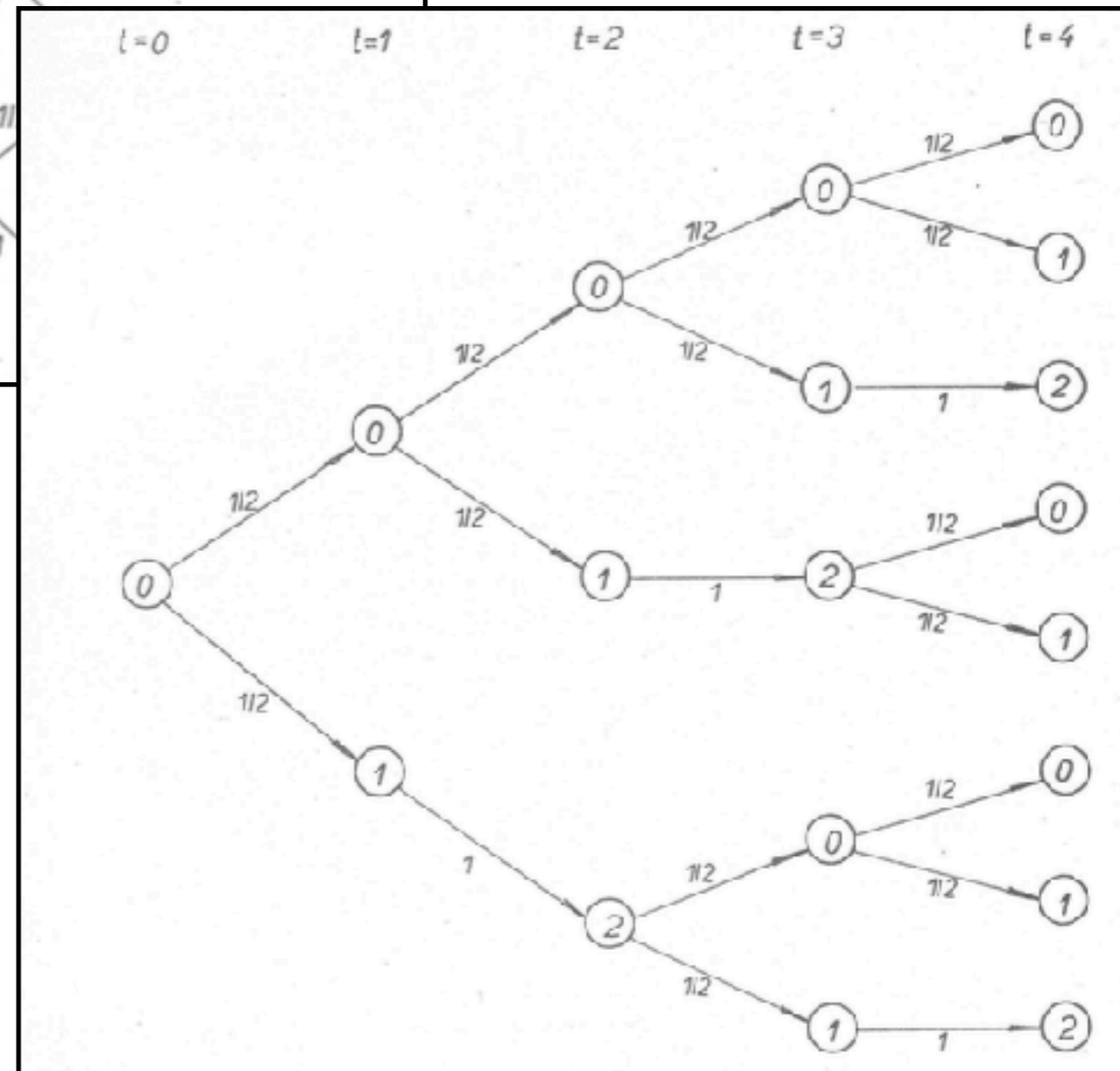
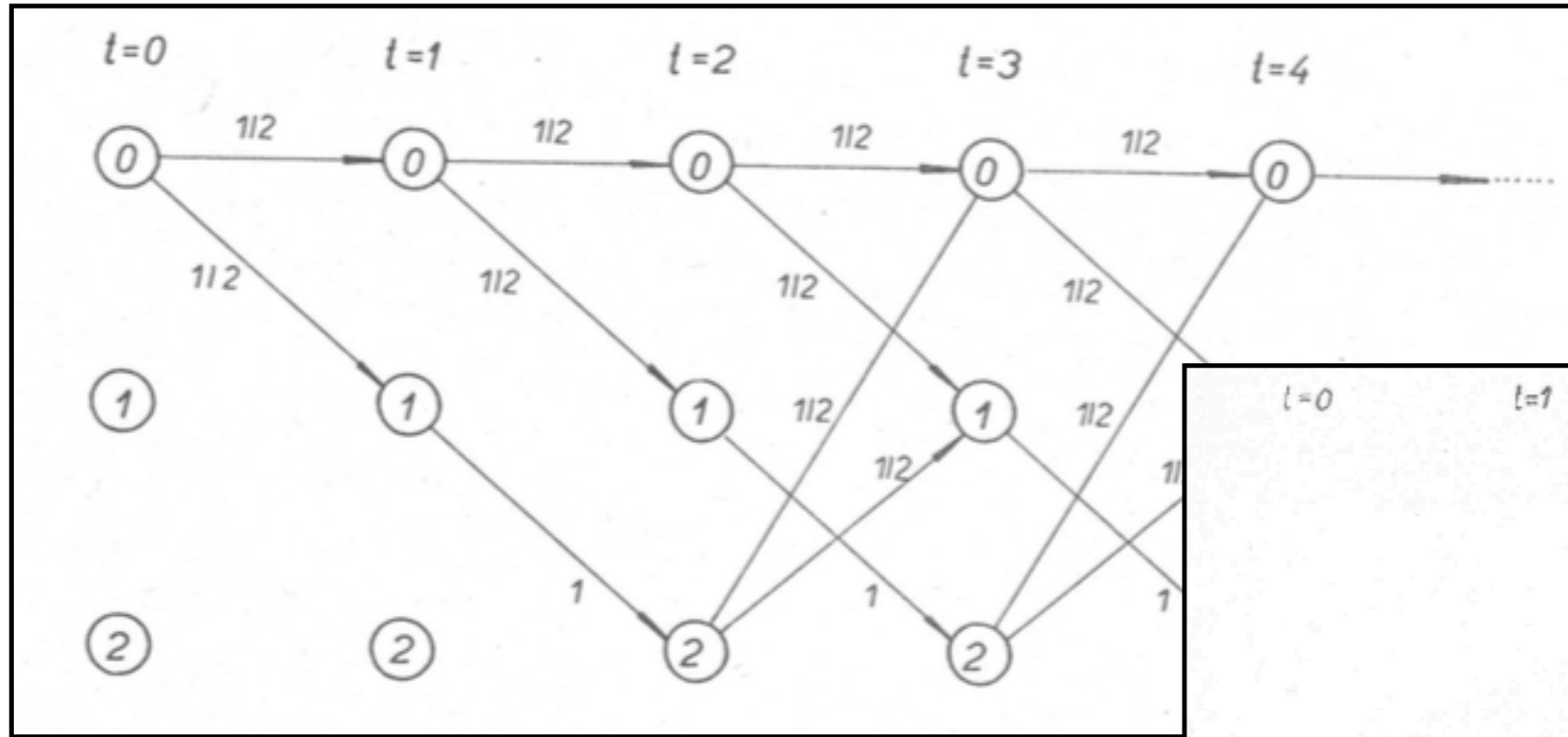
Náhodný proces $\{X_t, t \in \mathbb{N}\}$ v diskrétním čase se spočetně mnoha stavy splňuje **Markovskou vlastnost**, jestliže platí

$$P(X_n = i \mid X_{n-1} = j, X_{n-2} = j_2, \dots, X_{n-k} = j_k) = P(X_n = i \mid X_{n-1} = j) = p(i, j; n, n-1) = p_{i,j}(n)$$

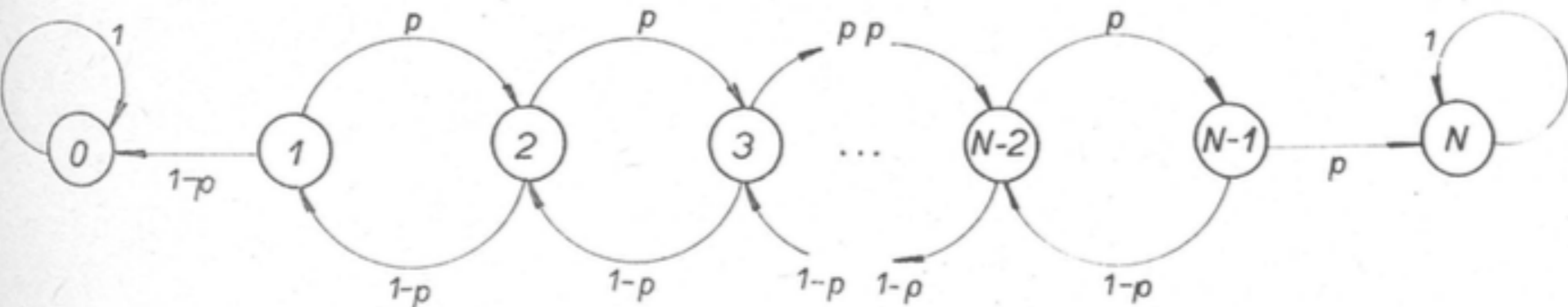
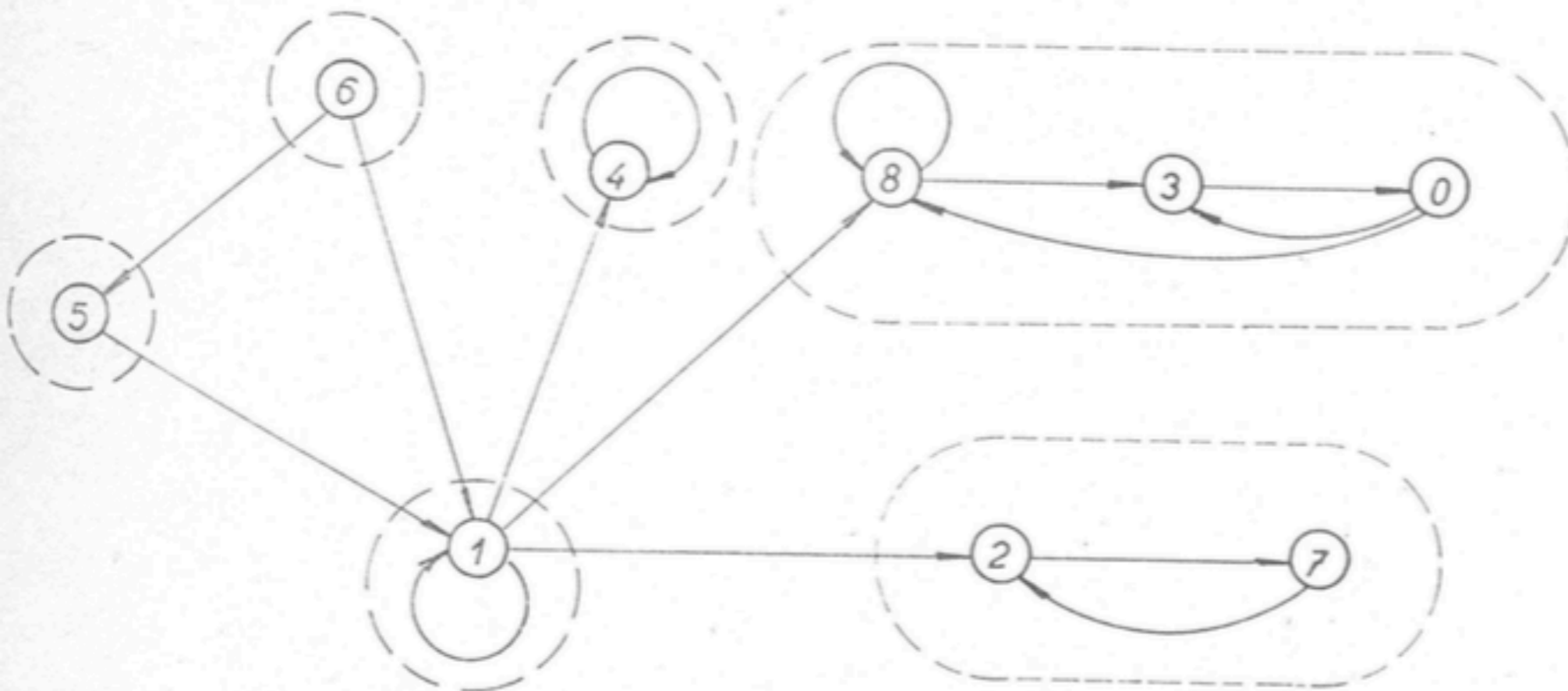
pro libovolné časy $0 \leq n-k < \dots < n$ a stavy i, j, j_2, \dots, j_k .

- jedná se o **Markovský řetězec**

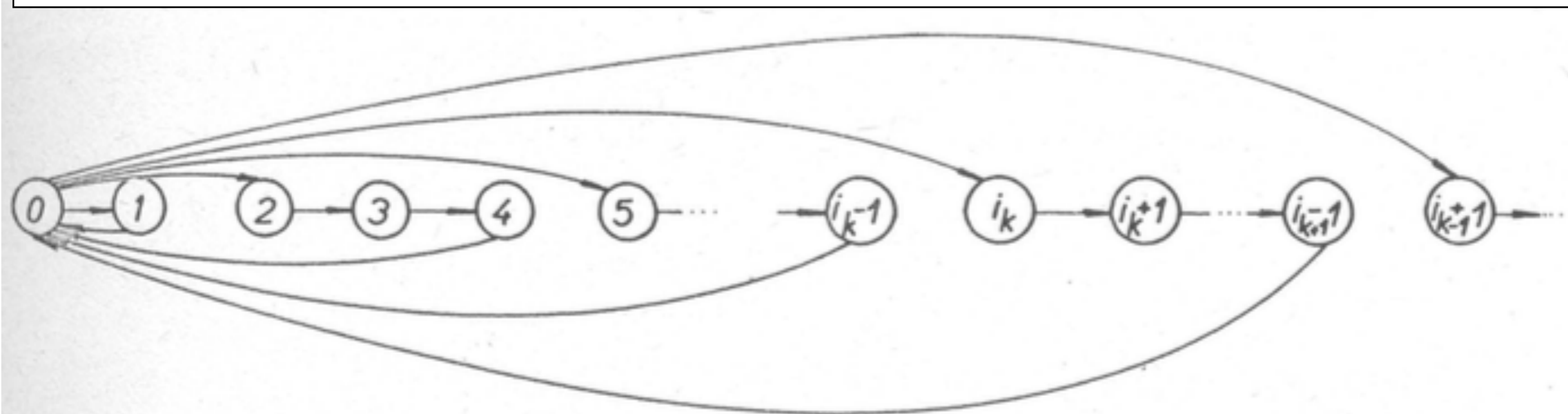
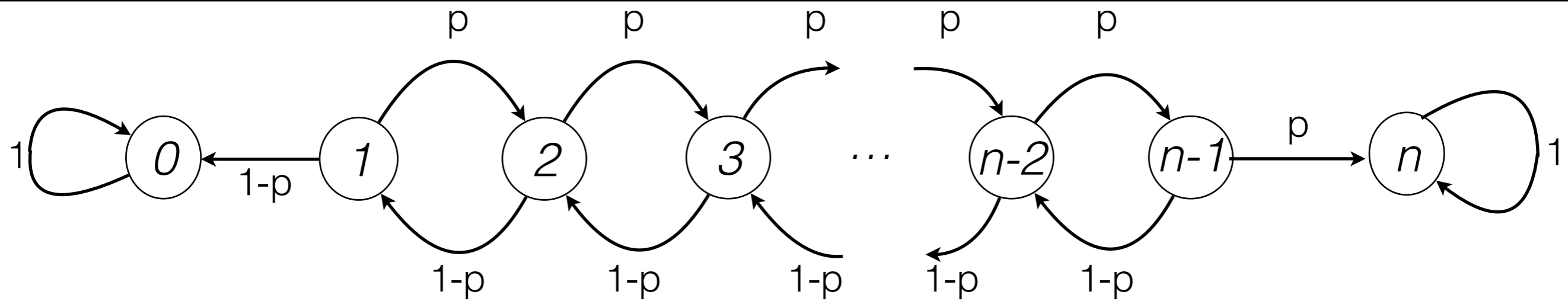
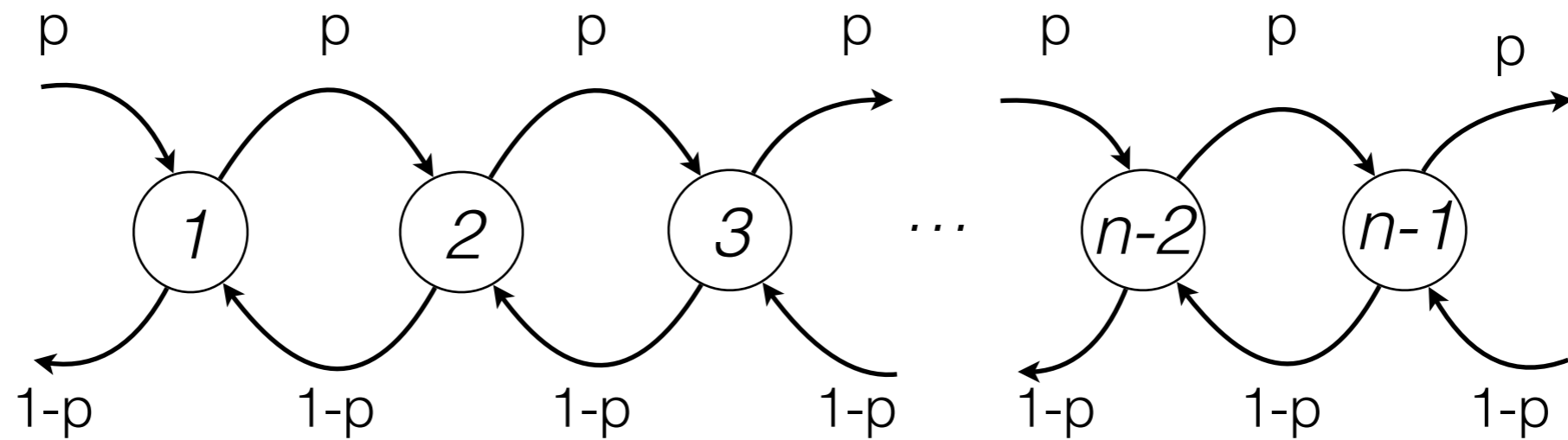
Markovské řetězce



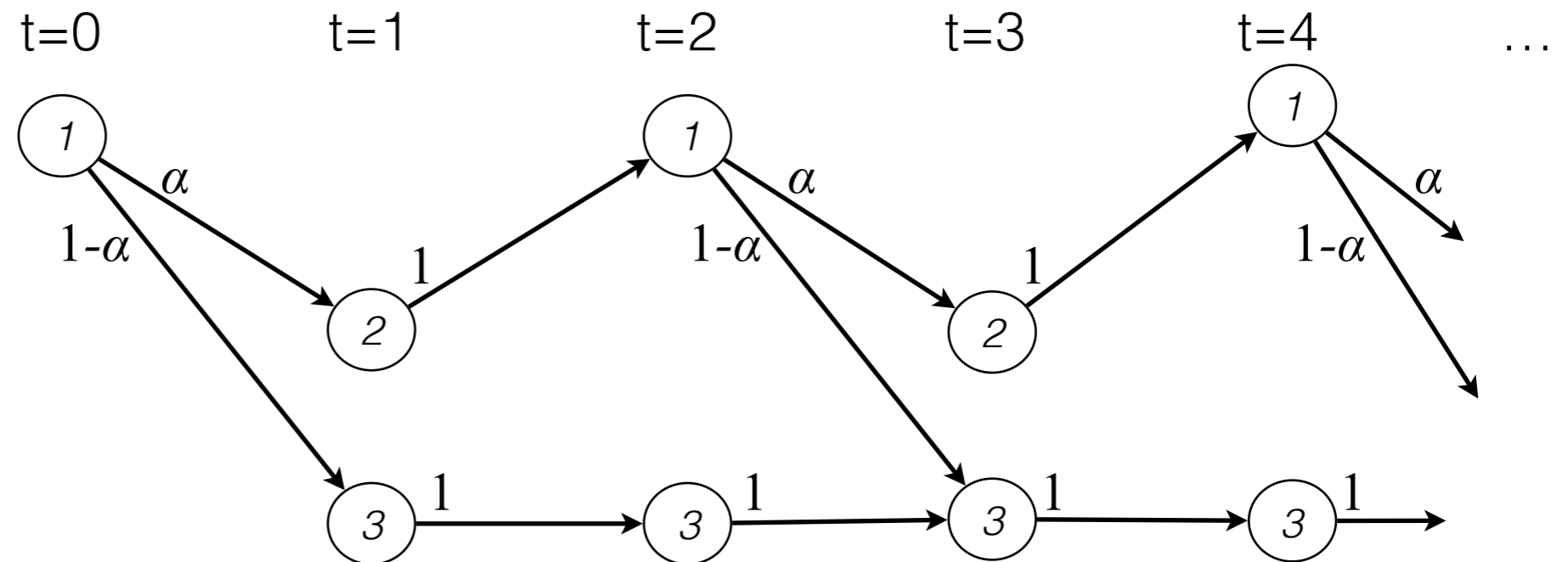
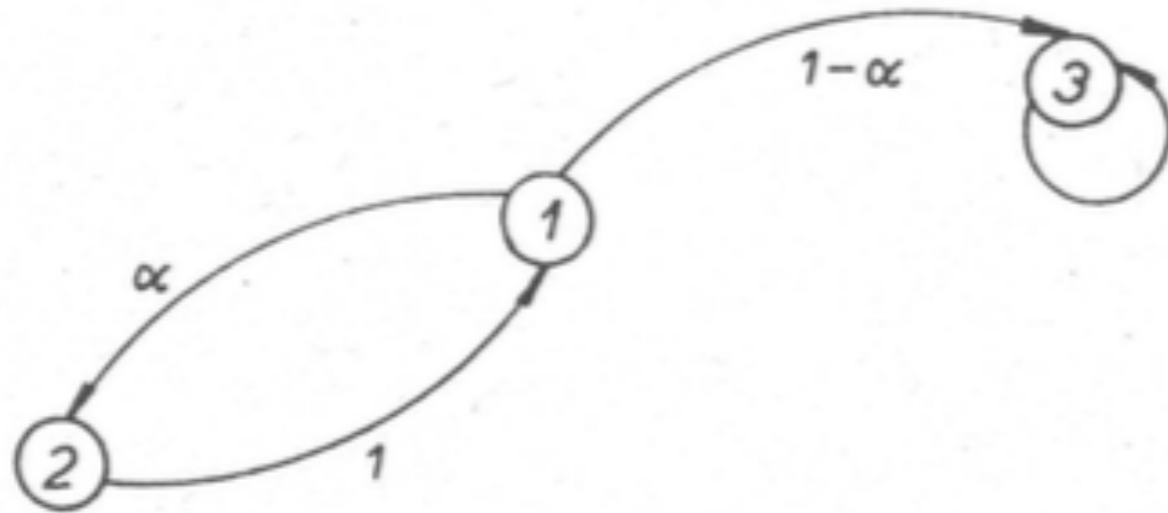
Markovské řetězce



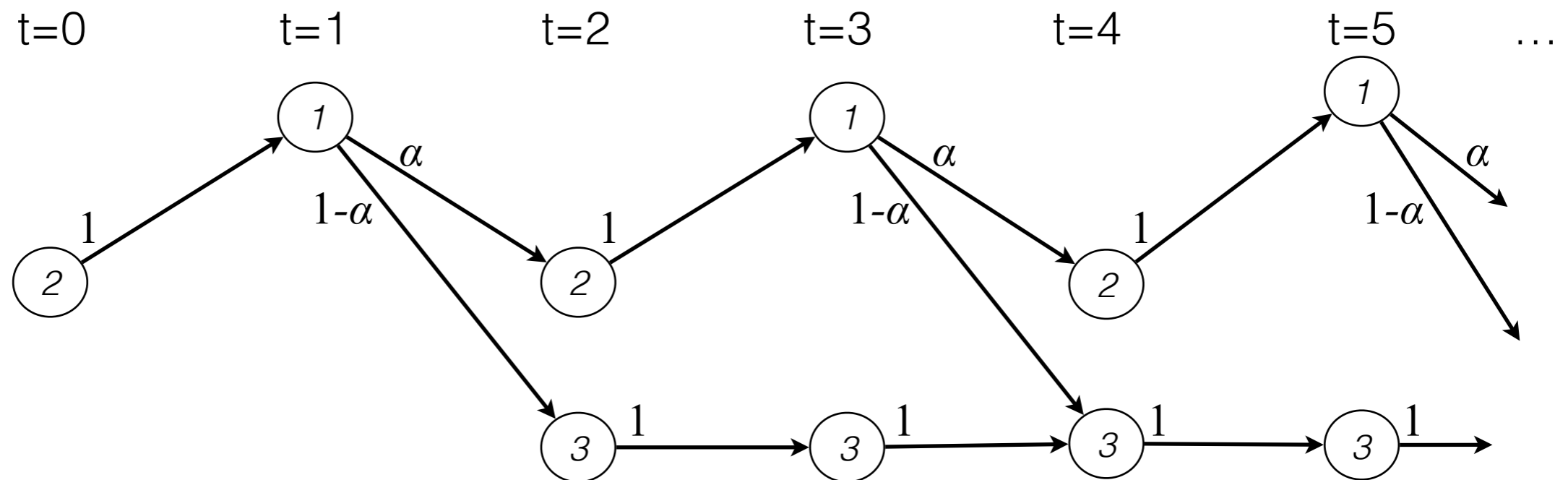
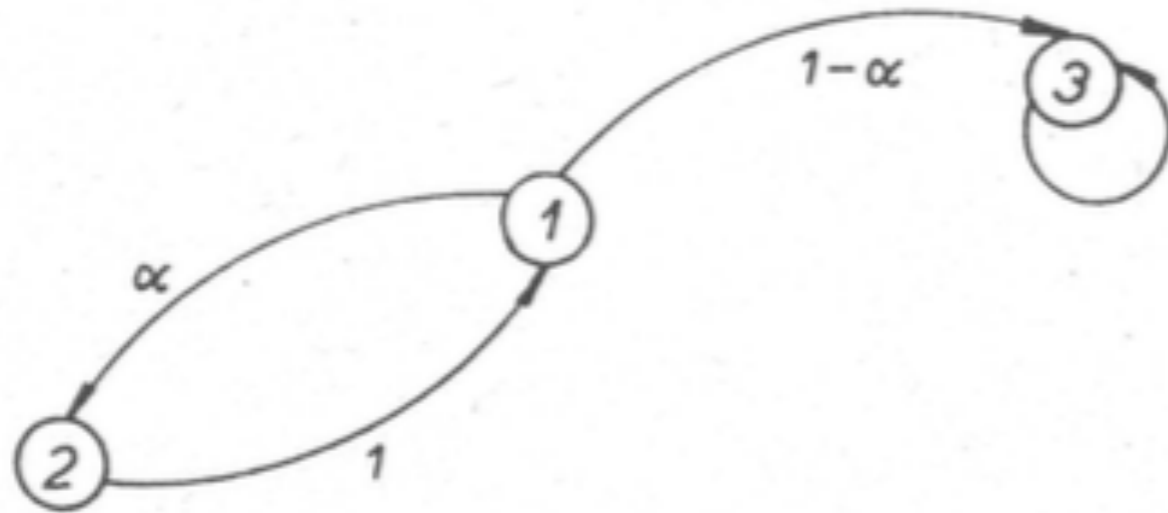
Markovské řetězce



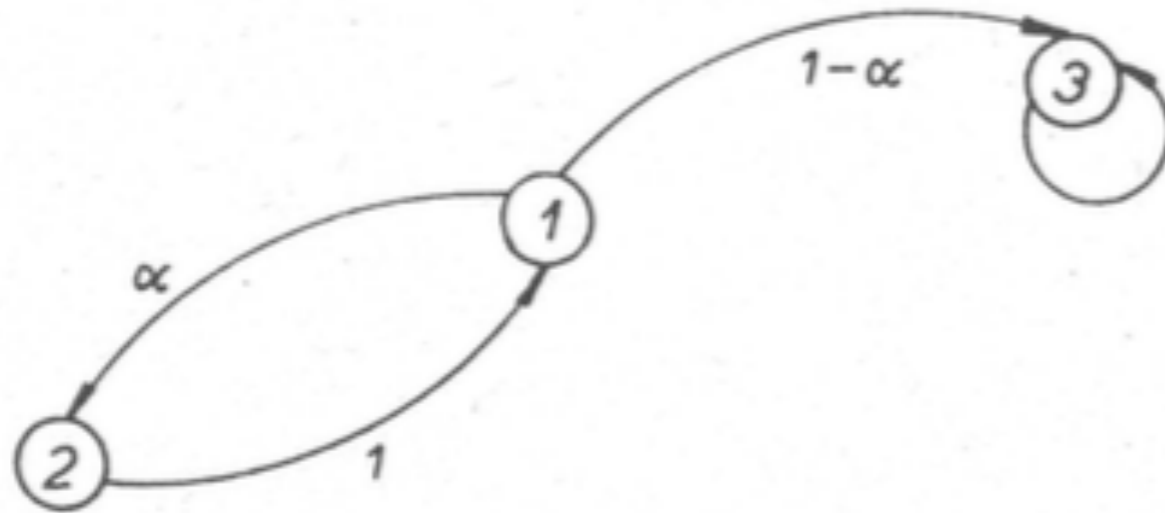
Markovské řetězce



Markovské řetězce



Markovské řetězce



t=0

t=1

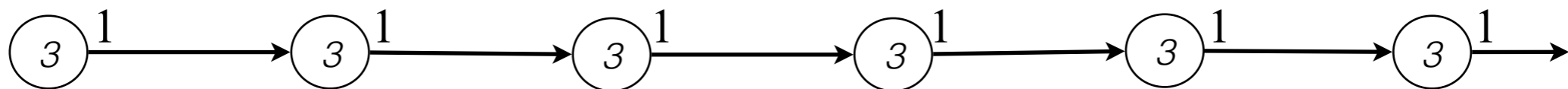
t=2

t=3

t=4

t=5

...



Homogenní Markovský řetězec s konečně mnoha stavy

- Markovský řetězec, Markovská posloupnost

- předpokládáme $X_n \in \{1, 2, \dots, m\}$, $n = 1, 2, \dots$ nezávisí na n

$$P(X_n = j \mid X_{n-1} = i) = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, m$$

$$P = \begin{pmatrix} p_{ij} \\ i=1, 2, \dots, m \end{pmatrix}_{j=1, 2, \dots, m}$$

- matice pravděpodobností přechodu
po jednom kroku

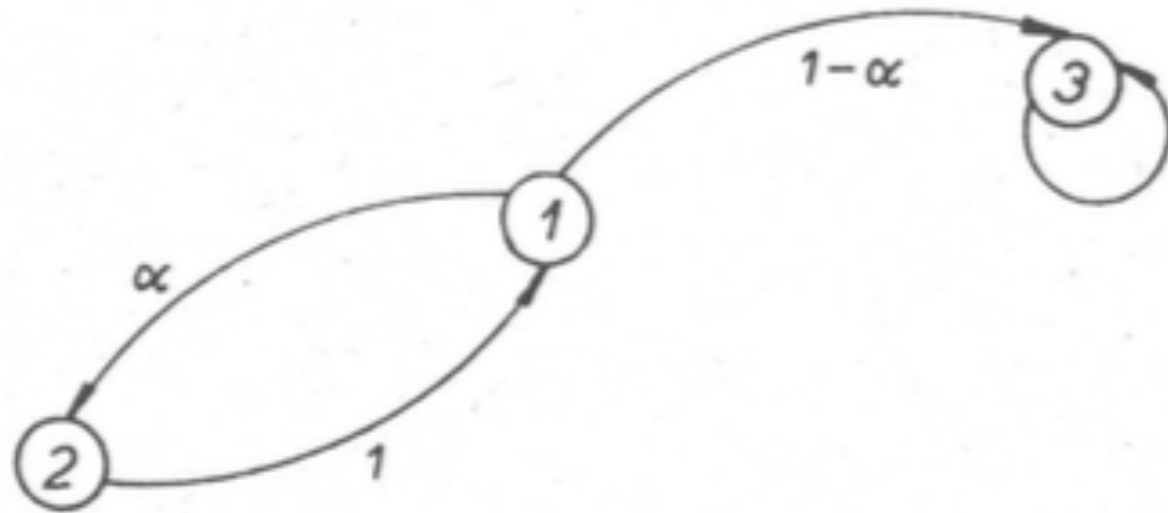
- stochastická matice: $P \cdot \vec{e}^T = \vec{e}$

$$\vec{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m)$$

- vektor počátečního rozdělení: $\vec{\pi} \vec{e}^T = 1$

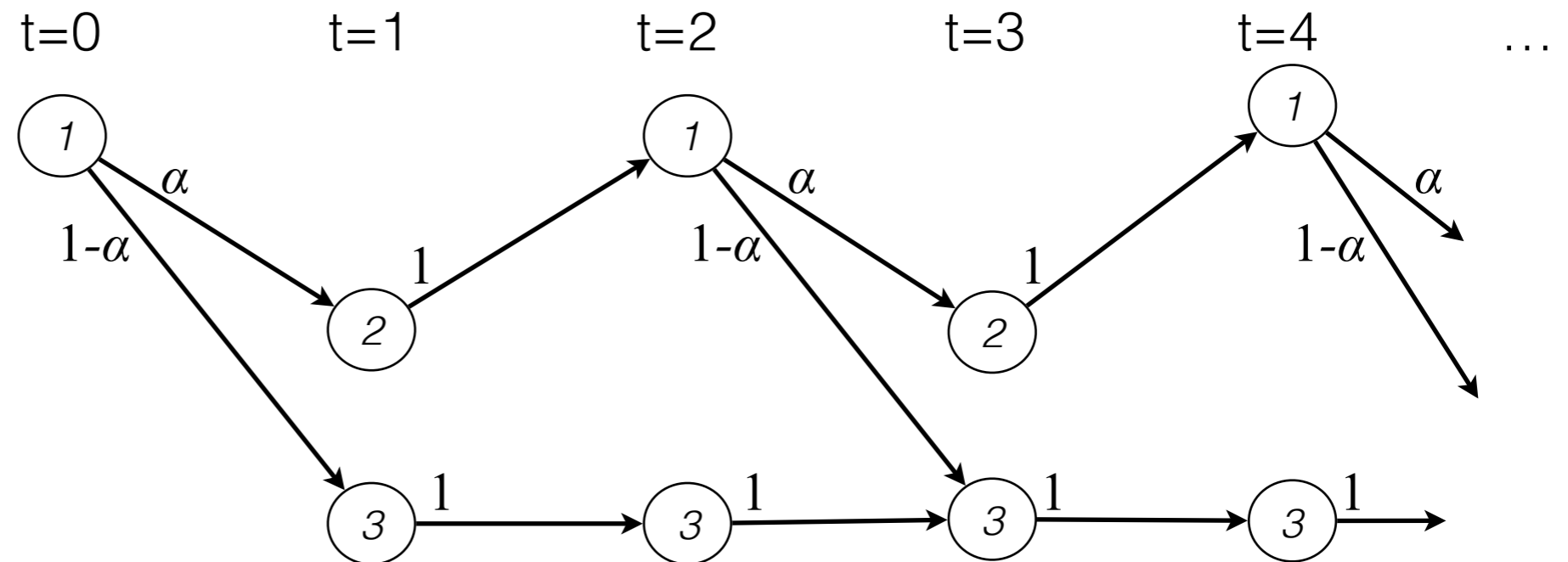
(vektory zde chápeme jako řádkové)

Homogenní Markovský řetězec s konečně mnoha stavy

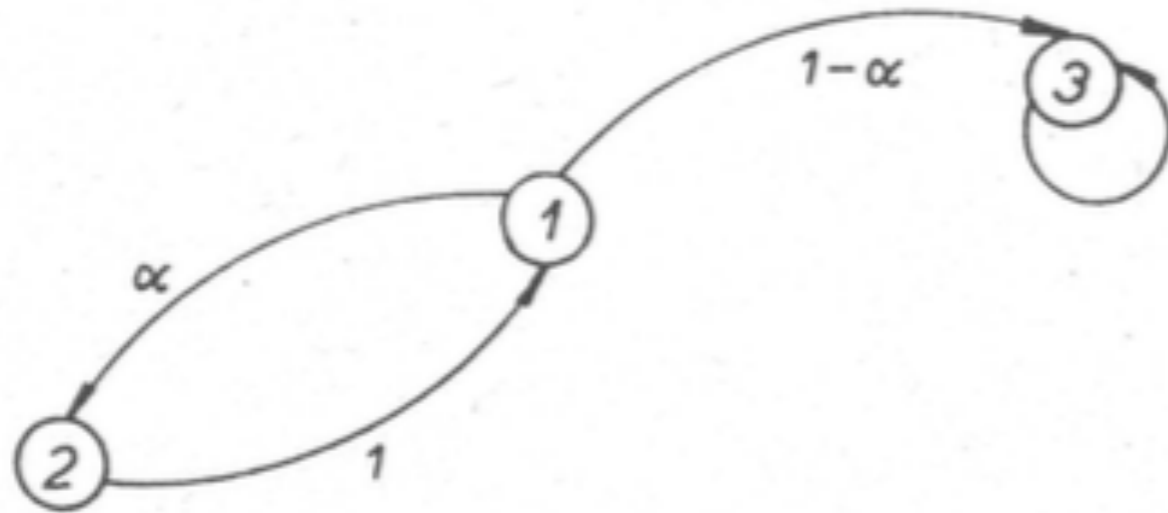


$$P = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 1 - \alpha \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\pi} = (1, 0, 0)$$

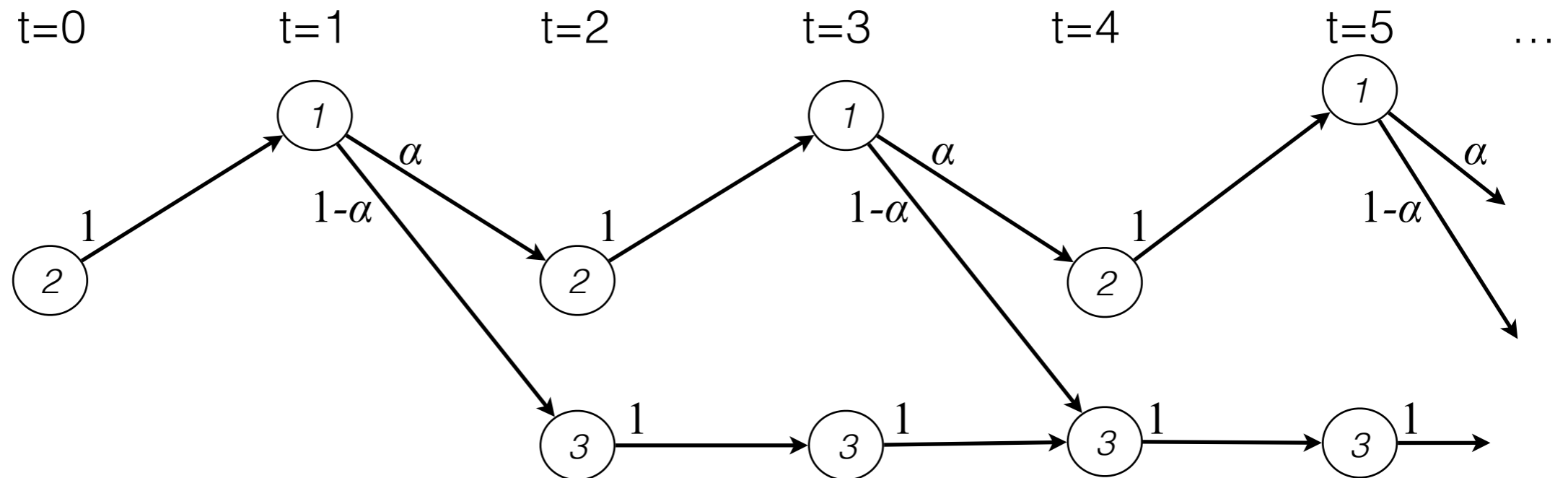


Homogenní Markovský řetězec s konečně mnoha stavy

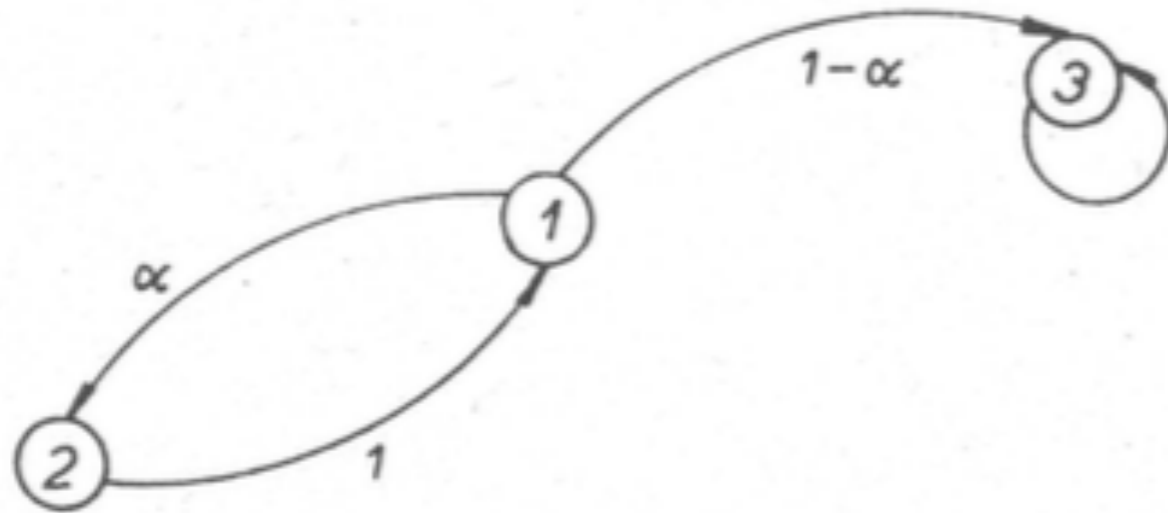


$$P = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 1 - \alpha \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\pi} = (0, 1, 0)$$



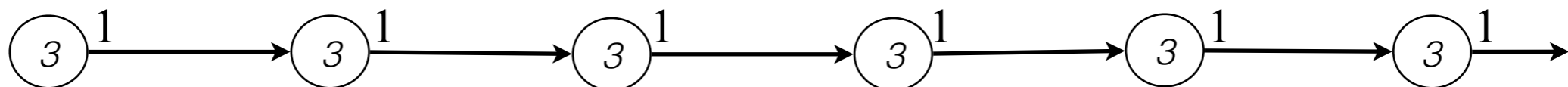
Homogenní Markovský řetězec s konečně mnoha stavy



$$P = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 1-\alpha \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\pi} = (0, 0, 1)$$

t=0 t=1 t=2 t=3 t=4 t=5 ...



Homogenní Markovský řetězec s konečně mnoha stavy

Chapman - Kolmogorovova rovnost (pro dva kroky):

Nechť $\{X_n\}$ je homogenní Markovův řetězec s konečně mnoha stavy a maticí přechodu P . Potom pro libovolné dva stavy i, j a libovolné $n > 1$ platí

$$P(X_n = j \mid X_{n-2} = i) = \sum_{k=1}^m p_{ik} \cdot p_{kj}$$

- $P(X_n = j \mid X_{n-2} = i) = p_{ij}^{(2)}$ vyjadřuje pravděpodobnost přechodu řetězce $\{X_n\}$ ze stavu i do stavu j po dvou krocích

$$\left(p_{ij}^{(2)} \right)_{\substack{j=1, \dots, m \\ i=1, \dots, m}} = P^2$$

Homogenní Markovský řetězec s konečně mnoha stavy

Chapman - Kolmogorovova rovnost (obecně):

Necht' $\{X_n\}$ je homogenní Markovův řetězec s konečně mnoha stavy a maticí přechodu P . Potom pro libovolné dva stavy i, j a libovolná $n > s > r > 0$ platí

$$P(X_n = j \mid X_r = i) = p_{ij}^{(n-r)} = \sum_{k=1}^m p_{ik}^{(s-r)} p_{kj}^{(n-s)}$$

- pro homogenní řetězec stačí

$$P(X_n = j \mid X_0 = i) = p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^m p_{ik}^{(s)} p_{kj}^{(n-s)}$$

- je zřejmé $\left(p_{ij}^{(n)} \right)_{\substack{j=1, \dots, m \\ i=1, \dots, m}} = P^n$

Homogenní Markovský řetězec s konečně mnoha stavy

Označme $p_i(n)$ pravděpodobnost, že řetězec bude v čase n ve stavu i . Zřejmě je $p_i(0) = \pi_i$.

- podle Ch-K rovnosti je zřejmě
$$p_i(1) = \sum_{k=1}^m \pi_k \cdot p_{ki}$$

a dále
$$p_i(n) = \sum_{k=1}^m \pi_k \cdot p_{ki}^{(n)}$$

- označíme-li $\vec{p}(n) = (p_1(n), p_2(n), \dots, p_m(n))$, potom je zřejmě

$$\vec{p}(n) = \vec{\pi} \cdot P^n$$

nebo také
$$\vec{p}(n) = \vec{p}(n-1) \cdot P$$

obecně
$$\vec{p}(n) = \vec{p}(s) \cdot P^{n-s} \text{ pro libovolné } n > s > 0$$

Homogenní Markovský řetězec s konečně mnoha stavy

Zajímá nás, jak se bude chovat řetězec po dlouhé době běhu.

- hledáme $\vec{p}^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{p}(n)$ pokud existuje
- tzv. stacionární rozdělení

Lze ukázat, že stacionární rozdělení je řešením soustavy rovnic $\vec{p}^* = \vec{p}^* \cdot P$ s podmínkou $\vec{p}^* \vec{e}^T = 1$.

Příklad: Najděte stacionární rozdělení řetězce s maticí pravděpodobností přechodu

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 1 - \alpha \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(pokud existuje).

Homogenní Markovský řetězec s konečně mnoha stavy

Klasifikace stavů:

- stav $j \in I$ je dosažitelný z $i \in I$, když existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $p_{ij}^{(n)} > 0$.
- stavy i a j jsou sousledné, když jsou vzájemně dosažitelné.
- stav i je podstatný, když je sousledný s každým stavem j , který je z něho dosažitelný.

Cvičení 1: Ukažte, že jsou-li $i, j, k \in I$ libovolné stavy takové, že j je dosažitelný z k a k je dosažitelný z i , potom je j dosažitelný z i .

Cvičení 2: Ukažte, že je-li $i \in I$ sousledný se stavem $j \in I$, potom

a) i je sousledný sám se sebou

b) když stav k je sousledný s j , potom je k sousledný i se stavem i .

Cvičení 3: Ukažte, že je-li $i \in I$ podstatný stav a $j \in I$ je dosažitelný ze stavu i , potom stav j je podstatný.

Homogenní Markovský řetězec s konečně mnoha stavy

Klasifikace stavů:

Označme $C(i)$ množinu obsahující stav i a všechny stavy s ním sousledné.

$$C(1) = \{1\}$$

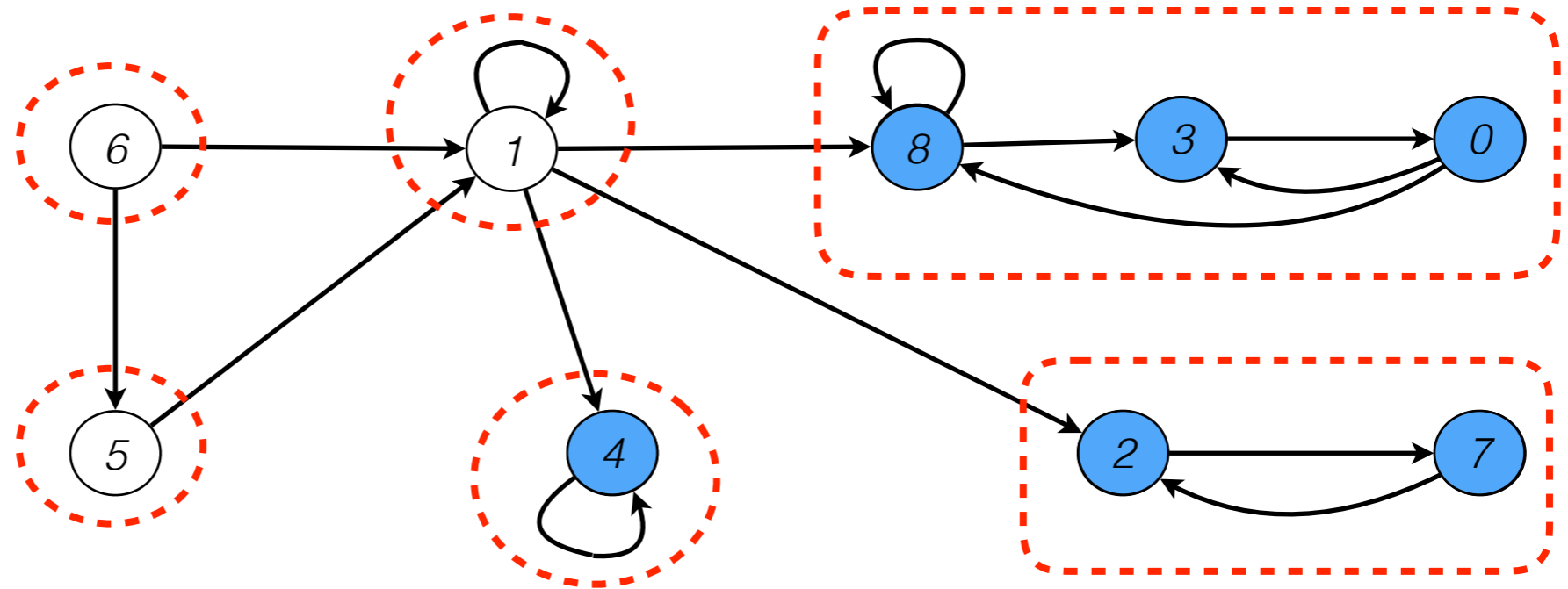
$$C(4) = \{4\}$$

$$C(5) = \{5\}$$

$$C(6) = \{6\}$$

$$C(2) = \{2,7\} = C(7)$$

$$C(3) = \{0,3,8\} = C(0) = C(8)$$



Homogenní Markovský řetězec s konečně mnoha stavy

Klasifikace stavů:

Množina stavů $E \subset I$ je uzavřená když pro každé $i \in E$ platí

$$\sum_{j \in E} p_{ij} = 1$$

Tvrzení 1: Je-li $E \subset I$ uzavřená množina stavů, potom pro každé $n \geq 0$ a $i \in E$ platí

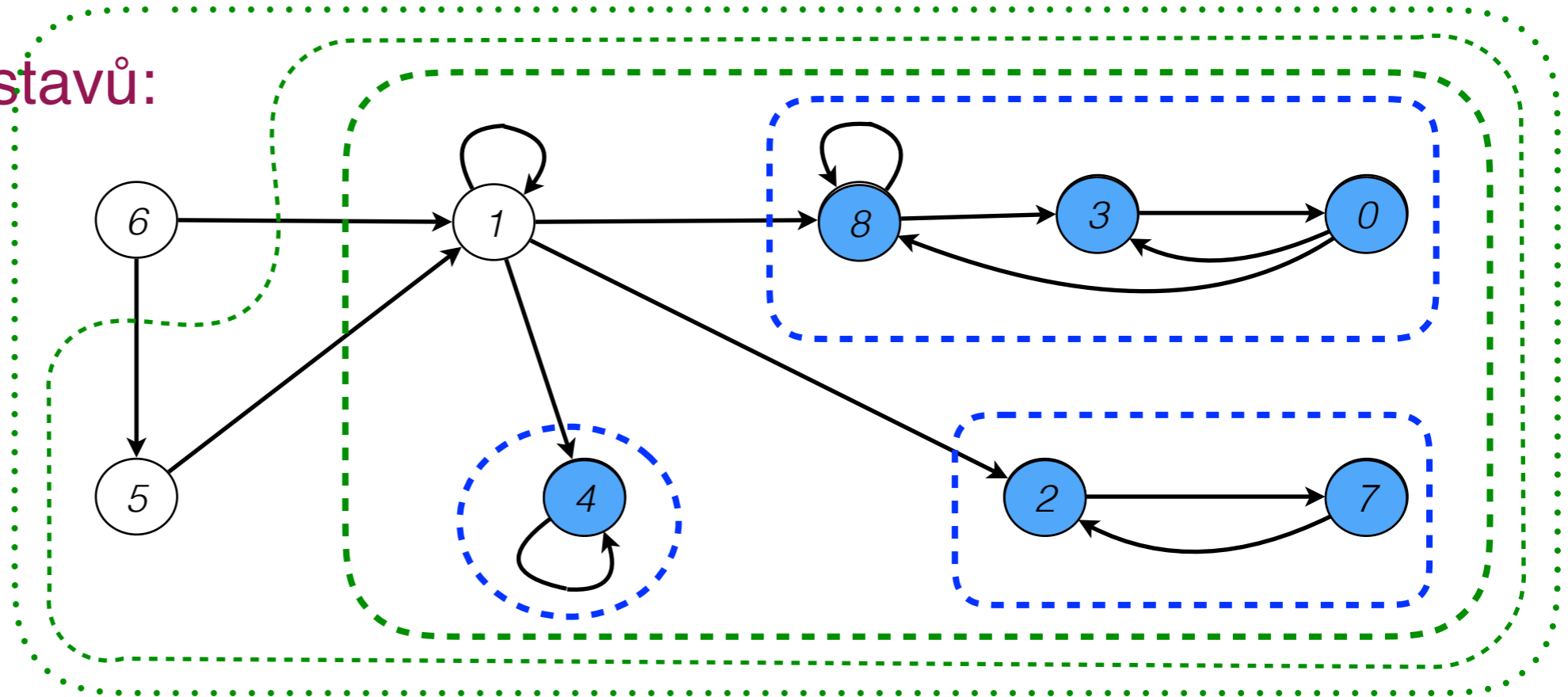
$$\sum_{j \in E} p_{ij}^{(n)} = 1$$

Tvrzení 2: Množina stavů $E \subset I$ je uzavřená právě tehdy, když $p_{ij} = 0$ pro každé $i \in E$ a $j \in I-E$.

Uzávěr množiny $E \subset I$ je uzavřená množina \bar{E} taková, že každá uzavřená množina obsahující E obsahuje i \bar{E} .

Homogenní Markovský řetězec s konečně mnoha stavy

Klasifikace stavů:



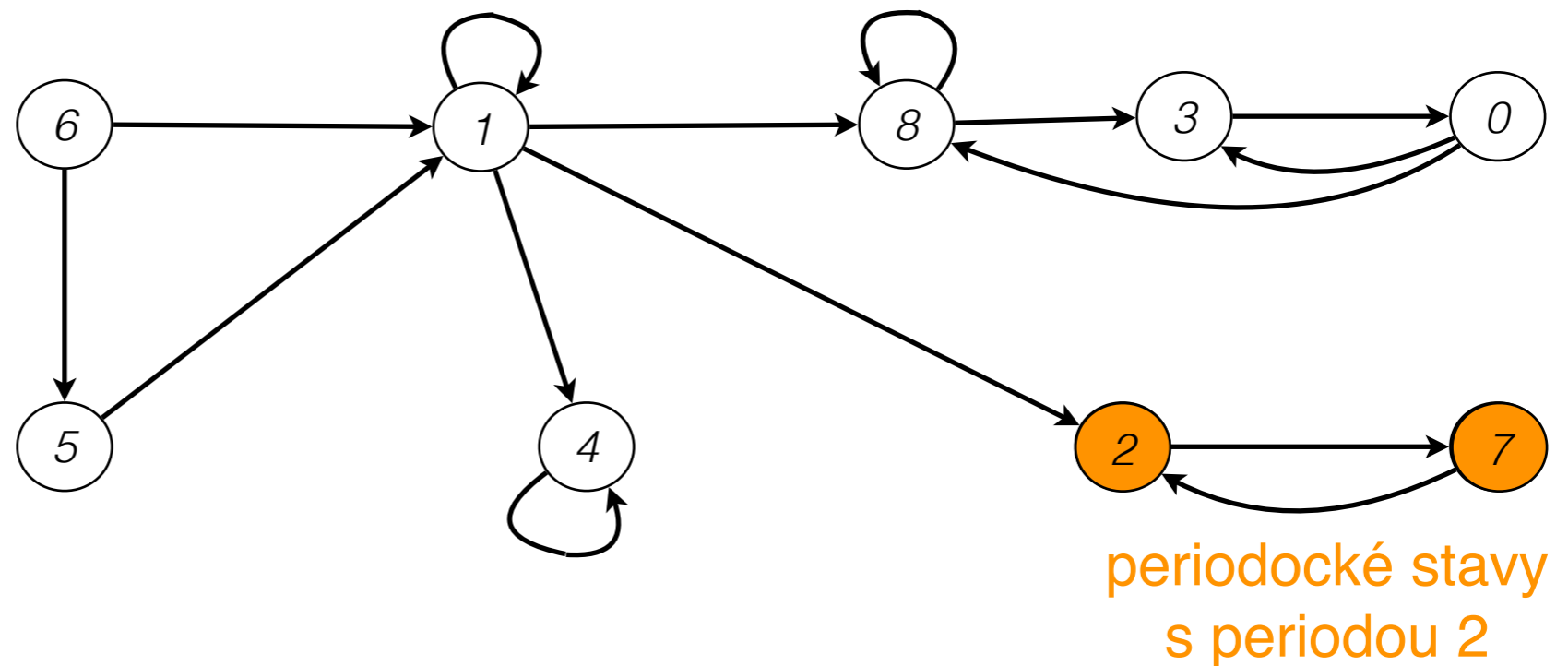
Tvrzení 3: Jestliže je stav $i \in I$ podstatný, potom je $\overline{\{i\}} = C(i)$.

Cvičení 3: Najděte uzávěry stavů 1, 5 a 6.

Homogenní Markovský řetězec s konečně mnoha stavy

Klasifikace stavů:

- stav $i \in I$ je absorpční, pokud je $\{i\}$ uzavřená množina.
- stav $i \in I$ je periodický s periodou $d_i \in \mathbb{N}$, je-li d_i největším společným dělitelem všech $n \in \mathbb{N}$ takových, že $p_{ii}^{(n)} > 0$.



Tvrzení 4: Dva sousledné stavy $i, j \in I$ mají stejné periody.

Homogenní Markovský řetězec s konečně mnoha stavy

Pravděpodobnost prvního dosažení stavu j ze stavu i :

Označme $f_{ij}^{(n)} = P(X_{t+n} = j, X_{t+n-1} \neq j, \dots, X_{t+1} \neq j \mid X_t = i)$

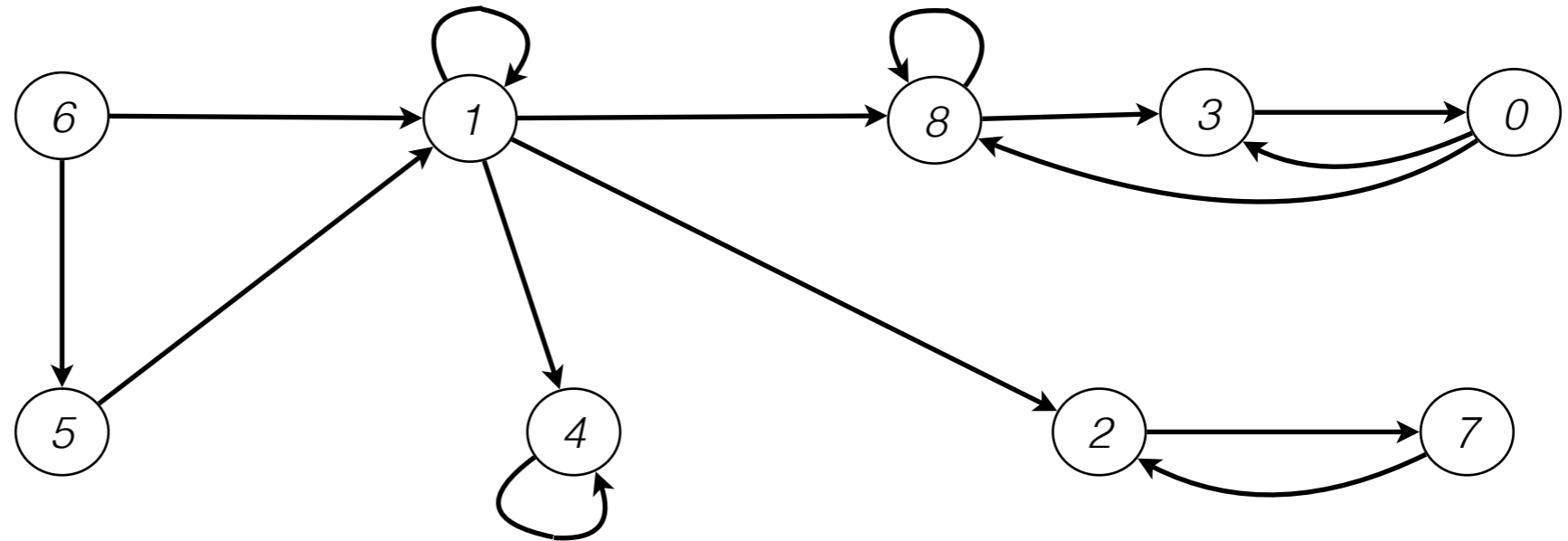
$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$ = pravděpodobnost, že homogenní Markovský řetězec vycházející ze stavu i vůbec někdy dosáhne stavu j .

$$f_{ij}^{(k)} = p_{ij}^{(k)} - \sum_{s=1}^{k-1} f_{ij}^{(s)} p_{jj}^{(k-s)}$$

$$f_{ii}^{(k)} = p_{ii}^{(k)} - \sum_{s=1}^{k-1} f_{ii}^{(s)} p_{ii}^{(k-s)}$$

Homogenní Markovský řetězec s konečně mnoha stavy

Příklad:



Homogenní Markovský řetězec s konečně mnoha stavy

Klasifikace stavů:

Tvrzení 6: Stav i je přechodný právě když $\sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}^{(k)} < \infty$.

Příklad: Ukažte, že stav 1 je periodický s periodou 2 a přitom je přechodný. Najděte stacionární rozdělení daného řetězce, pokud existuje.

