# Pravděpodobnost a matematická statistika

prof. RNDr. Gejza Dohnal, CSc.
dohnal@nipax.cz

## VII. Náhodné procesy

https://sms.nipax.cz/pas

# Náhodné procesy

Uvažujme funkci dvou proměnných $X(\omega,t) = X_t(\omega)$:

$$X : \Omega \times R \longrightarrow R$$

Systém konečněrozměrných distribučních funkcí:

$$F(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n) = P(X_{t_1} \leq x_1,\ldots,X_{t_n} \leq x_n)$$

symetrie: $F(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n) = F(x_{j_1},\ldots,x_{j_n};t_{j_1},\ldots,t_{j_n})$
pro libovolnou permutaci $(j_1,\ldots,j_n)$ čísel $(1,\ldots,n)$
(nezáleží na pořadí)

konzistence: $\lim\limits_{x_n \to \infty} F(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n) = F(x_1,\ldots,x_{n-1};t_1,\ldots,t_{n-1})$

funkce střední hodnoty: $\mu_t = E(X_t),\ t \in R$

autokovarianční funkce: $c(s,t) = Cov(X_s,X_t) = E(X_sX_t) - E(X_s)E(X_t)$

autokorelační funkce: $r(s,t) = \rho(s,t) = \dfrac{Cov(X_s,X_t)}{\sqrt{Var(X_s)Var(X_t)}}$

# Náhodné procesy

Náhodný proces $X_t, t \in R$ je *kovariančně (slabě) stacionární,* pokud je $\mu_t = \mu,\ t \in R$ a platí $c(s,t) = c(t-s)$ pro všechna $s$ a $t$.

Náhodný proces $X_t, t \in R$ je *silně stacionární,* pokud pro libovolnou $n$-tici $t_1, \ldots, t_n$ a libovolné $\delta > 0$ platí

$$F(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = F(x_1, \ldots, x_n; t_1 + \delta, \ldots, t_n + \delta)$$

Náhodný proces $X_t, t \in R$ má *nezávislé (nekorelované) přírůstky,* pokud pro libovolnou čtveřici časů $s_1,\ t_1,\ s_2,\ t_2$ jsou náhodné veličiny $(X_{t_1} - X_{s_1}),\ (X_{t_2} - X_{s_2})$ stochasticky nezávislé (nekorelované).

# Náhodné procesy

Příklady náhodných procesů:

1) Poissonův proces $N_t$:
   - $N_0=0$
   - má nezávislé přírůstky ($(N_t - N_s)$ a $(N_u-N_v)$ jsou stoch. nezávislé)
   - $(N_t - N_s)$ má Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda(t-s)$.

2) Standardní Wienerův proces $\{W_t, t\geq 0\}$:
   - P$(W_0=0)=1$ (skoro jistě)
   - má nezávislé přírůstky, tj. pro libovolné $0 \leq t_1 < \ldots < t_n$ jsou $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ stoch. nezávislé náh. vel.
   - $(W_t - W_s)$ má normální rozdělení N$(0, \sigma^2|t-s|)$.

3) Obecný Wienerův proces $\{W_t, t\geq 0\}$ (s driftem):
   - P$(W_0=0)=1$ (skoro jistě)
   - má nezávislé přírůstky, tj. pro libovolné $0 \leq t_1 < \ldots < t_n$ jsou $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ stoch. nezávislé náh. vel.
   - $(W_t - W_s)$ má normální rozdělení N$(\mu(t-s), \sigma^2|t-s|)$.

# Náhodné procesy

Ukažte, že pro standardní Wienerův proces $\{W(t),\, t \geq 0\}$ jsou následující procesy opět standardní Wienerovy procesy:

1) $X_t = cW(t/c^2), \quad t \geq 0, \ \ c > 0$

2) $Y_t = W(t+h) - W(h), \quad t \geq 0, \ \ h > 0$

3) $Z_t = tW(1/t), \quad t > 0, \ \ h > 0$
$Z_0 = 0$

# Markovské procesy

Náhodný proces $\{X_t,\ t \in T\}$ se stavy v množině $H$ splňuje tzv. Markovskou vlastnost, jestliže platí

$$P(X_{t_n} = x_n \,|\, X_{t_{n-1}} = x_{n-1},\ X_{t_{n-2}} = x_{n-2},\ \ldots,\ X_{t_{n-k}} = x_{n-k}) = P(X_{t_n} = x_n \,|\, X_{t_{n-1}} = x_{n-1}) = p(t_{n-1}, t_n; x_{n-1}, x_n)$$

pro libovolné časy $0 \leq t_{n-k} < \ldots < t_n$ a hodnoty $x_\mathrm{n}, \ldots, x_{n-k} \in H$.

Rozlišujeme:

- procesy v diskrétním čase (řetězce, posloupnosti), $T=N$
- procesy ve spojitém čase, $T=R^+$
- procesy s konečně mnoha diskrétními stavy $H=\{1,2,\ldots,m\}$
- procesy s nekonečně mnoha diskrétními stavy $H=\{1,2,\ldots\}$
- procesy se spojitými stavy $H \subset R$
- .....

# Markovské řetězce

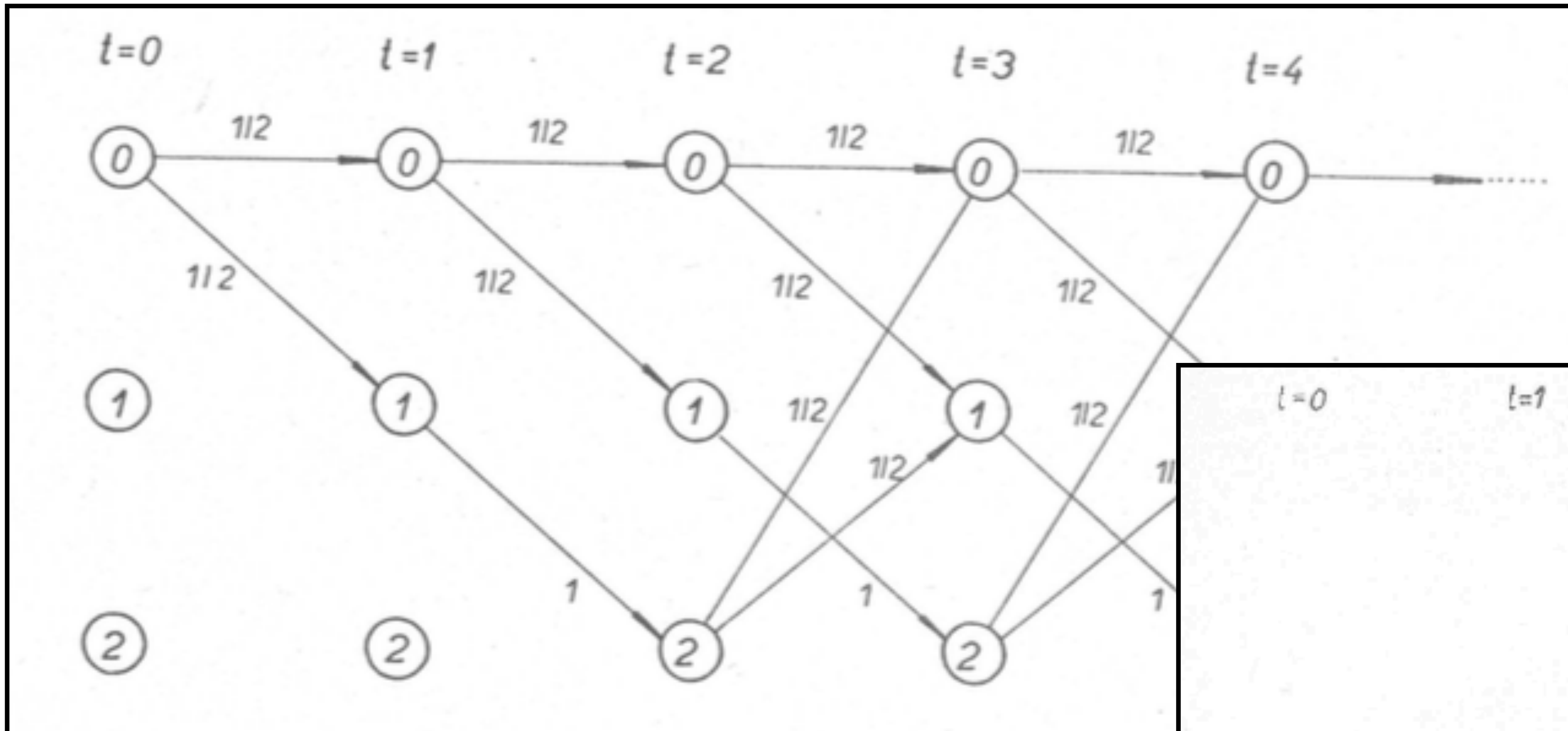
Náhodný proces $\{X_t,\ t \in N\}$ v diskrétním čase se spočetně mnoha stavy splňuje Markovskou vlastnost, jestliže platí

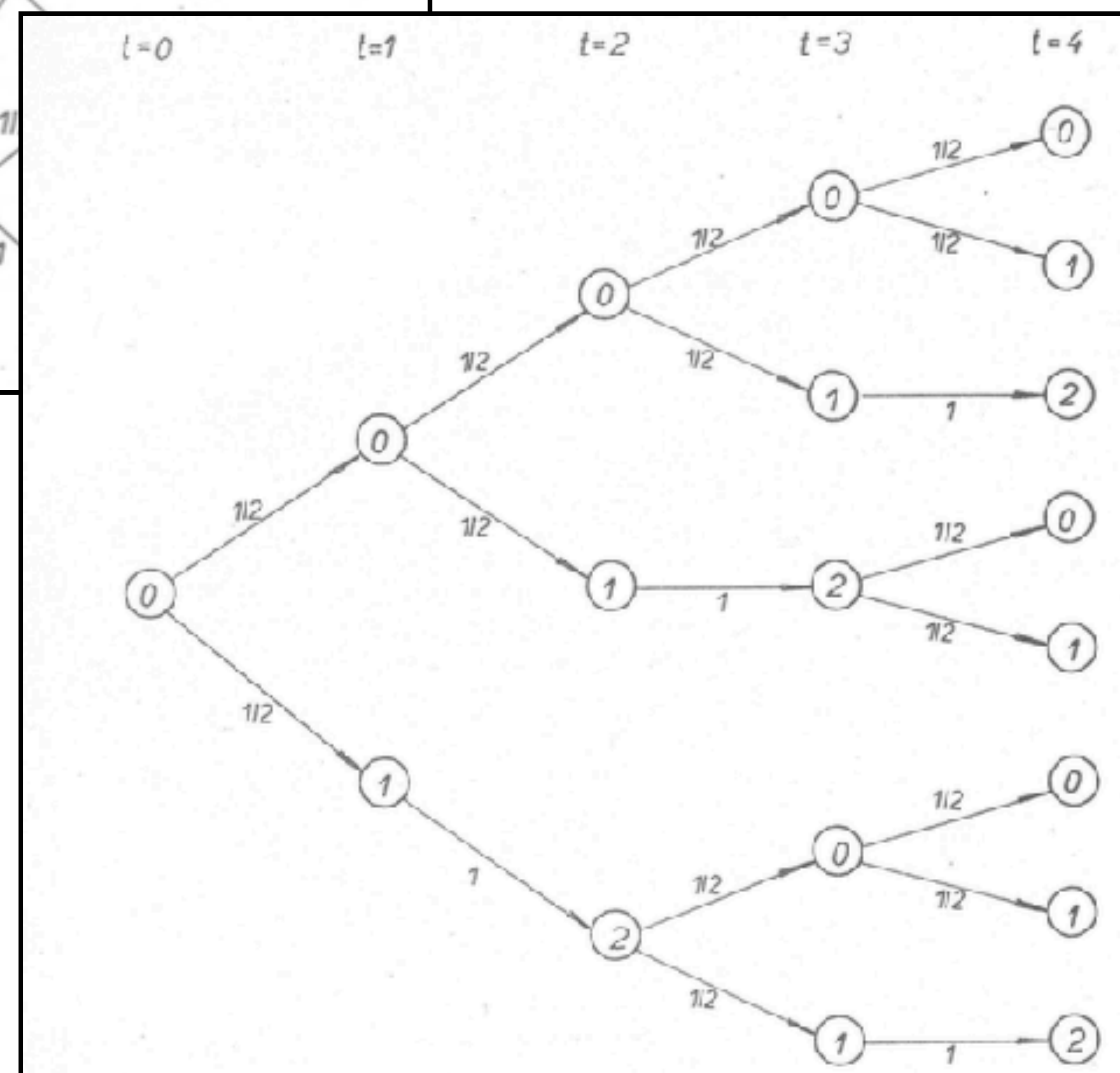
$$P(X_n = i \,|\, X_{n-1} = j,\, X_{n-2} = j_2,\, \ldots,\, X_{n-k} = j_k) =$$
$$P(X_n = i \,|\, X_{n-1} = j) = p(i, j; n, n-1) = p_{i,j}(n)$$

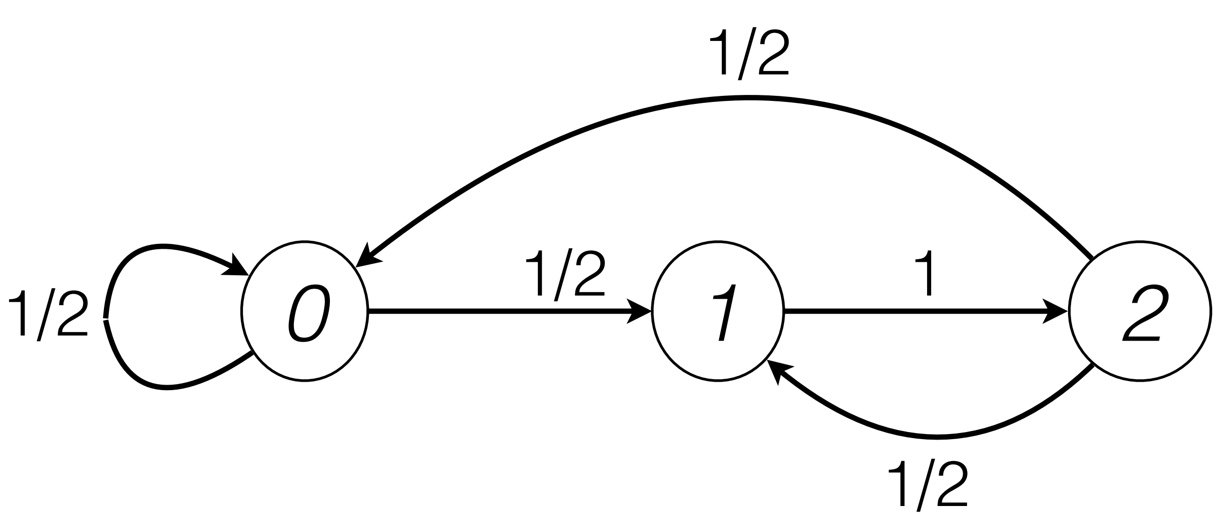
pro libovolné časy $0 \leq n\text{-}k < \ldots < n$ a stavy $i, j, j_2, \ldots, j_k$ .

- jedná se o Markovský řetězec

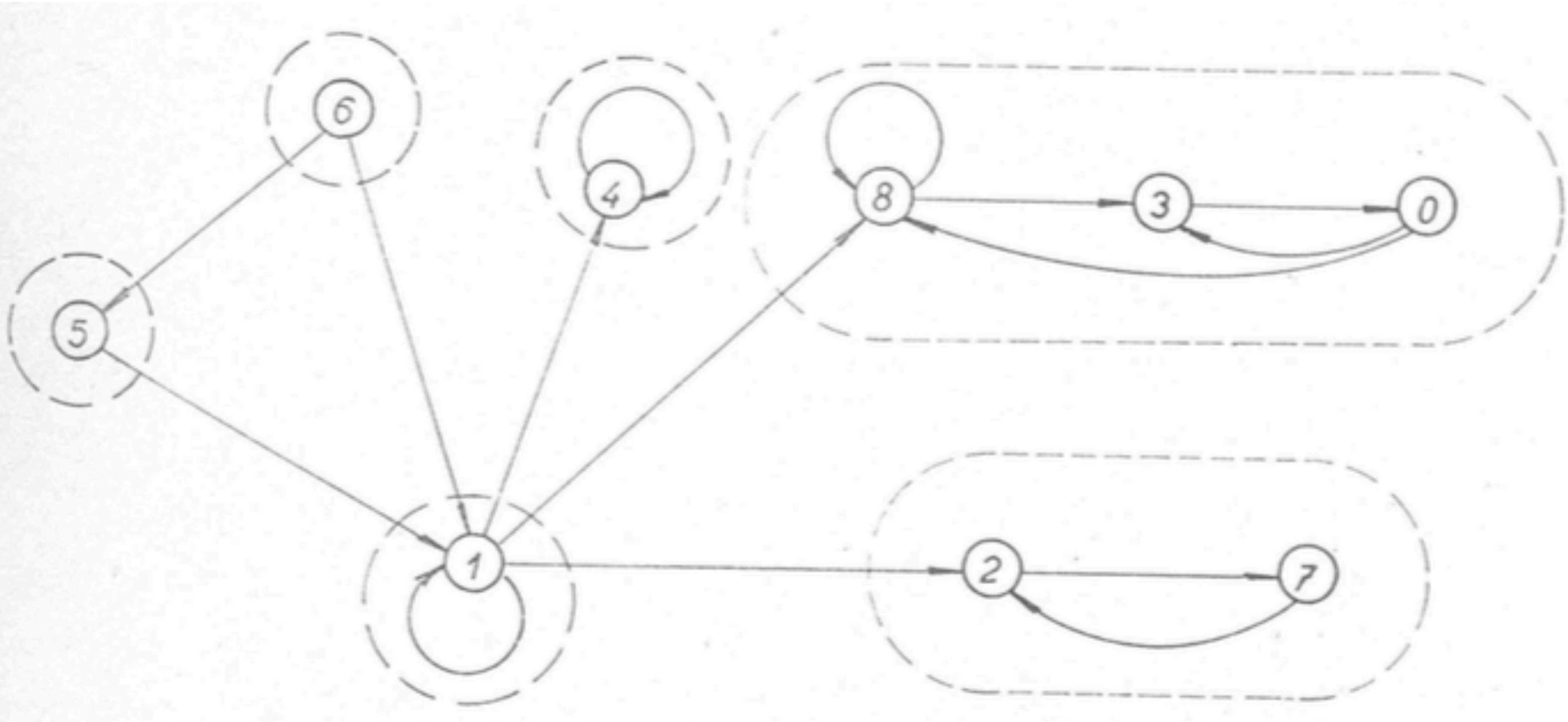
# Markovské řetězce

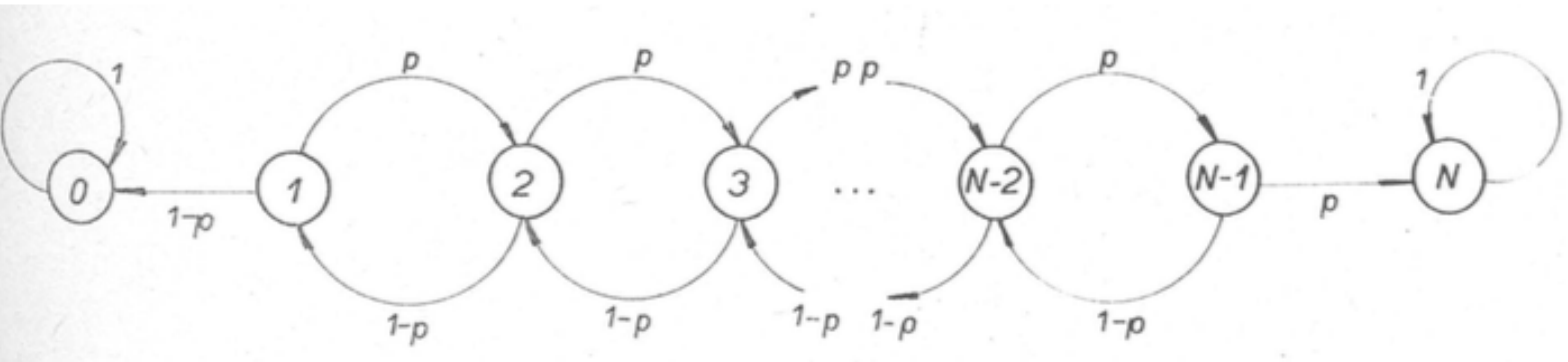


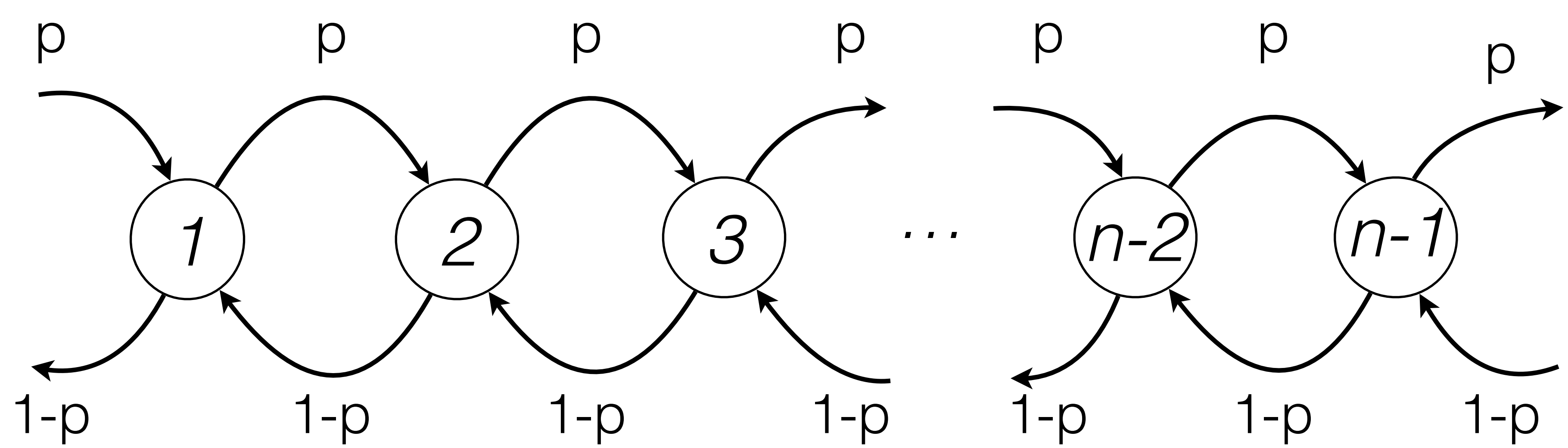



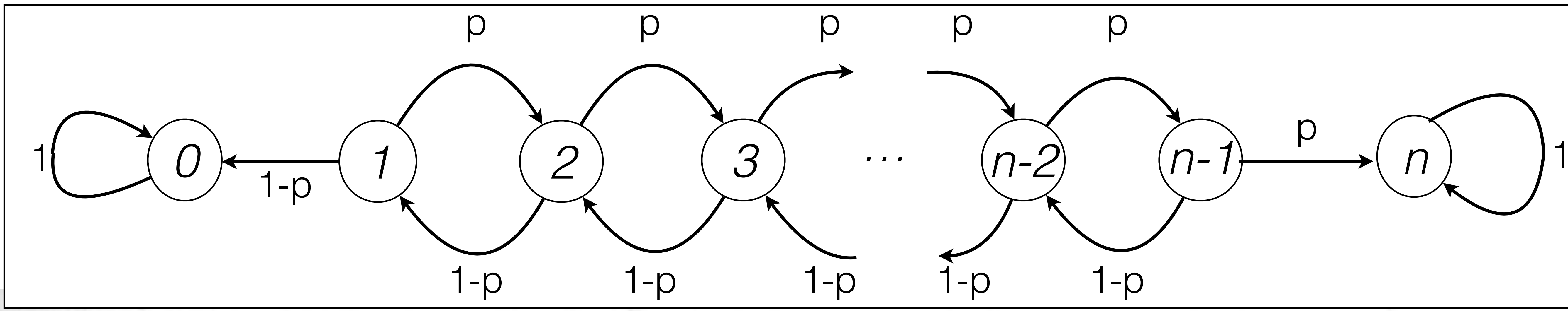
# Markovské řetězce

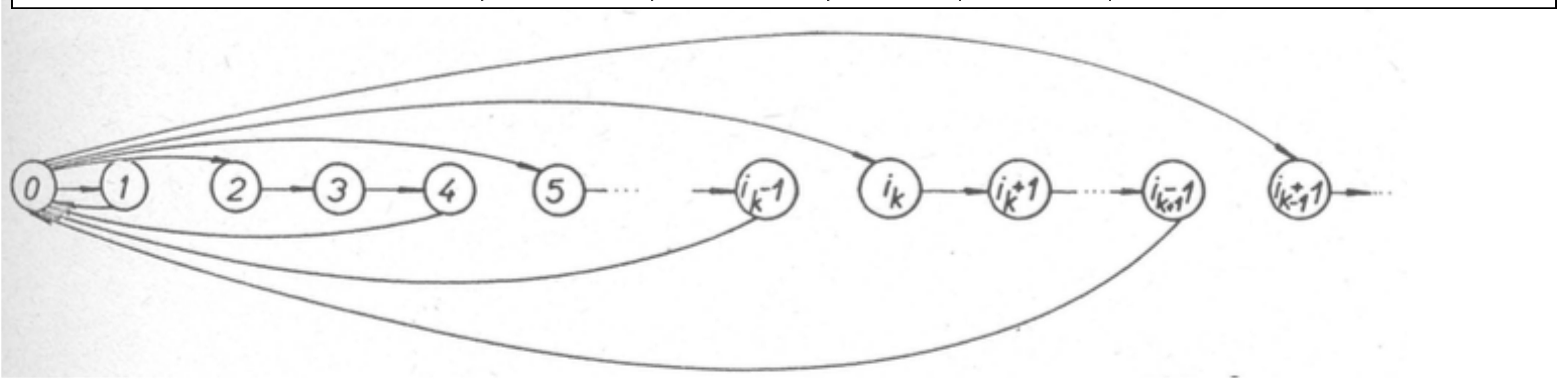


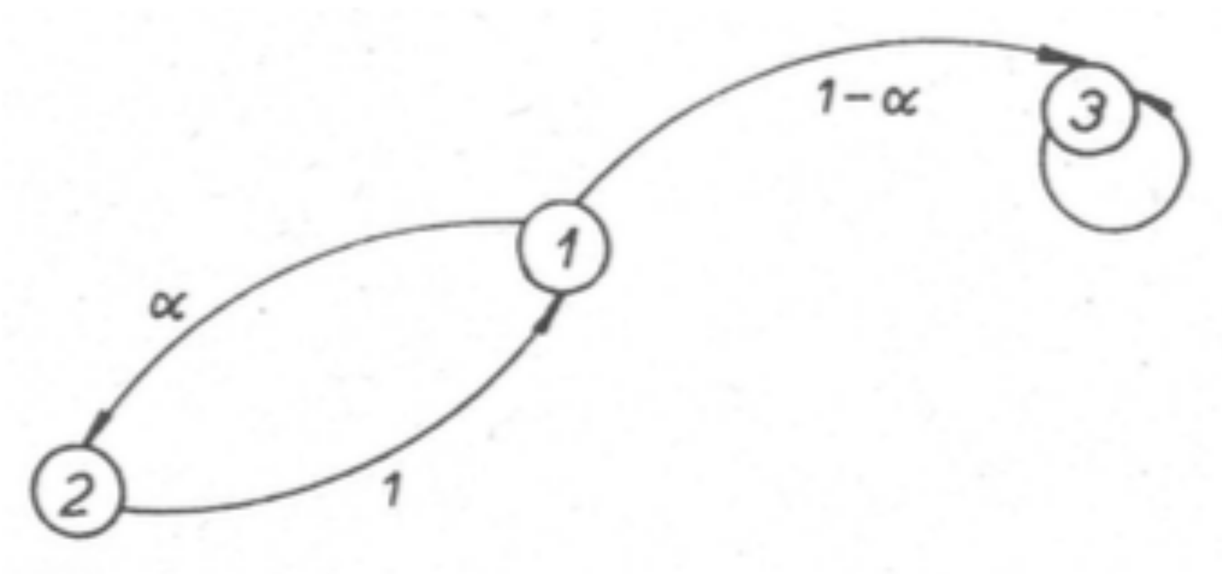
# Markovské řetězce

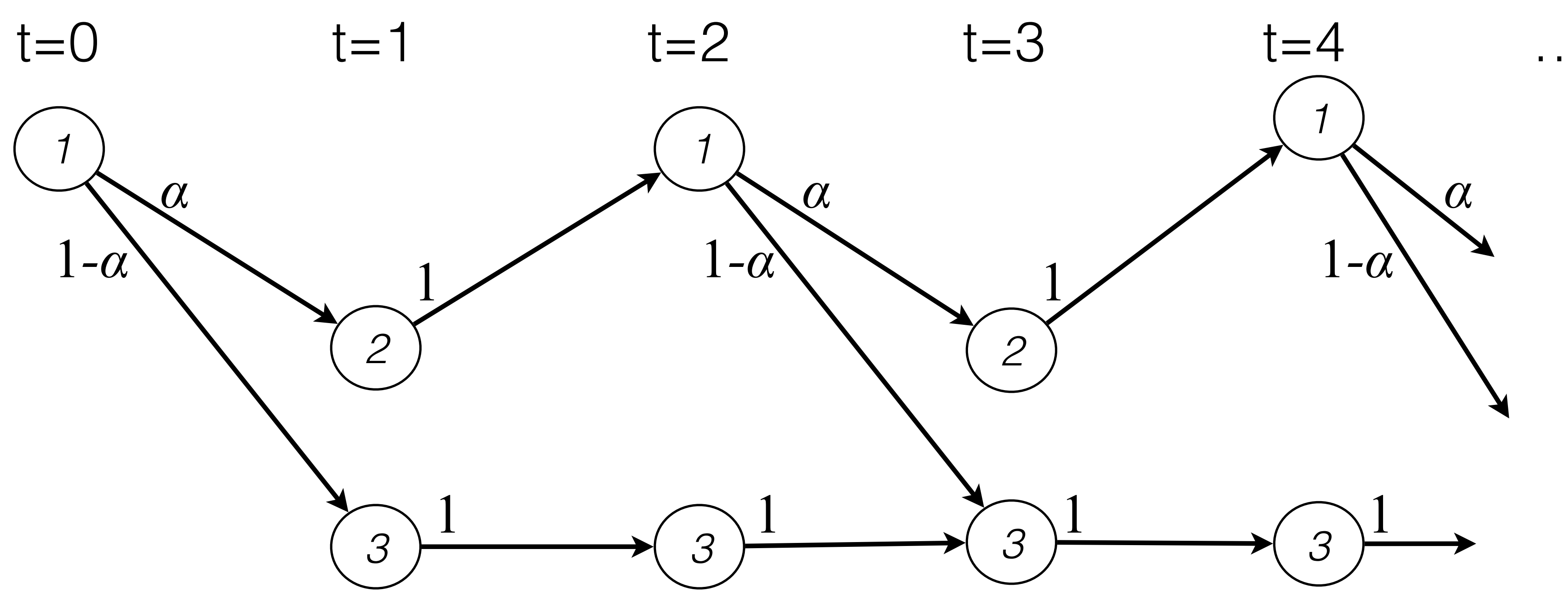


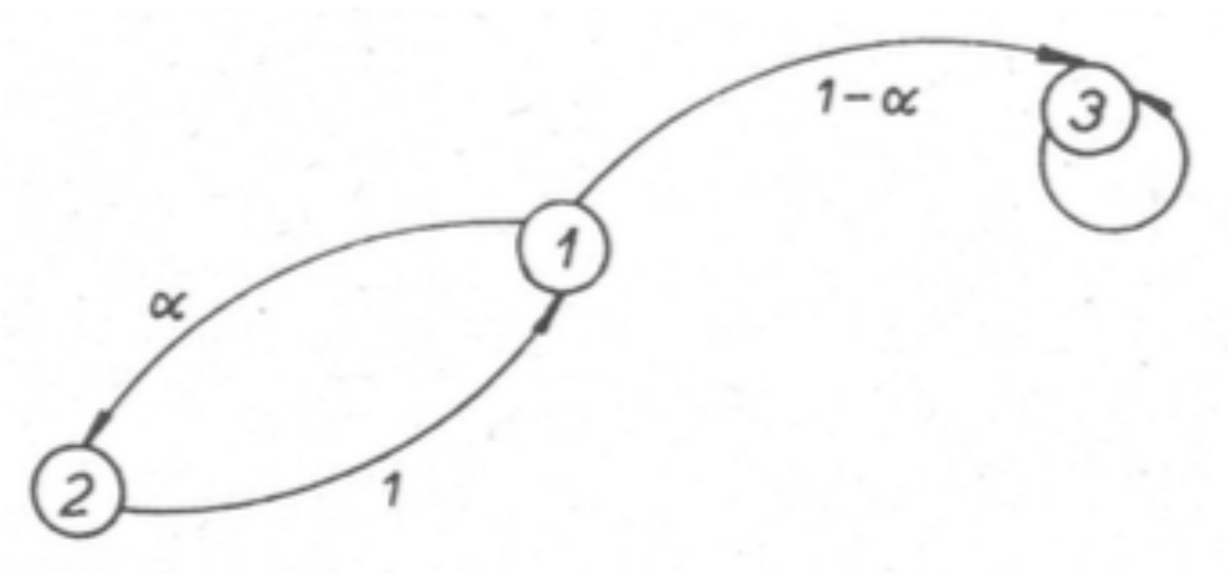



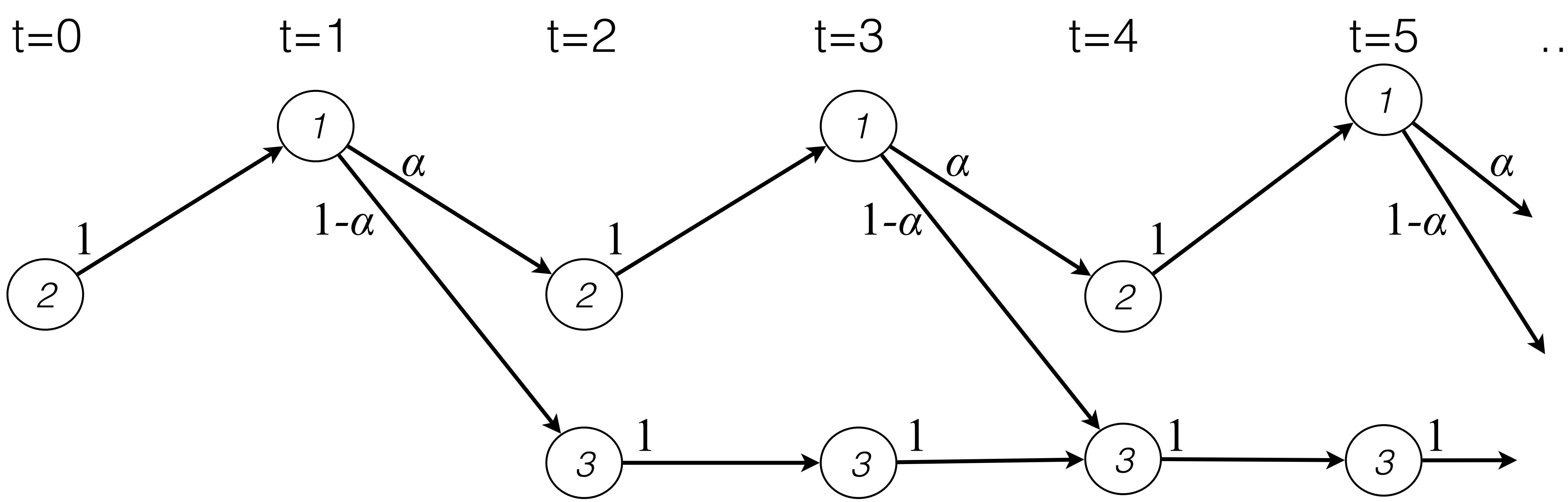
# Markovské řetězce



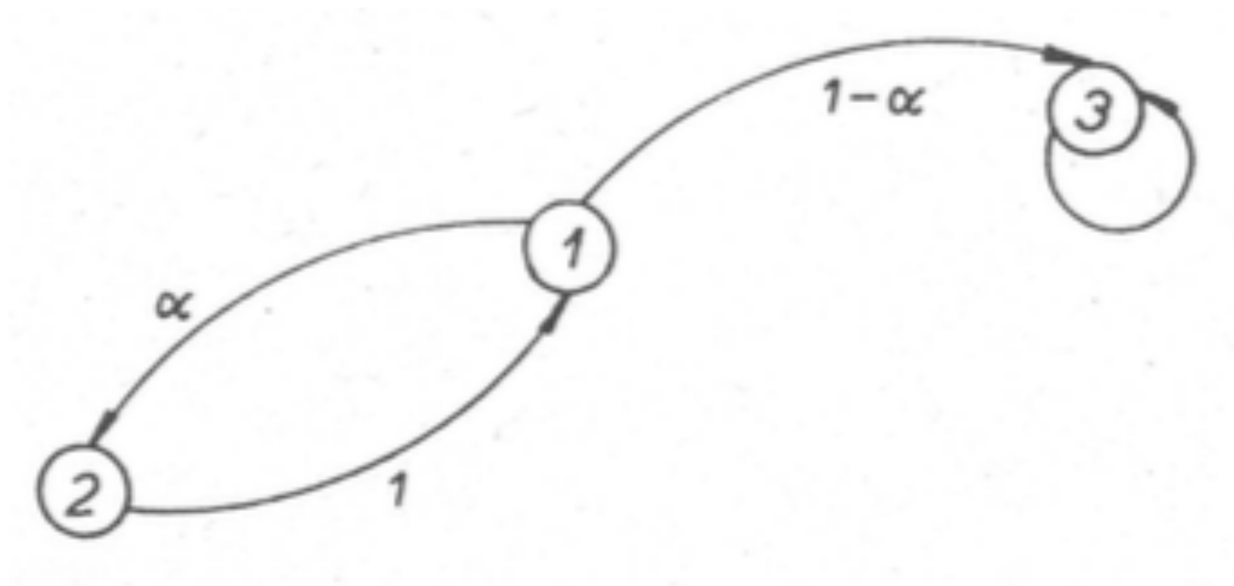



# Markovské řetězce

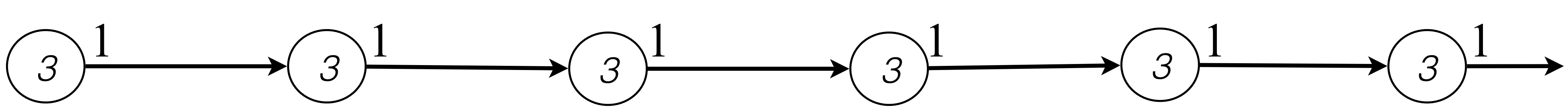


# Markovské řetězce




t=0 t=1 t=2 t=3 t=4 t=5 …



# Homogenní Markovský řetězec s konečně mnoha stavy

- homogenní Markovský řetězec, Markovská posloupnost

- předpokládáme $X_n \in \{1, 2, \ldots, m\}, \quad n = 1, 2, \ldots$

nezávisí na n

$$P(X_n = j \,|\, X_{n-1} = i) = p_{ij}, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, m$$

$$P = \left( p_{ij} \right)_{i=1,2,\ldots,m}^{j=1,2,\ldots,m}$$

- matice pravděpodobností přechodu po jednom kroku

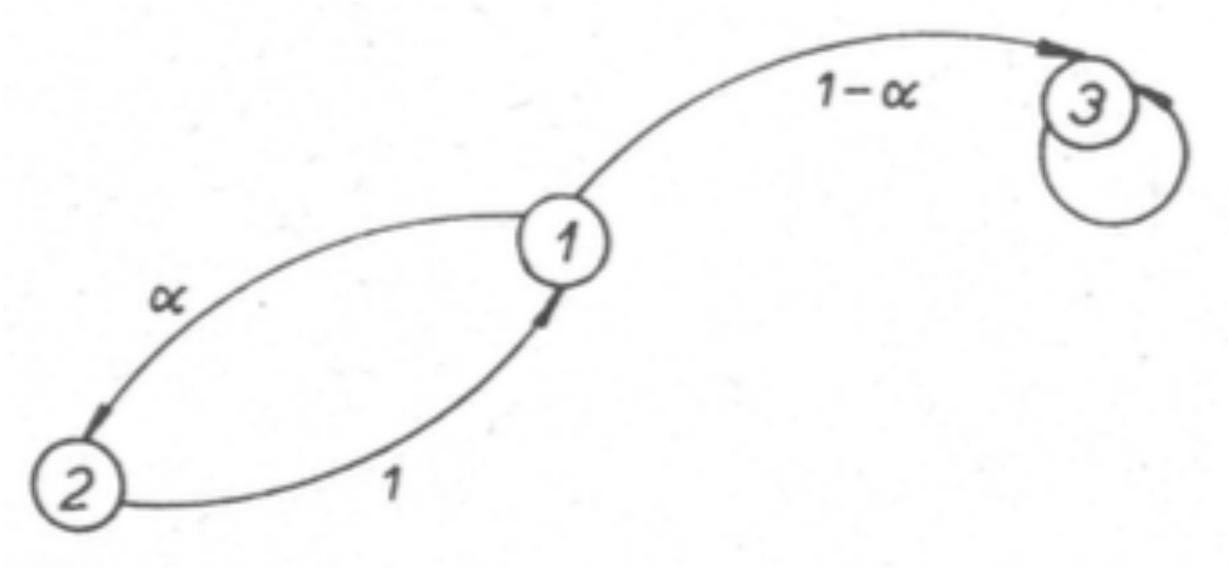
- stochastická matice: $P.\vec{e}^{\,T} = \vec{e}$

$$\vec{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m)$$

- vektor počátečního rozdělení: $\vec{\pi}\vec{e}^{\,T} = 1$

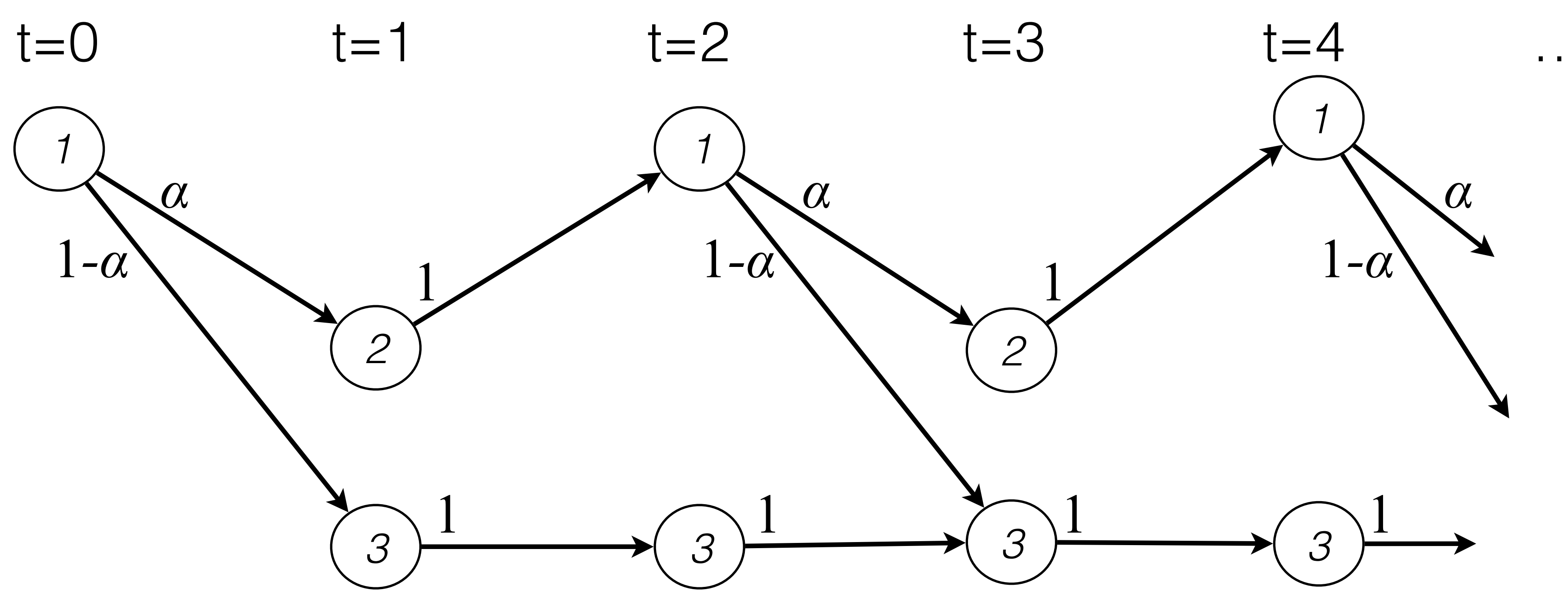
(vektory zde chápeme jako řádkové)

# Homogenní Markovský řetězec s konečně mnoha stavy

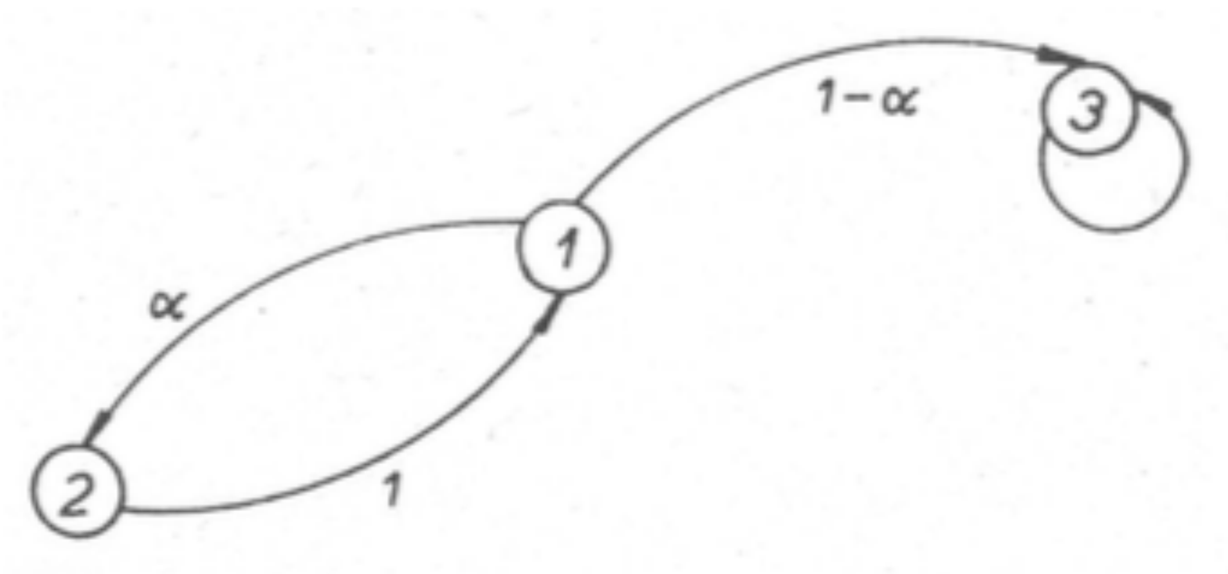



$$P = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 1-\alpha \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\pi} = (1,\, 0,\, 0)$$

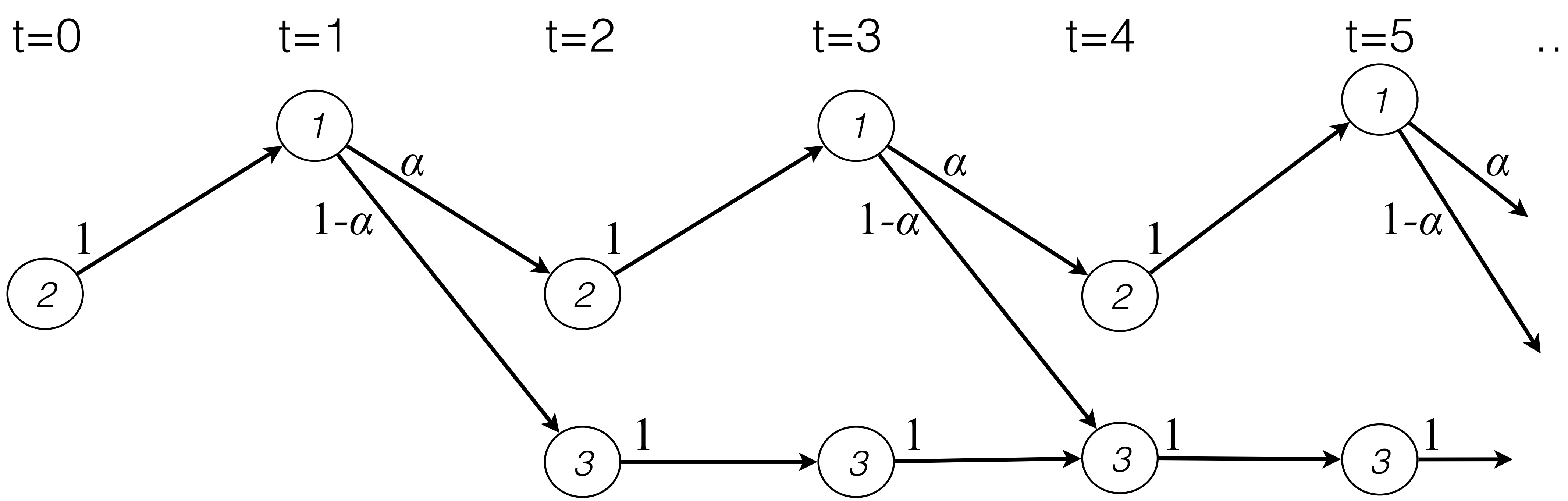


# Homogenní Markovský řetězec
# s konečně mnoha stavy

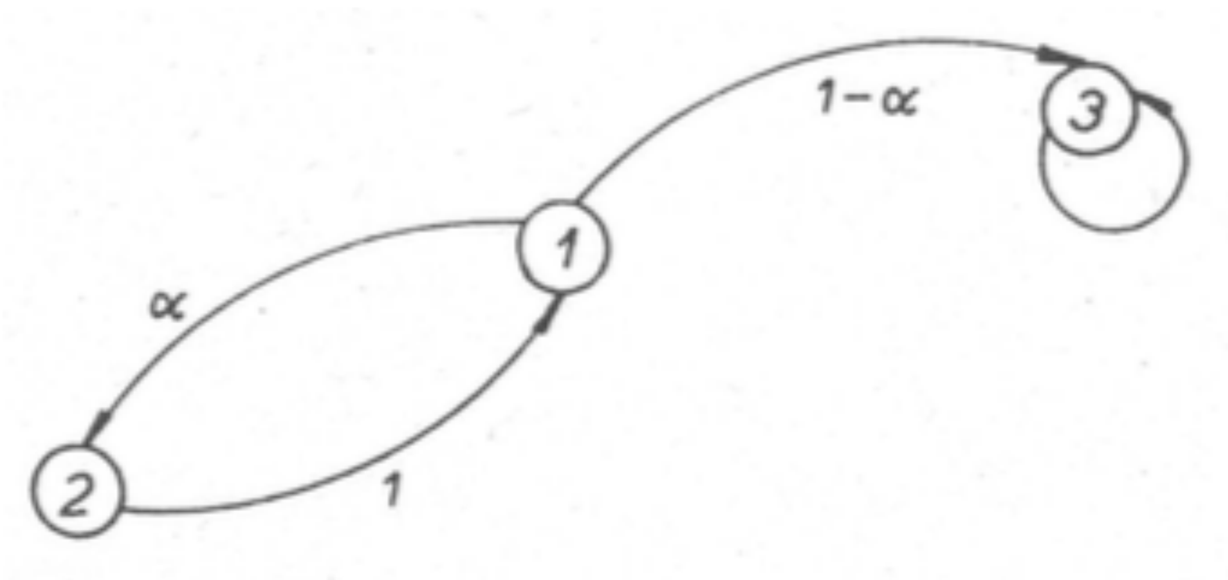



$$P = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 1-\alpha \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\pi} = (0,\ 1,\ 0)$$



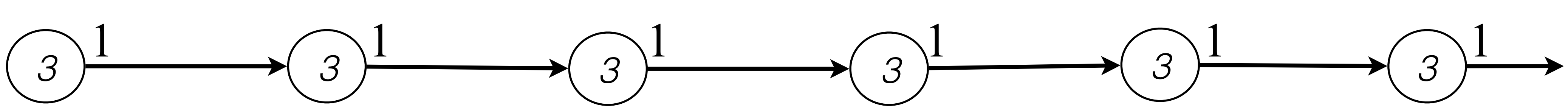
# Homogenní Markovský řetězec s konečně mnoha stavy




$$P = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 1-\alpha \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\pi} = (0,\ 0,\ 1)$$

t=0 t=1 t=2 t=3 t=4 t=5 …



# Homogenní Markovský řetězec s konečně mnoha stavy

Chapman - Kolmogorovova rovnost (pro dva kroky):

Nechť $\{X_n\}$ je homogenní Markovův řetězec s konečně mnoha stavy a maticí přechodu $P$. Potom pro libovolné dva stavy $i,j$ a libovolné $n > 1$ platí

$$P(X_n = j \mid X_{n-2} = i) = \sum_{k=1}^{m} p_{ik}.p_{kj}$$

- $P(X_n = j \mid X_{n-2} = i) = p_{ij}^{(2)}$ vyjadřuje pravděpodobnost přechodu řetězce $\{X_n\}$ ze stavu $i$ do stavu $j$ po dvou krocích

$$\left(p_{ij}^{(2)}\right)_{i=1,\ldots,m}^{j=1,\ldots,m} = P^2$$

# Homogenní Markovský řetězec s konečně mnoha stavy

## Chapman - Kolmogorovova rovnost (obecně):

Nechť $\{X_n\}$ je homogenní Markovův řetězec s konečně mnoha stavy a maticí přechodu $P$. Potom pro libovolné dva stavy $i,j$ a libovolná $n > s > r > 0$ platí

$$P(X_n = j \mid X_r = i) = p_{ij}^{(n-r)} = \sum_{k=1}^{m} p_{ik}^{(s-r)} p_{kj}^{(n-s)}$$

- pro homogenní řetězec stačí

$$P(X_n = j \mid X_0 = i) = p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} p_{ik}^{(s)} p_{kj}^{(n-s)}$$

- je zřejmě $\left(p_{ij}^{(n)}\right)_{i=1,\dots,m}^{j=1,\dots,m} = P^n$

# Homogenní Markovský řetězec s konečně mnoha stavy

Označme $p_i(n)$ pravděpodobnost, že řetězec bude v čase $n$ ve stavu $i$. Zřejmě je $p_i(0) = \pi_i$ .

- podle Ch-K rovnosti je zřejmě $$p_i(1) = \sum_{k=1}^{m} \pi_k . p_{ki}$$

a dále $$p_i(n) = \sum_{k=1}^{m} \pi_k . p_{ki}^{(n)}$$

- označíme-li $\vec{p}(n) = (p_1(n), p_2(n), \ldots, p_m(n))$ , potom je zřejmě

$$\vec{p}(n) = \vec{\pi}.P^n$$

nebo také $$\vec{p}(n) = \vec{p}(n-1).P$$

obecně $$\vec{p}(n) = \vec{p}(s).P^{n-s}$$ pro libovolné $n > s > 0$

# Homogenní Markovský řetězec s konečně mnoha stavy

Zajímá nás, jak se bude chovat řetězec po dlouhé době běhu.

- hledáme $\vec{p}^* = \lim_{n\to\infty} \vec{p}(n)$ pokud existuje
  - tzv. stacionární rozdělení

Lze ukázat, že stacionární rozdělení je řešením soustavy rovnic $\vec{p}^* = \vec{p}^*.P$ s podmínkou $\vec{p}^* \vec{e}^T = 1$ .

Příklad: Najděte stacionární rozdělení řetězce s maticí pravděpodobností přechodu

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 1-\alpha \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(pokud existuje).

# Homogenní Markovský řetězec s konečně mnoha stavy

Klasifikace stavů:

- stav $j \in \boldsymbol{I}$ je dosažitelný z $i \in \boldsymbol{I}$, když existuje $n \in \boldsymbol{N}$ tak, že $p_{ij}^{(n)} > 0$ .
- stavy $i$ a $j$ jsou sousledné, když jsou vzájemně dosažitelné.
- stav $i$ je podstatný, když je sousledný s každým stavem $j$, který je z něho dosažitelný.

Cvičení 1: Ukažte, že jsou-li $i,j,k \in \boldsymbol{I}$ libovolné stavy takové, že $j$ je dosažitelný z $k$ a $k$ je dosažitelný z $i$, potom je i $j$ dosažitelný z $i$.

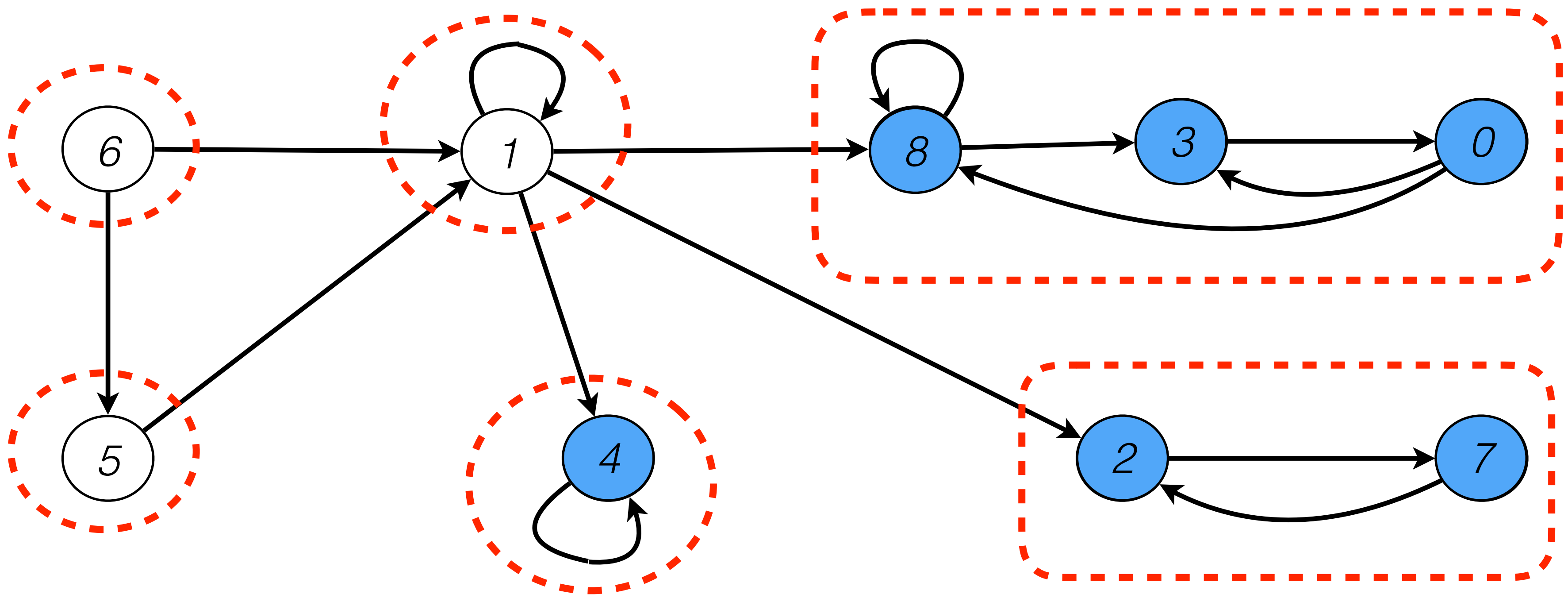
Cvičení 2: Ukažte, že je-li $i \in \boldsymbol{I}$ sousledný se stavem $j \in \boldsymbol{I}$, potom
a) $i$ je sousledný sám se sebou
b) když stav $k$ je sousledný s $j$, potom je $k$ sousledný i se stavem $i$.

Cvičení 3: Ukažte, že je-li $i \in \boldsymbol{I}$ podstatný stav a $j \in \boldsymbol{I}$ je dosažitelný ze stavu $i$, potom stav $j$ je podstatný.

# Homogenní Markovský řetězec s konečně mnoha stavy

## Klasifikace stavů:

Označme $C(i)$ množinu obsahující stav $i$ a všechny stavy s ním sousledné.




$C(1) = \{1\}$

$C(4) = \{4\}$

$C(5) = \{5\}$

$C(6) = \{6\}$

$C(2) = \{2,7\} = C(7)$

$C(3) = \{0,3,8\} = C(0) = C(8)$

# Homogenní Markovský řetězec
# s konečně mnoha stavy

Klasifikace stavů:

Množina stavů $E \subset I$ je uzavřená když pro každé $i \in E$ platí

$$\sum_{j \in E} p_{ij} = 1$$

Tvrzení 1: Je-li $E \subset I$ uzavřená množina stavů, potom pro každé $n \geq 0$ a $i \in E$ platí

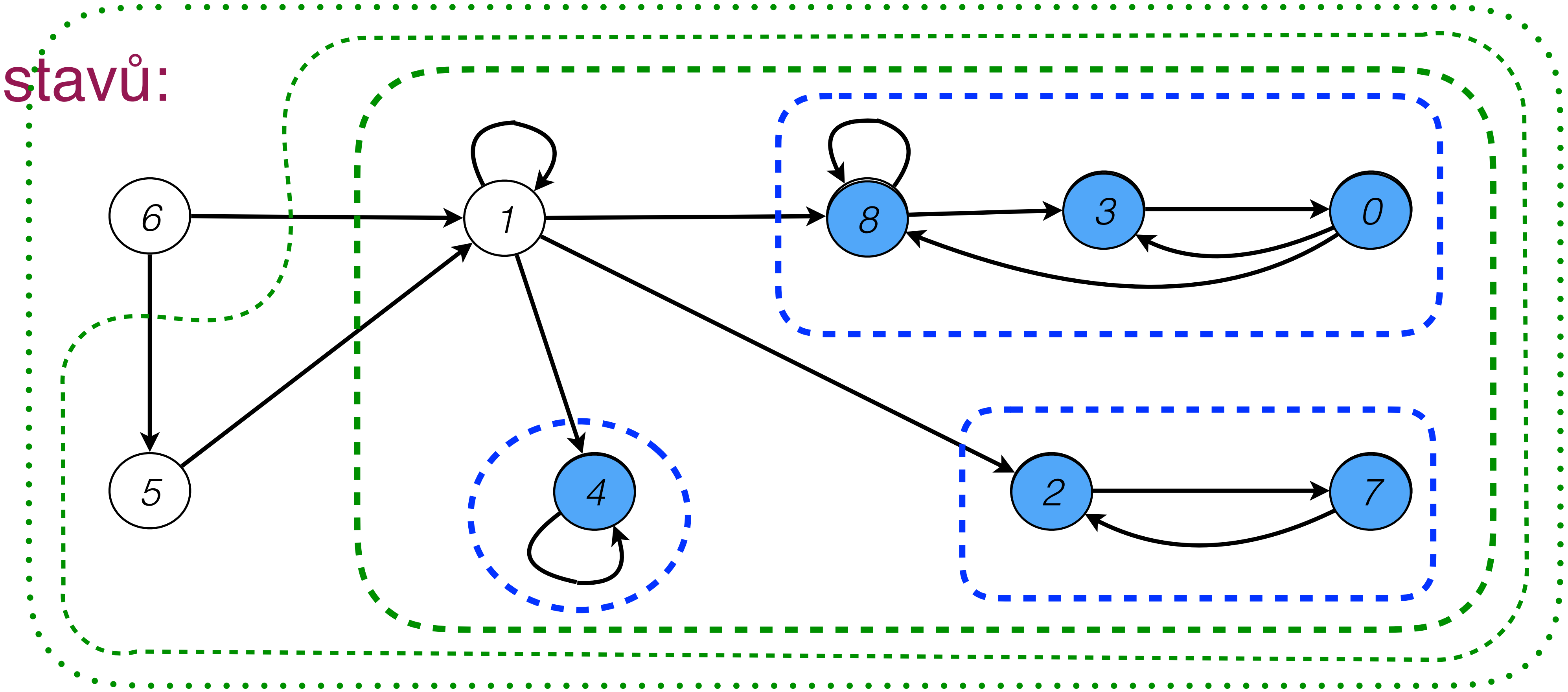
$$\sum_{j \in E} p_{ij}^{(n)} = 1$$

Tvrzení 2: Množina stavů $E \subset I$ je uzavřená právě tehdy, když $p_{ij} = 0$ pro každé $i \in E$ a $j \in I$-$E$.

Uzávěr množiny $E \subset I$ je uzavřená množina $\bar{E}$ taková, že každá uzavřená množina obsahující $E$ obsahuje i $\bar{E}$.

# Homogenní Markovský řetězec s konečně mnoha stavy

Klasifikace stavů:




Tvrzení 3: Jestliže je stav $i \in I$ podstatný, potom je $\overline{\{i\}} = C(i)$.

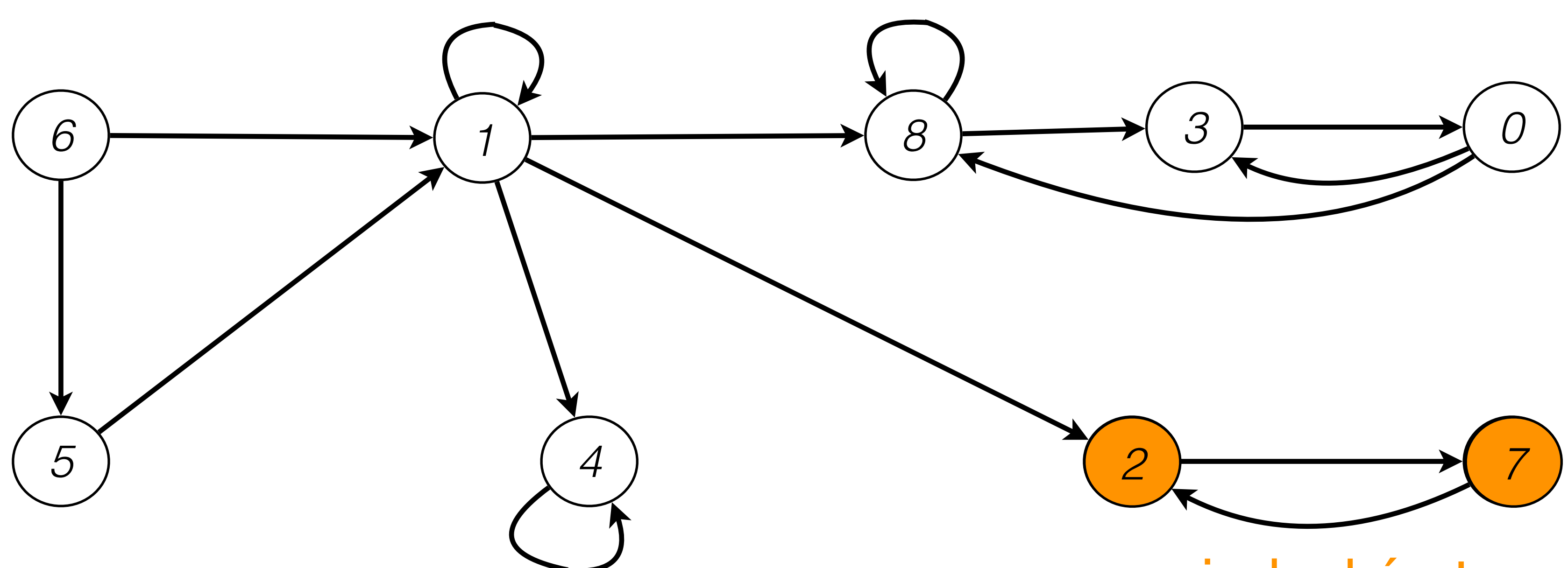
Cvičení 3: Najděte uzávěry stavů $1, 5$ a $6$.

# Homogenní Markovský řetězec s konečně mnoha stavy

## Klasifikace stavů:

- stav $i \in I$ je absorbční, pokud je $\{i\}$ uzavřená množina.

- stav $i \in I$ je periodický s periodou $d_i \in N$, je-li $d_i$ největším společným dělitelem všech $n \in N$ takových, že $p_{ii}^{(n)} > 0$.




Tvrzení 4: Dva sousledné stavy $i,j \in I$ mají stejné periody.

# Homogenní Markovský řetězec s konečně mnoha stavy

Pravděpodobnost prvního dosažení stavu $j$ ze stavu $i$:

Označme $f_{ij}^{(n)} = P(X_{t+n} = j, X_{t+n-1} \neq j, \ldots, X_{t+1} \neq j \,|\, X_t = i\,)$

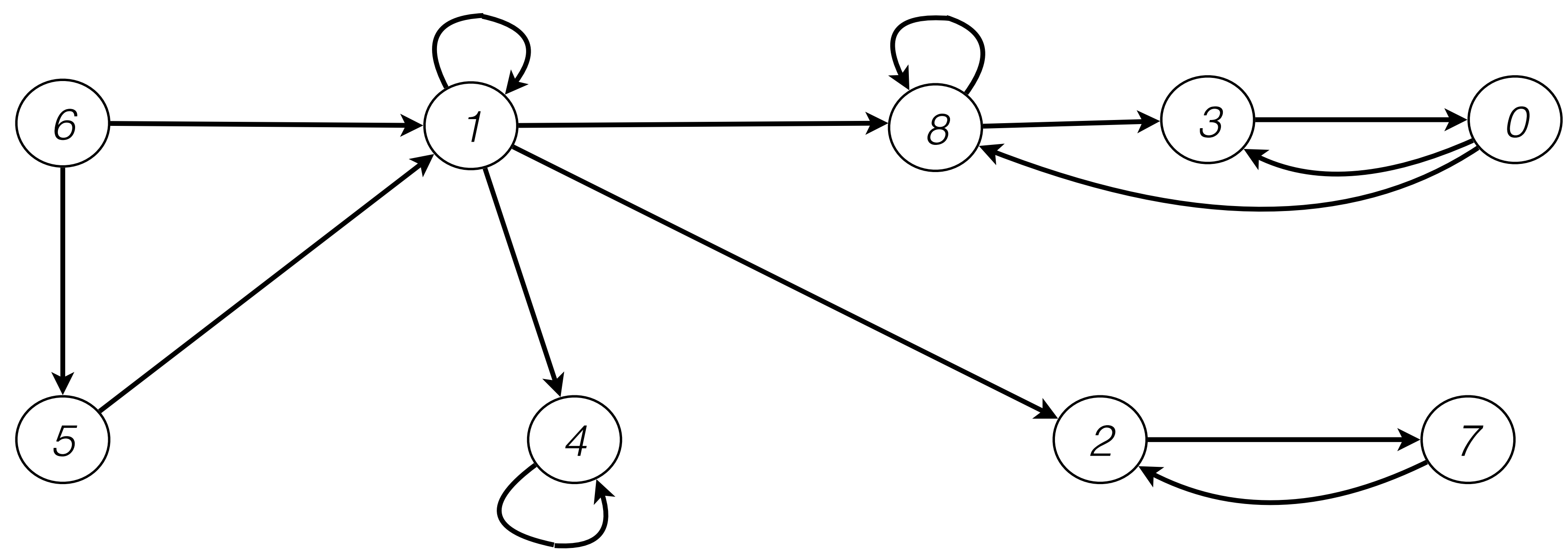
$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$$

= pravděpodobnost, že homogenní Markovský řetězec vycházející ze stavu $i$ vůbec někdy dosáhne stavu $j$.

$$f_{ij}^{(k)} = p_{ij}^{(k)} - \sum_{s=1}^{k-1} f_{ij}^{(s)} p_{jj}^{(k-s)}$$

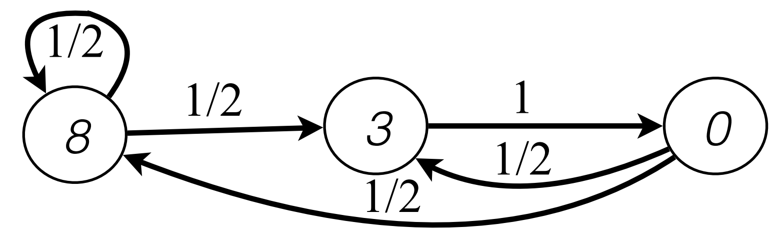
$$f_{ii}^{(k)} = p_{ii}^{(k)} - \sum_{s=1}^{k-1} f_{ii}^{(s)} p_{ii}^{(k-s)}$$

# Homogenní Markovský řetězec s konečně mnoha stavy



# Homogenní Markovský řetězec s konečně mnoha stavy

Cvičení 4: Najděte $f_{ij}^{(k)}$ pro všechna $i,j,k$.




$$f_{00}^{(1)} = p_{00} = 0$$

$$f_{00}^{(2)} = p_{03}p_{30} = 1/2 = p_{00}^{(2)}$$

$$f_{00}^{(3)} = p_{00}^{(3)} - (f_{00}^{(1)}p_{00}^{(2)} + f_{00}^{(2)}p_{00}^{(1)}) = (1/2)^2$$

$$\vdots$$

$$f_{00}^{(k)} = (1/2)^{k-1} \qquad f_{03}^{(k)} = \left(\frac{1}{2}\right)^k \qquad f_{08}^{(k)} = \begin{cases} 0, & \text{pro } k \text{ sudé,} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k+1}{2}}, & \text{pro } k \text{ liché.} \end{cases}$$

$$f_{33}^{(k)} = (1/2)^{k-1} \qquad f_{30}^{(k)} = \begin{cases} 1, & \text{pro } k = 1 \\ 0, & \text{pro } k \neq 2 \end{cases} \qquad f_{38}^{(k)} = \begin{cases} 0, & \text{pro } k \text{ liché,} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{2}}, & \text{pro } k \text{ sudé.} \end{cases}$$

$$f_{80}^{(k)} = \begin{cases} 0, & \text{pro } k = 1 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}, & \text{pro } k \geqq 2 \end{cases} \qquad f_{88}^{(k)} = \begin{cases} 0, & \text{pro } k \text{ sudé,} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k+1}{2}}, & \text{pro } k \text{ liché.} \end{cases} \qquad f_{83}^{(k)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

Dále je: $f_{ij} = 1$ pro všechna $i, j \in \{0, 3, 8\}$.

# Homogenní Markovský řetězec s konečně mnoha stavy

Klasifikace stavů:

- stav $i \in \boldsymbol{I}$ je trvalý, když $f_{ii} = 1$. Pokud je $f_{ii} < 1$ stav $i$ nazýváme přechodným.

Označme $E(\xi_i) = \sum_{k=1}^{\infty} k f_{ii}^{(k)}$ střední počet kroků, které jsou třeba pro návrat řetězce zpět do stavu $i$.

- trvalý stav $i \in \boldsymbol{I}$ nazveme nenulovým, když je $E(\xi_i) < \infty$. Pokud je $E(\xi_i) = \infty$, stav $i$ nazýváme trvalým nulovým.

- trvalý nenulový stav který není periodický nazýváme ergodickým.

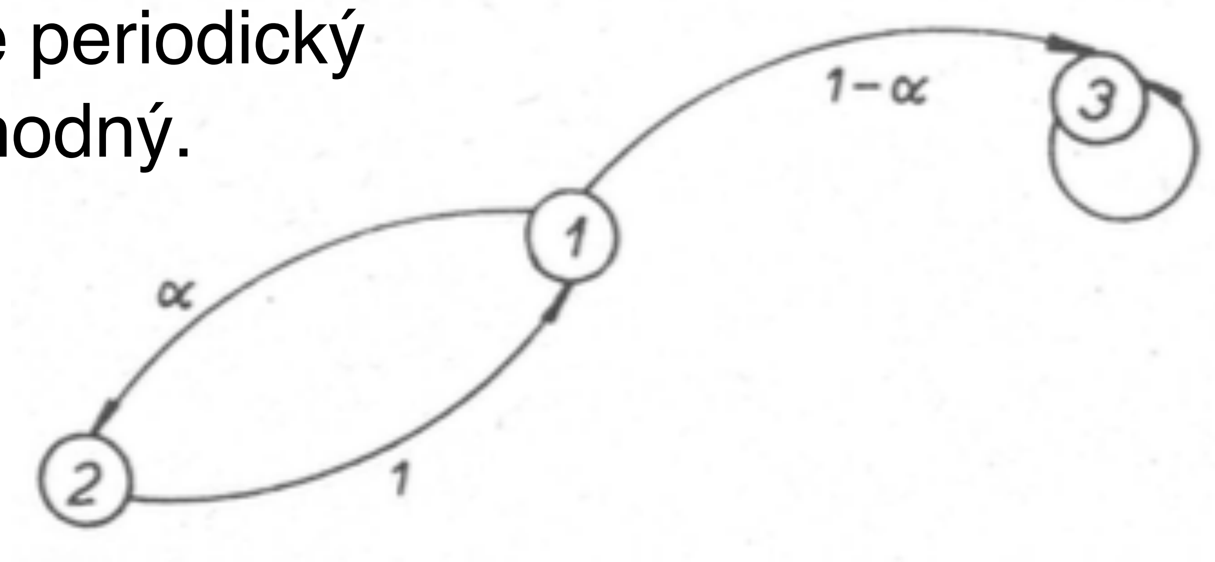
Tvrzení 5: Každý trvalý stav homogenního Markovova řetězce je podstatný.

# Homogenní Markovský řetězec s konečně mnoha stavy

Klasifikace stavů:

Tvrzení 6: Stav $i$ je přechodný právě když $\sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}^{(k)} < \infty$.

Příklad: Ukažte, že stav 1 je periodický s periodou 2 a přitom je přechodný. Najděte stacionární rozdělení daného řetězce, pokud existuje.



# Homogenní Markovský řetězec s konečně mnoha stavy

## Nerozložitelné řetězce:

- homogenní Markovův řetězec $\{X_t\}_{t \in \boldsymbol{T}}$ je nerozložitelný právě když v něm neexistuje žádná jiná uzavřená množina stavů kromě množiny všech stavů $I$.

Tvrzení 7: Homogenní Markovův řetězec $\{X_t\}_{t \in \boldsymbol{T}}$ je nerozložitelný právě když každý jeho stav může být dosažitelný z libovolného jiného stavu. .

Tvrzení 8: V nerozložitelném Markovově řetězci $\{X_t\}_{t \in \boldsymbol{T}}$ s množinou stavů $I$ jsou všechny stavy stejného typu: buď jsou všechny přechodné, trvalé nulové nebo trvalé nenulové. V každém případě mají stejnou periodu a každé dva stavy jsou sousledné.

Tvrzení 9: Nerozložitelný Markovovův řetězec s konečným počtem stavů má všechny stavy trvalé nenulové.

# Homogenní Markovský řetězec
# s konečně mnoha stavy

Cvičení 5: Uvažujme dvě osudí, každé obsahuje $N$ černých a bílých koulí. Předpokládejme, že součet všech bílých koulí je $N$, stejně jako součet všech černých. Řekneme, že osudí 1 je ve stavu $i \in I = \{1,2,\dots,N\}$, když obsahuje $i$ bílých a $N$-$i$ černých koulí. (Ve druhém osudí je to zřejmě opačně.) V každém kroku postupně vybereme po jedné kouli z každého osudí a vložíme je vždy do osudí opačného. Označme $\{X_t\}_{t \in \boldsymbol{T}}$ Markovův řetězec, jehož stavy jsou stavy osudí 1. Ukažte, že tento řetězec je homogenní nerozložitelný a najděte jeho matici pravděpodobností přechodů. Najděte jeho stacionární rozdělení, pokud existuje. .

# Markovské procesy se spojitým časem a s konečně mnoha stavy

Náhodný proces $\{X_t,\ t \in T\}$ ve spojitém čase se spočetnou množinou stavů $I$ je Markovovým náhodným procesem, jestliže pro každé $i \in I$ existuje $t \in T$ tak, že $P(X_t = i) > 0$ a platí markovská vlastnost:

$$P(X_s = i \,|\, X_t = j,\ X_{t_1} = j_1, \ldots,\ X_{t_k} = j_k\,) = P(X_s = i \,|\, X_t = j\,) = p_{ij}(t, s)$$

pro libovolné časy $0 \leq t_k < \ldots < t_1 < t < s$ a stavy $i, j, j_1, \ldots, j_k$.

- Markovův proces $\{X_t\}_{t \in \boldsymbol{T}}$ je homogenní, jestliže pro každé $t \in T$ platí $p_{ij}(t,s) = p_{ij}(s-t)$.

Označme $\vec{\pi} = (\pi_1, \ldots, \pi_m\,)$ počáteční rozdělení procesu $\{X_t\}_{t \in \boldsymbol{T}}$.

$\vec{p}(t) = (p_1(t), \ldots, p_m(t)\,)$ absolutní rozdělení procesu v čase $t$.

# Markovské procesy se spojitým časem a s konečně mnoha stavy

Chapman-Kolmogorovova rovnost: pro libovolnou dvojici stavů $i,j \in I$ a časy $t,s \in T$ existuje čas $r \in T,\ t < r < s$ tak, že platí

$$p_{ij}(t,s) = \sum_{i=1}^{m} p_{ik}(t,r) p_{kj}(r,s)$$

podobně pro absolutní rozdělení

$$p_i(s) = \sum_{i=1}^{m} p_k(t) p_{ki}(t,s) = \sum_{i=1}^{m} \pi_k p_{ki}(0,s)$$

# Markovské procesy se spojitým časem a s konečně mnoha stavy

## Intenzity přechodu:

- předpokládejme dále, že
  - existuje limita $\lim_{s \to t} p_{ij}(t, s)$ pro každé $i, j \in I$ a je rovna 0 když $i \neq j$ a rovna 1 když $i = j$.
  - pro každé $i \neq j \in I$ a $s \in T$ existuje
$$\lim_{s \to t} \frac{p_{ij}(t, s)}{s - t} = q_{ij}(s)$$
  - pro každé $i \in I$ a $s \in T$ existuje
$$\lim_{s \to t} \frac{1 - p_{ii}(t, s)}{s - t} = q_i(s)$$
- funkce $q_{ij}(s)$ pro $i \neq j$ budeme nazývat intenzitami přechodu v čase $s$
- $q_{ii}(s) = - q_i(s)$ je intenzita setrvání ve stavu $i$ v čase $s$.
- matice intenzit přechodu v čase $s$ je $Q(s) = \Big(q_{ij}(s)\Big)_{i=1,\ldots,m}^{j=1,\ldots,m}$
- zřejmě platí $\sum_{j \in I} q_{ij}(s) = 0$ pro každé $i \in I$ a $s \in T$.

# Markovské procesy se spojitým časem a s konečně mnoha stavy

Soustava Kolmogorovových diferenciálních rovnic:

Z CH-K rovnosti plyne

$$p_{ij}(t, s + \triangle) = \sum_{k \in I} p_{ik}(t, s) p_{kj}(s, s + \triangle)$$

$$p_{ij}(t, s + \triangle) = p_{ik}(t, s) p_{kj}(s, s + \triangle) + \sum_{i \neq j, k \in I} p_{ik}(t, s) p_{kj}(s, s + \triangle)$$

$$p_{ij}(t, s + \triangle) - p_{ij}(t, s) = p_{ij}(t, s)(p_{jj}(s, s + \triangle) - 1) + \sum_{i \neq j, k \in I} p_{ik}(t, s) p_{kj}(s, s + \triangle)$$

$$\frac{p_{ij}(t, s + \triangle) - p_{ij}(t, s)}{\triangle} = p_{ij}(t, s) \frac{p_{jj}(s, s + \triangle) - 1}{\triangle} + \sum_{i \neq j, k \in I} p_{ik}(t, s) \frac{p_{kj}(s, s + \triangle)}{\triangle}$$

$$\triangle \to 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial p_{ij}(t, s)}{\partial s} = -p_{ij}(t, s) q_j(s) + \sum_{i \neq j, k \in I} p_{ik}(t, s) q_{kj}(s)$$

soustava (prospektivních) Kolmogorovových diferenciálních rovnic

# Markovské procesy se spojitým časem a s konečně mnoha stavy

Soustava Kolmogorovových diferenciálních rovnic:

Z CH-K rovnosti plyne

$$p_{ij}(t-\triangle,s)=\sum_{k\in I}p_{ik}(t-\triangle,t)p_{kj}(t,s)$$

$$p_{ij}(t-\triangle,s)=p_{ii}(t-\triangle,t)p_{ij}(t,s)+\sum_{i\neq j,k\in I}p_{ik}(t-\triangle,t)p_{kj}(t,s)$$

$$p_{ij}(t-\triangle,s)-p_{ij}(t,s)=(p_{jj}(t-\triangle,t)-1)p_{ij}(t,s)+\sum_{i\neq j,k\in I}p_{ik}(t-\triangle,t)p_{kj}(t,t)$$

$$\frac{p_{ij}(t-\triangle,s)-p_{ij}(t,s)}{\triangle}=\frac{p_{jj}(t-\triangle,t)-1}{\triangle}p_{ij}(t,s)+\sum_{i\neq j,k\in I}\frac{p_{ik}(t-\triangle,t)}{\triangle}p_{kj}(t,s)$$

$$\triangle\to 0\quad\Rightarrow$$

$$-\frac{\partial p_{ij}(t,s)}{\partial t}=-p_{ij}(t,s)q_j(s)+\sum_{i\neq j,k\in I}q_{ik}(s)p_{kj}(t,s)$$

soustava (retrospektivních) Kolmogorovových diferenciálních rovnic

# Markovské procesy se spojitým časem a s konečně mnoha stavy

Soustava Kolmogorovových diferenciálních rovnic:

$$\frac{\partial p_{ij}(t,s)}{\partial s} = -p_{ij}(t,s)q_j(s) + \sum_{i \neq j, k \in I} p_{ik}(t,s)q_{kj}(s)$$

$$\boxed{\frac{\partial p_{ij}(t,s)}{\partial s} = \sum_{k \in I} p_{ik}(t,s)q_{kj}(s)}$$

$$\frac{\partial p_{ij}(t,s)}{\partial t} = p_{ij}(t,s)q_j(s) - \sum_{i \neq j, k \in I} q_{ik}(s)p_{kj}(t,s)$$

$$\boxed{\frac{\partial p_{ij}(t,s)}{\partial t} = -\sum_{k \in I} q_{ik}(t)p_{kj}(t,s)}$$

neboli

$$\frac{\partial P(t,s)}{\partial s} = P(t,s)Q(s)$$

$$\frac{\partial P(t,s)}{\partial t} = -Q(t)P(t,s)$$

obě soustavy jsou ekvivalentní
= mají stejné řešení

# Markovské procesy se spojitým časem a s konečně mnoha stavy

Soustava Kolmogorovových diferenciálních rovnic pro homogenní proces:

$$p_{ij}(t,s) = p_{ij}(s-t) \qquad q_{ij}(s) = q_{ij}$$

$$p'_{ij}(s) = \sum_{k\in I} p_{ik}(s)q_{kj} \qquad p_{ij}(0) = \delta_{ij} \qquad \sum_{j\in I} p_{ij}(t) = 1 \quad \forall i \in I$$

$$P'(t) = P(t)Q, \quad P(0) = E, \quad P(t)\vec{e}^{\,T} = \vec{e}$$

Pokud existuje stacionární rozdělení $P^* = \lim_{t\to\infty} P(t)$, pak pro něj platí: $0 = P(t)Q, \quad P^*\vec{e}^{\,T} = \vec{e}$

Tato soustava má řešení ve tvaru $P(t) = P(0).e^{Qt}$

# Markovské procesy se spojitým časem a s konečně mnoha stavy

## Rozdělení časových intervalů mezi změnami stavů:

Nechť v čase $t \in T$ je proces ve stavu $i \in I$.Jaká je pravděpodobnost, že se tento stav nezmění v časovém intervalu $(t, t+\Delta t)$?

- $p_{ii}(0)=1$
- $p_{ii}(t)$ je klesající
- $p_{ii}(t) = e^{-q_i t}$, kde $q_i$ je intenzita setrvání ve stavu $i$.

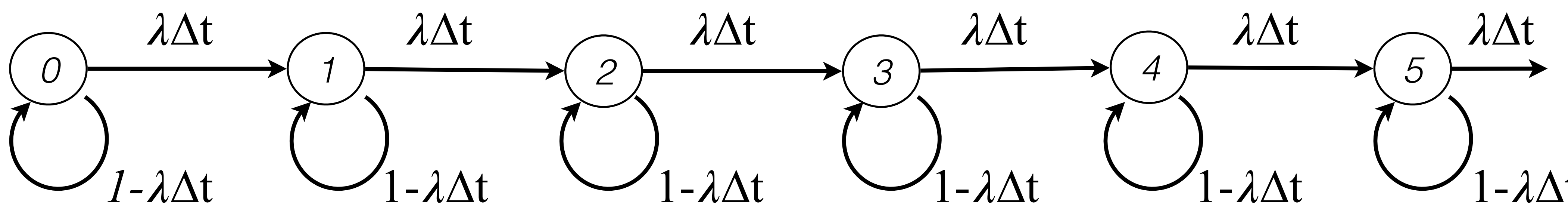
Nechť v čase $t \in T$ je proces ve stavu $i \in I$. Jaké je rozdělení pravděpodobnosti doby setrvání $\tau$ v tomto stavu v časovém intervalu $(t, t+\Delta t)$?

$$P(\tau > \triangle t) = p_{ii}(\triangle t) = e^{-q_i \triangle t} = 1 - q_i \triangle t + o(\triangle t)$$

$$P(\tau < \triangle t) = 1 - p_{ii}(\triangle t) = 1 - e^{-q_i \triangle t} = q_i \triangle t + o(\triangle t)$$

# Markovské procesy se spojitým časem a s konečně mnoha stavy

Příklad: Poissonův proces (proces zrodu, pure birth process)




$$P(\text{v čase } (t, t+\triangle t) \text{ nastane událost}) = P(\tau \leq \triangle t) = 1 - e^{-\lambda \triangle t} = \lambda \triangle t + o(\triangle t)$$

$$P(\text{v čase } (t, t+\triangle t) \text{ nenastane událost}) = P(\tau > \triangle t) = e^{-\lambda \triangle t} = 1 - \lambda \triangle t + o(\triangle t)$$

$$\Rightarrow \quad q_{i,i+1} = \lambda, \quad q_{ii} = -\lambda, \quad q_{ij} = 0 \text{ pro } |i-j| > 1$$

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \qquad P' = P.Q$$

# Markovské procesy se spojitým časem a s konečně mnoha stavy

## Příklad: Poissonův proces (proces zrodu, pure birth process)

$$\begin{pmatrix} p'_{00} & p'_{01} & p'_{02} & p'_{03} & \cdots \\ p'_{10} & p'_{11} & p'_{12} & p'_{13} & \cdots \\ p'_{20} & p'_{21} & p'_{22} & p'_{23} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{lcl} p'_{00} = -\lambda p_{00} & \Rightarrow & p_{00} = e^{-\lambda t} \\ p'_{01} = \lambda p_{00} - \lambda p_{01} & \Rightarrow & p_{01} = \lambda t e^{-\lambda t} \\ p'_{02} = \lambda p_{01} - \lambda p_{02} & \Rightarrow & p_{02} = \dfrac{(\lambda t)^2}{2!} e^{-\lambda t} \end{array}\right\} \quad p_{0,k} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

$$\left.\begin{array}{lcl} p'_{10} = -\lambda p_{10} & \Rightarrow & p_{10} = 0 \\ p'_{11} = \lambda p_{10} - \lambda p_{11} & \Rightarrow & p_{01} = e^{-\lambda t} \\ p'_{12} = \lambda p_{11} - \lambda p_{12} & \Rightarrow & p_{02} = \lambda t e^{-\lambda t} \end{array}\right\} \quad \boxed{p_{i,i+k} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}}$$