Tématické celky – kontrolní otázky.

Základy teorie pravděpodobnosti.

1.Pravděpodobnostní míra – základní pojmy.

1.1. Vysvětlete pojem náhody, náhodného pokusu, náhodného jevu a jeho množinovou interpretaci. Popište prostor elementárních jevů a jeho vlastnosti.

1.2. Uveďte klasickou definici pravděpodobnosti jako podílu počtu příznivých elementárních jevů ku počtu všech elementárních jevů. Použití ukažte na příkladech. Co je to geometrická pravděpodobnost a jak se počítá ?

1.3. Vyslovte axiomatickou definici pravděpodobnosti. Jak se počítá pravděpodobnost sjednocení náhodných jevů? Vypočtěte pravděpodobnost jevu přechodem k jeho doplňku a pravděpodobnost průniku nezávislých jevů.

1.4. Definujte podmíněnou pravděpodobnost. Co jsou to nezávislé jevy a jak souvisí nezávislost jevů s podmíněnou pravděpodobností? Vypočtěte pravděpodobnost průniku jevů pomocí podmíněné pravděpodobnosti.

1.5. Co je to úplný systém jevů? Vyslovte větu o úplné pravděpodobnosti a Bayesovu větu, vysvětlete použití obou vět na příkladech.

2. Náhodná veličina a její charakteristiky.

2.1. Co je to diskrétní rozdělení náhodné veličiny? Popište alternativní, binomické, geometrické, hypergeometrické a Poissonovo rozdělení. Použití těchto rozdělení ilustrujte na příkladech. Co je to spojité rozdělení náhodné veličiny, jaké vlastnosti má hustota spojitého rozdělení? Popište rovnoměrné, exponenciální a normální rozdělení.

2.2. Definujte distribuční funkci a uveďte její vlastnosti. Vysvětlete, co jsou to kvantity, speciálně medián a co je to modus.

2.3. Jak se vypočte střední hodnota a rozptyl náhodné veličiny? Jaké mají tyto charakteristiky vlastnosti? Definuje obecné a centrální momenty a jejich výpočet ukažte na příkladech. Ukažte na příkladech použití Čebyševovy nerovnosti.

2.4. Jak se provádí transformace náhodných veličin? Odvoďte tvar hustoty transformované spojité náhodné veličiny. Vypočtěte střední hodnotu a rozptyl funkce náhodné veličiny, speciálně charakteristickou funkci. Vypočtěte obecné momenty pomocí charakteristické funkce a odvoďte tvar charakteristické funkce součtu nezávislých náhodných veličin.

3.Náhodný vektor

3.1. Popište diskrétní a spojité rozdělení náhodného vektoru. Co je to sdružená pravděpodobnost, jaké vlastnosti má sdružená hustota? Definujte distribuční funkci náhodného vektoru.

3.2. Definujte vektor středních hodnot náhodného vektoru. Jak se počítají jednotlivé složky tohoto vektoru? Definujte kovarianci a korelační koeficient. Na příkladech ukažte výpočet kovarianční a korelační matice.

3.3. Co je to marginální rozdělení? Jak se vypočítá marginální rozdělení ze sdruženého rozdělení v diskrétním a spojitém případě? Definujte nezávislé náhodné veličiny a vysvětlete, jak souvisí nezávislost náhodných veličin s kovariancí a korelací.

3.4. Vysvětlete pojem funkce náhodného vektoru. V jednoduchých případech vypočtěte střední hodnotu a rozptyl konkrétní funkce, případně nalezněte její rozdělení.

4. Základní pojmy z teorie náhodných procesů

4.1. Definujte nekonečnou posloupnost náhodných veličin a uveďte zákony velkých čísel. Vyslovte Bernoulliovu větu, centrální limitní větu a ukažte jejich použití na příkladech. Vyslovte Chinčinovu větu a pomocí ní ukažte, jak lze některé integrály počítat metodou Monte Carlo.

4.2. Definujte náhodnou posloupnost a náhodný proces. Vysvětlete pojem silné a slabé stacionarity. Zaveďte pojem kovarianční funkce a spektrální hustoty náhodné posloupnosti (náhodného procesu). Jaký je vztah mezi kovarianční funkcí a spektrální hustotou?

Úvod do matematické statistiky.

5. Náhodný výběr, úloha statistické indukce.

5.1. Co je to náhodný výběr? Jak se určí rozdělení náhodného výběru vdiskrétním a spojitém případě? Jaký tvar má distribuční funkce náhodného výběru? Definujte uspořádaný náhodný výběr.

5.2. Co je to realizace náhodného výběru? Jak se sestrojí histogram a empirická distribuční funkce? Uveďte výběrové charakteristiky náhodného výběru ? výběrový průměr, rozptyl, modus, medián, variační koeficient a rozpětí. Jak se tyto charakteristiky počítají? Jak se provádí třídění dat ? ukažte na příkladech.

6. Základy teorie odhadu.

6.1. Co jsou to bodové odhady parametrů, Jak se zjistí, že příslušný odhad je nestranný, konzistentní, vydatný ?

6.2. Vysvětlete, co je podstatou metody maximální věrohodnosti a na příkladech ukažte použití této metody. Co je to momentová metoda a jak se provádí ?

6.3. Popište normální rozdělení a rozdělení od něho odvozená. Co je to normované normální rozdělení?

6.4. Co jsou to intervalové odhady? Jak se sestrojí intervaly spolehlivosti ? oboustranné i jednostranné ? spředepsanou spolehlivostí? Použití dokumentujte na příkladech.

7. Základní pojmy teorie testování hypotéz.

7.1. Co je to jednoduchá a složená hypotéza? Co je to testová statistika a kritický obor testu? Vysvětlete, co je to chyba prvního, resp. druhého druhu. Co rozumíme po pojmy hladina a síla testu?

7.2. Co jsou to parametrické testy? Za předpokladu výběru znormálního rozdělení testuje proti oboustranné i jednostranné alternativám

a) hypotézu o střední hodnotě při známém i neznámém rozptylu,

b) hypotézu o rozptylu při známé i neznámé střední hodnotě,

c) hypotézu o rovnosti středních hodnot dvou výběrů při známých i neznámých rozptylech a hypotézu o rovnosti rozptylů.

7.3. Co jsou to neparametrické testy? Jak se provádí test dobré shody a s jakým rozdělením je spojen? Uveďte další neparametrické testy (znaménkový, Wilcoxonův) a jejich použití.

8. Pojem korelace a regrese.

8.1. Jak se vypočte výběrová kovariance a výběrový korelační koeficient? Popište test hypotézy o nulovosti korelačního koeficientu. Jak se sestrojí intervalový odhad korelačního koeficientu a jaké statistiky se při tom používá? Jak se testuje hypotéza $H : q = r$? Co jsou to koeficienty mnohonásobné a parciální korelace a jak se vypočtou?

8.2. Popište regresní model. Napište regresní funkce pro lineární, kvadratickou a hyperbolickou regresi. Jak se provádí odhad regresních koeficientů. Vysvětlete metodu nejmenších čtverců, ukažte, jak získáme soustavu tzv. normálních rovnic. Použití ukažte na příkladech.

1. Pravděpodobnostní míra, základní pojmy

1.1. Vysvětlete pojem náhody,náhodného pokusu, náhodného jevu a jeho množinovou interpretaci. Popište prostor elementárních jevů a jeho vlastnosti.

Úlohy :

1.1.1. Náhodný pokus spočívá v hodu jednou hrací kostkou. Určete
a) kolik je elementárních jevů a popište je,
b)kolik je všech jevů,
c) jev A, spočívající v tom, že padne liché číslo,
d) jev B, spočívající v tom, že padne prvočíslo,
e) průnik a sjednocení jevů A a B.

1.1.2. Náhodný pokus spočívá v hodu několika hracími kostkami současně. Co jsou jednotlivé elementární jevy a kolik jich je v případě, že se jedná o hod
a) dvěma kostkami, b) třemi kostkami ?

1.1.3. Kolik je elementárních jevů, vybíráme-li náhodně
a) tři osoby ze sedmi bez ohledu na pořadí,
b) tři osoby ze sedmi s ohledem na pořadí, v kterém je vybíráme,
c) sedm osob ze sedmi bez ohledu na pořadí,
d) sedm osob ze sedmi s ohledem na pořadí, v kterém je vybíráme?

1.1.4. V osudí je šest koulí očíslovaných 1,2,3,4,5,6. Náhodný pokus spočívá v tom, že vytahuje postupně bez vracení jednu kouli po druhé a zapisuje si jejich čísla tak dlouho, dokud nevytáhneme všechny koule. Napište
a) co jsou elementární jevy a kolik jich je,
b) pomocí elementárních jevů jev A, spočívající v tom, že v prvních třech tazích se číslo tahu shoduje s číslem vytažené koule.

1.1.5. Dva hráči házejí střídavě mincí tak dlouho, dokud někomu z nich nepadne líc. Zapište elementární jevy a rozhodněte, zda jejich počet je konečný.

1.1.6. Na úsečce délky jedna je náhodně zvolena několik bodů nezávisle na sobě. Jaký je prostor elementárních jevů, jedná-li se o
a) jeden bod, b) dva body, c) tři body.
Je tento prostor konečný?

1.1.7. Dokažte, že pro libovolné jevy A, B, C platí
a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

1.1.8. Dokažte, že pro libovolné jevy A, B platí
a) $A \cap B)^C = A^C \cup B^C$
b) $A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

1.2. Uveďte klasickou definici pravděpodobnosti jako podílu počtu příznivých elementárních jevů ku počtu všech elementárních jevů. Použití ukažte na příkladech. Co je to geometrická pravděpodobnost a jak se počítá?

Úlohy :

1.2.1. Čtverec je třemi vodorovnými a třemi svislými čarami rozdělen na šachovnici 4×4. Do každého řádku je na jedno z jeho čtyř polí umístěn hrací kámen. Určete pravděpodobnost, že v každém sloupci leží právě jeden kámen.

1.2.2. Na poličce je náhodně rozestaveno 10 knih. Určete pravděpodobnost, že určité tři knihy jsou v určitém pořadí postaveny vedle sebe.

1.2.3. Tři muži a tři ženy obsadí náhodně šest míst kolem stolu. Určete pravděpodobnost, že sedí kolem stolu střídavě, to je, že žádné dvě ženy ani žádní dva muži nesedí vedle sebe.

1.2.4. Řešte předcházející tři úlohy obecně: úlohu 1.2.1. pro čtverec $n \times n$, úlohu 1.2.2. pro n knih a úlohu 1.2.3. pro n žen a n mužů.

1.2.5. V urně je 8 koulí s čísly 1,2,. . . .,8. Postupně vytáhneme po jedné (bez vracení) všechny koule. Jaká je pravděpodobnost, že v prvních třech tazích bude pořadí tahu shodné s číslem koule?

1.2.6. Na úsečce délky 1 jsou náhodně zvoleny dva body. Jaká je pravděpodobnost, že jejich vzdálenost je

a) menší než $\frac{1}{3}$
b) větší než $\frac{1}{2}$
c) rovna $\frac{3}{4}$?

1.2.7. Dva náhodně zvolené body rozdělí úsečku délky 1 na tři části. Jaká je pravděpodobnost, že

a) žádná z těchto částí není delší než $\frac{2}{5}$
b) všechny tyto části jsou delší než $\frac{1}{4}$
c) z těchto částí lze sestavit trojúhelník ?

1.2.8. Do kruhu o poloměru R je vepsán obrazec. Poté je do kruhu náhodně vhozen bod. Jaká je pravděpodobnost, že tento bod padne do vepsaného obrazce, je-li tímto obrazcem

a) rovnostranný trojúhelník, b) čtverec ?

1.2.9. Rovina je rozdělena systémem rovnoběžek ve vzdálenosti 6 cm. Poté je na ni vhozen kruh. Jaká je pravděpodobnost, že kruh neprotne žádnou z rovnoběžek, je-li poloměr kruhu

a) roven 1, b) roven 2 ?

1.2.10. Na kružnici o poloměru R jsou náhodně zvoleny 3 body. Vypočtěte pravděpodobnost, že jimi vytvořený trojúhelník je ostroúhlý.

1.3. Vyslovte axiomatickou definici pravděpodobnosti. Jak se počítá pravděpodobnost sjednocení náhodných jevů ? Vypočtěte pravděpodobnost jevu přechodem k jeho doplňku a pravděpodobnost průniku nezávislých jevů.

Úlohy :

1.3.1. Dva střelci střílejí nezávisle na cíl. Přitom pravděpodobnost zásahu cíle je u prvního střelce 0.7, u druhého 0.8. Jaká je pravděpodobnost, že při současném výstřelu zasáhne cíl alespoň jeden střelec?

1.3.2. Skokan do dálky má tři nezávislé pokusy na to, aby se zlepšil. Přitom pravděpodobnost zlepšení je v každém pokusu stejná a je rovna $\frac{1}{3}$. Vypočtěte pravděpodobnost, že se skokan během tří pokusů zlepší.

1.3.3. Systém se skládá ze tří zařízení, jejichž pravděpodobnosti bezporuchového chodu jsou rovny postupně 0.7, 0.8, 0.8. Určete pravděpodobnost bezporuchového systému, jsou-li zařízení zapojena
a) v sérii, b) paralelně.

1.3.4. Mezi 100 výrobky je 5 vadných. Náhodně vybereme 5 výrobků. Jaká je pravděpodobnost, že ve výběru bude alespoň jeden vadný výrobek?

1.3.5. Z dvanácti součástek jsou $\frac{2}{3}$ bezvadných a $\frac{1}{3}$ vadných. Vypočtěte pravděpodobnost, že při současném vytažení tří součástek bude mezi nimi alespoň jedna vadná.

1.3.6. Muži A, B, C, D, E si po odchodu z místnosti náhodně nasadí klobouky, které si před příchodem do místnosti odložili. Vypočtěte pravděpodobnost, že
a) muž A má svůj klobouk
b) muži B a C mají své klobouky,
c) alespoň jeden muž má svůj klobouk.

1.3.7. V urně jsou pouze černé a bílé míčky. Dvě osoby vytahují střídavě bez vracení vždy po jednom míčku. Vyhrává ten, kdo vytáhne první bílý míček. Vypočtěte pravděpodobnost, že vyhraje osoba, která začíná, jestliže v urně jsou
a) jeden bílý a čtyři černé míčky,
b) dva bílé a šest černých míčků.

1.3.8. Urna obsahuje 3 bílé, 5 černých a 2 červené míčky. Dvě osoby vybírají bez vracení vždy po jednom míčku. Osoba, která první vytáhne bílý míček, vyhrává. Při tahu černého míčku končí hra nerozhodně. Vypočtěte pravděpodobnost
a) výhry osoby, která hru začíná,
b) výhru osoby, která táhne míček jako druhá,
c) nerozhodného výsledku.

1.3.9. Hráči házejí postupně mincí. Vyhrává ten, komu padne jako první líc. Určete pravděpodobnost výhry každého hráče, hrají-li
a) dva hráči, b) tři hráči.

1.4. Definujte podmíněnou pravděpodobnost. Co jsou to nezávislé jevy a jak souvisí nezávislost jevů s podmíněnou pravděpodobností? Vypočtěte pravděpodobnost jevů pomocí podmíněné pravděpodobnosti.

Úlohy :

1.4.1. Uvažujme jevy A a B z příkladu 1.1.1. Dále uvažujme jev C, spočívající v tom, že nepadne číslo větší než 4. Vypočtěte přímo podmíněné pravděpodobnosti $P(A|B)$, $P(A|C), P(B|C)$.

1.4.2. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma mincemi padly dva ruby, jestliže víme, že padl alespoň jeden rub?

1.4.3. Ze společnosti deseti osob, mezi nimiž je 7 mužů a 3 ženy vybíráme postupně po jedné osobě. Vypočtěte pravděpodobnost, že

a) druhá vybraná osoba je muž, je-li první vybraná žena,

b) třetí vybraná osoba je muž, jsou-li první dvě vybrané ženy.

Výpočet proveďte jednak přímo, jednak pomocí pravděpodobnosti průniku jevů.

1.4.4. V urně je 6 koulí, z toho jsou 4 koule bílé a 2 černé. Vytáhneme postupně bez vracení 4 koule. Zaveďme jev A spočívající v tom, že právě jedna z prvních dvou tažených koulí je bílá, jev B, že čtvrtá tažená koule je bílá jev C, že ve výběru 4 koulí jsou právě dvě bílé. Vypočtěte přímo

a) pravděpodobnosti jevů A, B, C,

b) pravděpodobnosti průniků $A \cap B$, $B \cap C$

1.4.5. Souprava 32 karet obsahuje 4 esa. Ze soupravy vytahujeme postupně bez vracení 3 karty. Vypočtěte pravděpodobnost, že

a) třetí vytažená karta je eso,

b) pouze třetí vytažená karta je eso,

c) třetí vytažená karta je eso, jestliže první vytažená karta je eso.

d) třetí vytažená karta je eso, jestliže první dvě nejsou esa.

1.4.6. V urně jsou dvě koule - bílá a černá. Postupně vytahujeme po jedné kouli do té doby, než vytáhneme černou. Přitom kdykoli vytáhneme bílou kouli, vrátíme ji a s ní do urny přidáme další dvě bílé koule. Určete pravděpodobnost, že černá koule nebude vytažena

a) v prvních dvou tazích,   b) v prvních třech tazích.

1.4.7. Při hodu dvěma kostkami spočívající jevy A, B a C postupně v tom, že součet bodů na obou kostkách je dělitelný dvěma, třemi, pěti. Rozhodněte, zda uvedené jevy jsou po dvou nezávislé.

1.4.8. První stěna čtyřstěnu je obarvena modře, druhá stěna červeně, třetí bíle. Na čtvrté stěně jsou naneseny všechny tři barvy. Náhodně zvolíme jednu stěnu čtyřstěnu. Jevy A, B a C spočívají postupně v tom, že na této stěně vidíme modrou, červenou nebo bílou barvu. Rozhodněte, zda jevy A, B a C jsou

a) po dvou nezávislé,   b) sdruženě nezávislé.

1.5. Co je to úplný systém jevů? Vyslovte větu o úplné pravděpodobnosti a Bayesovu větu, vysvětlete použití obou vět na příkladech.

Úlohy :

1.5.1 Jev A spočívá v tom, že při hodu kostkou padne liché číslo, jev B v tom, že číslo bude sudé. Tvoří tyto jevy úplný systém jevů ?

1.5.2. Jsou-li A a B dva různé jevy, rozhodněte, zda jevy A, $B - A$, $(A \cup B)^c$ tvoří úplný systém jevů.

1.5.3. V urně je pět koulí očíslovaných čísly 1,2,3,4,5., Vytáhneme jednu kouli. Je-li to koule s číslem 1, vrátíme ji do urny. Je-li koule s jiným číslem, do urny ji nevrátíme. Poté provedeme další tah za stejných podmínek. jaká je pravděpodobnost, že vytáhneme kouli s číslem 1 ?

1.5.4. V urně je 10 bílých a 5 černých koulí. Jednu kouli z urny vytáhneme a opět ji tam vrátíme. Spolu s původní koulí do urny přidáme dalších 10 koulí téže barvy. Potom provedeme další tah. Jaká je pravděpodobnost, že při tomto tahu vytáhneme bílou kouli.

1.5.5. Partie domina obsahuje 28 kostek. Každá kostka je půlená a v každé polovině je 0–6 bodů. Postupně táhneme dvě kostky. Jaká je pravděpodobnost, že tyto kostky lze k sobě přiložit.

1.5.6. V urně jsou tři koule. Mezi nimi mohou být se stejnou pravděpodobností $\frac{1}{4}$ buď 0, 1, 2 nebo 3 bílé koule, ostatní budou černé. Do urny přidáme jednu bílou kouli. Jaká je pravděpodobnost, že po tomto přidání vytáhneme z urny bílou kouli.

1.5.7. Mějte 10 stejných uren. V devíti z nich jsou vždy 2 bílé a 2 černé koule. V desáté je 5 bílých a 1 černá koule. Z náhodně zvolené urny byla vytažena bílá koule. Jaká je pravděpodobnost, že tato koule byla vytažena z desáté urny?

1.5.8. První střelec zasáhne cíl s pravděpodobností $\frac{4}{5}$, druhý s pravděpodobností $\frac{3}{4}$ a třetí s pravděpodobností $\frac{2}{3}$. Při současném výstřelu všech tří byl cíl zasažen dvakrát. Vypočtěte pravděpodobnost toho, že terč nezasáhl třetí střelec.

1.5.9. V první partii výrobků jsou $\frac{2}{3}$ výrobků první a $\frac{1}{3}$ výrobků druhé jakosti. Druhá a třetí partie obsahují pouze výrobky první jakosti. Z náhodně zvolené partie byly postupně vybrány dva výrobky tak, že první byl po vybrání vrácen. oba tyto výrobky byly první jakosti. spočtěte pravděpodobnost, že výrobky byly vybrány z první partie.

1.5.10. Mějme tři urny. V první jsou 2 modré, 3 červené a 1 bílá koule, ve druhé 1 modrá, 1 červená a 2 bílé, ve třetí 5 modrých, 3 červené a 4 bílé. Náhodně zvolíme jednu urnu a vytáhneme z ní dvě koule. Jedna z nich je bílá a druhá červená. Jaká je pravděpodobnost, že koule pocházejí ze třetí urny ?

Výsledky a řešení úloh :
1.1.1. a.) 6; $\{1\},\{2\},\ldots\{6\}$; b) $2^8=64$; c)$A=\{1,3,5\}$; d)$B=\{2,3,5\}$; e)$A\cap B=\{3,5\}$; $A\cup B=\{1,2,3,5\}$; **1.1.2.** a) uspořádané dvojice $[x,y]$, $x,y\in\{1,2,3,4,5,6\}$; $6^2=36$; uspořádaná trojice $[x,y,z]$, $x,y,z\in\{1,2,3,4,5,6\}$; $6^9=216$; **1.1.3.** a) všechny permutace prvků množiny $\{1,2,3,4,5,6\},6!=720$; b) pouze ty permutace, kde na prvních třech místech je trojice $\{1,2,3,.,.,.,.\},3!=6$; **1.1.5.** $\{l\},\{R,L\},\{R,R,R,L\},\ldots$; nekonečný ; **1.1.6.** všechny body a) úsečky délky 1 ; b) čtverce o straně 1; c) krychle o straně 1; ve všech případech nekonečný (nespočetný);

1.2.1. $p=\frac{4!}{4^4}=\frac{3}{32}$; **1.2.2.** $p=\frac{8.7!}{10!}=\frac{1}{90}$; **1.2.3.** $p=\frac{2.9!9!}{6!}=\frac{1}{10}$, **1.2.4.** postupně: $p=\frac{n!}{n^n}$; $p=\frac{1}{n(n-1)}$; $p=\frac{2n!n!}{(2n)!}$; **1.2.5.** $p=\frac{5!}{8!}=\frac{1}{336}$; **1.2.6.** a) $p=\frac{5}{9}$; b) $p=\frac{3}{4}$; c) $p=0$; **1.2.7.** a) $p=\frac{1}{25}$; b) $p=\frac{1}{16}$; c) $p=\frac{1}{4}$; **1.2.8.** a) $p=\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\doteq 0.413$; b) $p=\frac{2}{\pi}\doteq 0.637$; **1.2.9.** a) $p=\frac{1}{3}$; b) $p=\frac{2}{3}$ **1.2.10.** $p=\frac{1}{4}$;

1.3.1. $p=0.94$; **1.3.2.** $p=\frac{19}{27}$; **1.3.3.** a) $p=0.448$; b) $p=0.988$; **1.3.4.** $p=1-\frac{95.94.93.92.91}{100.99.98.97.96}\doteq 0.23$; **1.3.5.** $p=\frac{41}{55}$; **1.3.6.** a) $p=\frac{1}{5}$; b) $p=\frac{1}{20}$; c) $p=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}=0.633$; **1.3.7** a) $p=\frac{3}{5}$; b) $p=\frac{4}{7}$; **1.3.8.** a) $p=\frac{89}{210}$; b) $p=\frac{49}{210}$; c) $p=\frac{2}{5}$; **1.3.9.** a) $p_1=\frac{2}{9},p_2=\frac{1}{9}$; b) $p_1=\frac{4}{7},p_2=\frac{2}{7},p_3=\frac{1}{7}$;

1.4.1 $P(A|B)=\frac{2}{3},P(A|C)=\frac{1}{2},P(B|C)=\frac{1}{2}$; **1.4.2.** $p=\frac{1}{3}$; **1.4.3.** a) $p=\frac{7}{9}$; b) $p=\frac{7}{8}$; **1.4.4.** a) $P(A)=\frac{6}{15},P(B)=\frac{2}{3},P(C)=\frac{2}{5}$; b) $P(A\cap B)=\frac{2}{5},P(A\cap C)=\frac{4}{15},P(B\cap C)=\frac{1}{5},P(A\cap B\cap C)=\frac{2}{15}$; c) $P(A|B)=\frac{3}{5},P(A|C)=\frac{2}{3},P(B|A)=\frac{3}{4},P(B|C)=\frac{1}{2},P(C|A)=\frac{1}{2},P(C|B)=\frac{3}{10}$; **1.4.5.** a)$p=\frac{1}{8}$; b) $p=\frac{69}{620}$; c) $p=\frac{9}{91}$; d)$p=\frac{2}{15}$; **1.4.6.** a) $p=\frac{3}{8}$; b)$p=\frac{5}{16}$; **1.4.7.** Jevy A,B jsou nezávislé, jevy A,C i B,C jsou po dvou závislé; **1.4.8.** a)ano; b)ne;

1.5.1. ano; **1.5.2.** ano; **1.5.3.** $p=\frac{6}{25}$; **1.5.4.** $p=\frac{2}{3}$; **1.5.5.** $p=\frac{7}{18}$; **1.5.6.** $p=\frac{5}{8}$; **1.5.7.** $p=\frac{5}{32}$; **1.5.8.** $p=\frac{6}{13}$; **1.5.9.** $p=\frac{2}{11}$; **1.5.10.** $p=\frac{15}{59}$;

2.Náhodná veličina a její charakteristiky.

2.1. Co je to diskrétní rozdělení náhodné veličiny? Popište alternativní, binomické, geometrické, hypergeometrické a Poissonovo rozdělení. Použití těchto rozdělení ilustruje na příkladech. Co je to spojité rozdělení náhodné veličiny, jaké vlastnosti má hustota spojitého rozdělení? Popište rovnoměrné, exponenciální a normální rozdělení.

Úlohy :

2.1.1. Krychle, která má všechny stěny obarveny, je rozřezána na 1000 krychliček o stejných rozměrech. Ty jsou vloženy do urny, kde jsou promíchány. Náhodně je vytažena jedna krychlička. Náhodná veličina X udává, kolik obarvených stěn má vytažená krychlička. Najděte rozdělení náhodné veličiny X.

2.1.2. Při hodu několika kostkami určuje náhodná veličina X součet bodů na všech hozených kostkách. Najděte rozdělení náhodné veličiny X, házíme-li
a) dvěma kostkami, b) třemi kostkami ?

2.1.3. V osudí je pět koulí označených čísly 1,2,3,4,5. Postupně vytáhneme tři koule. Náhodná veličina X udává maximum z čísel označujících tažené koule, byly-li koule vytaženy bez vracení. Náhodná veličina Y udává toto maximum, byla-li každá koule ihned po vytažení vrácena zpět. Najděte rozdělení náhodných veličin X a Y.

2.1.4. Ze společnosti 10 osob, kterou tvoří 7 mužů a 3 ženy, vybereme náhodně tři osoby. Náhodná veličina X udává počet žen ve výběru. Najděte rozdělení náhodné veličiny X a udejte o jaké rozdělení se jedná.

2.1.5. Je pravděpodobnější, že padnou
a) 3 líce při hodu 4 mincemi, nebo 5 líců při hodu 8 mincemi?
b) alespoň 3 líce při hodu 4 mincemi, nebo alespoň 5 líců při hodu 8 mincemi?

2.1.6. Automobil postupně projíždí křižovatkami se semafory tak dlouho, dokud ho některý ze semaforů nezastaví. Přitom každý ze semaforů ho zastaví s pravděpodobností $\frac{1}{3}$, nezastaví s pravděpodobností $\frac{2}{3}$. Náhodná veličina X udává, kolik křižovatek automobil projede, než bude zastaven. Najděte její rozdělení a udejte, o jaké rozdělení pravděpodobnosti se jedná.

2.1.7. Napište hustotu náhodné veličiny X, řídící se rovnoměrným rozdělením pravděpodobnosti na intervalu $\langle -1, 2\rangle$.

2.1.8. Napište tvar hustoty exponenciálního rozdělení, je-li $\lambda = 3$.

2.1.9. Náhodná veličina X má rozdělení pravděpodobnosti s hustotou

$$f(x) = \frac{c}{1+x^2}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Najděte konstantu c.

2.1.10. Napište tvar hustoty normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$, je-li
a) $\mu = 0, \sigma^2 = 1$, b) $\mu = 2, \sigma^2 = 4$.

2.2 Definujte funkci a veďte její vlastnosti. Vysvětlete co jsou to kvantily, speciálně medián a co je to modus.

Úlohy :

2.2.1. Najděte distribuční funkci náhodné veličiny X, jejíž rozdělení je dáno tabulkou :

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

2.2.2. Najděte distribuční funkci $F(x)$ náhodné veličiny X z příkladu 2.1.3.

2.2.3. Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení pravděpodobnosti na intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Vypočtěte distribuční funkci $F(x)$ a medián.

2.2.4. Distribuční funkce $F(x)$ náhodné veličiny X je dána vztahem

$$F(x) = \alpha + \beta . \arctan(\frac{x}{2}), x \in (-\infty, \infty).$$

Určete konstanty α, β a vypočtěte hustotu $f(x)$.

2.2.5. Náhodná veličina X má distribuční funkci

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq -2, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{x}{2} & , \quad -2 < x < 2, \\ 1 & , \quad x \geq 2. \end{cases}$$

Vypočtěte
a) pravděpodobnost $P(-1 \leq X \leq 1)$,
b) hustou $f(x)$,
c) horní kvartil (75% kvantil) $x_{0.75}$

2.2.6. Náhodná veličina X má hustotu

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & , \quad x \geq 0, \\ 0 & , \quad x < 0. \end{cases}$$

Vypočtěte
a) distribuční funkci $F(x)$,
b) modus x_{mod},
c) medián $x_{0.5}$,
d) $P(X < 3)$.

2.2.7. V příkladu 2.1.2 určete modus x_{mod}.

2.2.8. Náhodná veličina X má hustotu

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-}x & , \quad x \geq 0, \\ 0 & , \quad x < 0. \end{cases}$$

Vypočtěte distribuční funkci $F(x)$ a modus x_{mod}.

2.3. Jak se vypočte střední hodnota a rozptyl náhodné veličiny? Jaké mají tyto charakteristiky vlastnosti? Definujte obecné a centrální momenty a jejich výpočet ukažte na příkladech . Ukažte na příkladě použití Čebyšovy nerovnosti.

Úlohy :

2.3.1. Najděte střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X z příkladu 2.2.1.

2.3.2. Najděte střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X z příkladu 2.1.3.

2.3.3. Vypočtěte střední hodnotu a rozptyl následujících diskrétních rozdělení
a) binomického s parametry n, p,
b) Poissonova s parametrem λ,
c) geometrického s parametrem p.

2.3.4. Najděte střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny Z, jejíž hustota je

$$f(z) = \begin{cases} z & ,0 \leq z \leq 1, \\ 2 - y & ,1 \leq z \leq 2, \\ 0 & ,\text{jinde.} \end{cases}$$

2.3.5. Vypočtěte střední hodnotu a rozptyl následujících spojitých rozdělení
a) rovnoměrného intervalu $< 0, 1 >$,
b) exponenciálního s parametrem λ,
c) normálního s parametry μ, σ^2.

2.3.6. Uvažujte náhodnou veličinu X z příkladu 2.2.1. Vypočtěte obecné momenty μ_3', μ_4' a centrální momenty μ_3, μ_4.

2.3.7. Uvažujte náhodnou veličinu X s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} e^-x & , \quad x \geq 0, \\ 0 & , \quad x < 0. \end{cases}$$

Vypočtěte k-tý obecný moment μ_k' (použijte gama funkci). O jaké rozdělení se jedná?

2.3.8. Vyjádřete třetí, resp. čtvrtý centrální moment μ_3, resp. μ_4 pomocí obecných momentů nejvýše třetího, resp. čtvrtého řádu. Výsledek použijte pro kontrolu řešení příkladu 2.3.6.

2.3.9. Využitím Čebyševovy nerovnosti odhadněte pravděpodobnost

$$p = P(|X - E(X)| < 0.3)$$

jestliže víte, že pro rozptyl platí $D(X) = 0.009$.

2.3.10. Náhodná veličina X udává počet líců při 200 hodech symetrickou mincí (pravděpodobnost líce v každém hodu je $\frac{1}{2}$). Pomocí Čebyševovy nerovnosti dokažte
a) $P(90 < X < 110) \geq \frac{1}{2}$,
b) $P(80 < X < 120) \geq \frac{7}{8}$.
Jaká má náhodná veličina X rozdělení?

2.4. Jak se provádí transformace náhodných veličin? Odvoďte tvar hustoty transformované spojité náhodné veličiny. Vypočtěte střední hodnotu a rozptyl funkce náhodné veličiny, speciálně charakteristické funkce. Vypočtěte obecné momenty pomocí charakteristické funkce a odvoďte tvar charakteristické funkce součtu náhodných veličin.

Úlohy :

2.4.1. Uvažujme náhodnou veličinu X z příkladu 2.2.1. Zaveďme náhodné veličiny $Y = (X-1)^2, Z = X^3 - 3X^2 + 2X + 1$. najděte rozdělení náhodných veličin Y a Z.

2.4.2. Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení na intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & , x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle, \\ 0 & , \text{jinde.} \end{cases}$$

Vypočtěte hustotu $g(y)$ náhodné veličiny $Y = 2 \sin X$.

2.4.3. Náhodná veličina X má normální rozdělení pravděpodobnosti s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} e^{-}x & , x \geq 0, \\ 0 & , x < 0. \end{cases}$$

Vypočtěte hustotu $g(y)$ náhodné veličiny $Y = \sqrt{X}$.

2.4.4. Náhodná veličina X má normální rozdělení pravděpodobnosti s hustotou

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e \frac{-}{x^2} 2, x \in (-\infty, \infty).$$

Najděte hustotu náhodné veličiny $Y = \mu + \sigma X$ a určete její rozdělení.

2.4.5. Náhodná veličina X má hustotu rozdělení

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} x^2 e^{-x} & , x \geq 0, \\ 0 & , x < 0. \end{cases}$$

Pro náhodné veličiny Y a Z platí: $Y = X^2, Z = e^X$. Vypočtěte (pomocí funkce gama) střední hodnotu a rozptyl náhodných veličin Y, Z, aniž byste hledali hustoty těchto veličin.

2.4.6. Vypočtěte střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny $|Y|$ z příkladu 2.4.2. bez využití znalosti hustoty $g(y)$.

2.4.7. Vypočtěte charakteristickou funkci náhodné veličiny X z příkladu 2.2.1. a pomocí ní vypočtěte střední hodnotu a rozptyl této veličiny.

2.4.8. Vypočtěte charakteristickou funkci náhodné veličiny X s diskrétním rozdělením daném tabulkou *(Uvědomte si, proč je tato funkce reálná !)*

a)

X	-1	1
p	0.5	0.5

,

b)

X	-2	0	2
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

2.4.9. Vypočtěte charakteristickou funkci náhodné veličiny X, která má hustotu

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-}|x|, x \in (-\infty, \infty).$$

2.4.10. Vypočtěte charakteristickou funkci následujících rozdělení
a) alternativního s parametrem p,
b) binomického s parametry n, p,
c) Poissonova s parametrem λ,
d) normálního s parametry $\mu = 0, \sigma^2 = 1$.

2.4.11. Na základě výsledků příkladu 2.4.8. odvoďte
a) všechny obecné momenty alternativního rozdělení,
b) střední hodnotu binomického rozdělení,
c) střední hodnotu a rozptyl Poissonova rozdělení,
d) charakteristickou funkci normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ (využijte příkladu 2.4.4).

Výsledky a řešení úloh:

2.1.1.

X	0	1	2	3
p	$\frac{512}{1000}$	$\frac{384}{1000}$	$\frac{96}{1000}$	$\frac{8}{1000}$

;

2.1.2. a)

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

;

b)

X	3	4	5	6	7	8	9	10
p	$\frac{1}{216}$	$\frac{3}{216}$	$\frac{6}{216}$	$\frac{10}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{21}{216}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{27}{216}$
X	11	12	13	14	15	16	17	18
p	$\frac{27}{216}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{21}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{10}{216}$	$\frac{6}{216}$	$\frac{3}{216}$	$\frac{1}{216}$

;

2.1.3. a)

X	3	4	5
p	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$

; b)

Y	1	2	3	4	5
p	$\frac{1}{125}$	$\frac{7}{125}$	$\frac{19}{125}$	$\frac{37}{125}$	$\frac{61}{125}$

;

2.1.4.

X	0	1	2	3
p	$\frac{292}{1000}$	$\frac{525}{1000}$	$\frac{175}{1000}$	$\frac{8}{1000}$

; hypergeometrické rozdělení ;

2.1.5. a) 3 líce; b) alespoň 5 líců; binomické rozdělení;
2.1.6. $p(i) = \frac{1}{3}.(\frac{2}{3})^i,\ i = 0, 1, 2, \dots$; geometrické rozdělení;
2.1.7. $g(x) = \frac{1}{3},\ x \in \langle -1; 2 \rangle; g(x) = 0$ jinde;
2.1.8. $f(x) = 3e^{-3x},\ x \geq 0; f(x) = 0,\ x < 0;$ **2.1.9.** $c = \frac{1}{\pi}$;
2.1.10. a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2},\ x \in (-\infty, \infty)$; b) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{8}(x-2)^2}$, $x \in (-\infty; \infty)$;

2.2.1. $F(x) = \begin{cases} 0 & , x \in (-\infty; \infty), \\ \frac{1}{2} & , x \in \langle 0; 1), \\ \frac{3}{4} & , x \in \langle 1; 2), \\ 1 & , x \in \langle 2; \infty); \end{cases}$ **2.2.2.** $F(x) = \begin{cases} 0 & , x \in (-\infty; 3), \\ \frac{1}{10} & , x \in \langle 3; 4), \\ \frac{2}{5} & , x \in \langle 4; 5), \\ 1 & , x \in \langle 5; \infty); \end{cases}$

2.2.3. $F(x) = \begin{cases} 0 & , x < -1, \\ \frac{x+1}{2} & , x \in \langle -1; 1), \\ 1 & , x \geq 1. \end{cases}$ $x_{0.5} = 0$; **2.2.4.** $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{\pi}$;
$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{2}{4+x^2},\ x \in (-\infty; \infty)$; **2.2.5.** a) $P(-1 \leq X \leq 1) = \frac{1}{3}$;
b) $f(x) = \frac{1}{\pi}(4-x^2)^{-\frac{1}{2}},\ x \in (-2; 2); f(x) = 0$ jinde; c) $x_{0.75} = \sqrt{2}$;
2.2.6. a) $F(x) = 1 - e^{-x}$; b) $x_{mod} = 0$; c) $x_{0.5} = \ln(2)$;
d) $P(X < 3) = 1 - e^{-3}$; **2.2.7.** a) $x_{mod} = 7$; b) $x_{mod} = 10; 11$;
2.2.8. $x_{mod} = 1$; $F(x) = 0,\ x < 0$; $F(x) = 1 - e^{-x} - xe^{-x},\ x \geq 0$;

2.3.1. $E(X) = \frac{3}{4}; D(X) = \frac{11}{16}$; **2.3.2.** $E(X) = \frac{9}{2}; D(X) = \frac{9}{20}$;
2.3.3. a) $E(X) = np; D(X) = np(1-p)$; b) $E(X) = D(X) = \lambda$;
c) $E(X) = \frac{1-p}{p}; D(X) = \frac{1-p}{p.p}$; **2.3.4.** $E(Z) = 1; D(Z) = \frac{1}{6}$;
2.3.5. a) $E(X) = \frac{1}{2}$; $D(X) = \frac{1}{12}$; b) $E(X) = \frac{1}{\lambda}$; $D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$;
c) $E(X) = \mu$; $D(X) = \sigma^2$; **2.3.6.** $\mu_3' = 2.25$; $\mu_4' = 4.25$; $\mu_3 \doteq 0.285$;
$\mu_4 \doteq 0.77$; **2.3.7.** $\mu_k' = \Gamma(k+1) = k!$; exponenciální rozdělení ($\lambda = 1$);
2.3.8. $\mu_3 = \mu_3' - 3\mu_1'\mu_2' + 2(\mu_1')^3 \mu_4 \mu_4' - 4\mu_3'\mu_1' + 6\mu_2'(\mu_1')^2 - 3(\mu_1')^4$;
2.3.9. $p \geq 0.9$; **2.3.10.** binomické rozdělení; $n = 200, p = 0.5$;

2.4.1

Y	0	1
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

; $P(Z = 1) = 1$;

2.4.2. $g(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}(4-y^2)^{-\frac{1}{2}} & , y \in (-2; 2) \\ 0 & ,\text{jinde} \end{cases}$; **2.4.3.** $g(y) = \begin{cases} 2ye^{-y^2} & , y \geq 0 \\ 0 & , y < 0 \end{cases}$;
2.4.4. $g(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2\sigma^2}(y-\mu)^2),\ y \in R$; normální rozdělení $N(0,1)$;
2.4.5. $E(Y) = 12$; $D(Y) = 216$; $E(Z) = \frac{1}{8}$; $D(Z) = \frac{1}{27} - \frac{1}{64} \doteq 0.021$;
2.4.6. $E(|Y|) = \frac{4}{\pi}$; $D(|Y|) = 4(1 - 4\pi^{-2})$; **2.4.7.** $\varphi(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(e^{it} + e^{2it})$;
$E(X) = \frac{3}{4}$; $D(X) = \frac{11}{16}$; **2.4.8.** a) $\varphi(t) \cos t$; b) $\varphi(t) = \cos^2 t$;
2.4.9. $\varphi(t) = (1+t^2)^{-1}$; **2.4.10** a) $\varphi(t) = e^{it}p + 1 - p$;
b) $\varphi(t) = (e^{it}p + 1 - p)^n$; c) $\varphi(t) = \exp(\lambda(e^{it} - 1))$; d) $\varphi(t) = \exp(-\frac{1}{2}t^2)$;
2.4.11. a) $\mu_k' = p, k = 1, 2, \dots$; b) $E(X) = \mu_1' = np$; c) $E(X) = \mu_1' = \lambda$,
$D(X) = \mu_2' - (\mu_1')^2 = \lambda$; d) $\varphi(t) = \exp(i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2)$.

3. Náhodný vektor.

3.1 Popište diskrétní a spojité rozdělení náhodného vektoru. Co je to sdružená pravděpodobnost, jaké vlastnosti má sdružená hustota? Definujte distribuční funkci náhodného vektoru.

Úlohy :

3.1.1. Náhodný vektor $Z = (X, Y)$ má diskrétní rozdělení dané následující tabulkou:

	$Y = 1$	$Y = 2$
$X = 0$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$
$X = 1$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

Přesvědčte se, že se skutečně jedná o rozdělení pravděpodobnosti a vypočtěte
a) $P(X = Y)$, b) $P(Y > X)$.

3.1.2. Náhodný vektor $Z = (X, Y)$ má diskrétní rozdělení dané následující tabulkou:

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$
$X = 0$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$
$X = 1$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

Vypočtěte
a) $P(X = Y)$, b) $P(XY > 0)$, c) $P(|X - Y| \geq 1)$.

3.1.3. V osudí je pět koulí označených čísly 1,2,3,4,5. Vytáhneme najednou tři koule. Náhodná veličina X udává minimum, náhodná veličina Y maximum z čísel vytažených koulí. Najděte rozdělení náhodného vektoru $Z = (X, Y)$.

3.1.4. Náhodný vektor $Z = (X, Y)$ má spojité rozdělení
a) na čtverci, s hustotou

$$f(x, y) = \begin{cases} c & , \ 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & , \ \text{jinde} \end{cases}$$

b) na trojúhelníku, s hustotou

$$f(x, y) = \begin{cases} c & , \ 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ 0 & , \ \text{jinde} \end{cases}$$

Vypočtěte v obou případech konstantu c a $P(Y \geq 2X)$.

3.1.5. Náhodný vektor $Z = (X, Y)$ má hustotu

$$f(x, y) = \begin{cases} c(x^2 + y^2) & , \ x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0 & , \ \text{jinde.} \end{cases}$$

Vypočtěte konstantu c a $P(X^2 + Y^2 \leq \frac{1}{4})$.

3.1.6. Náhodný vektor $Z = (X, Y)$ má hustotu

$$f(x,y) = \begin{cases} c(\frac{x}{2} + \frac{y}{3}) & , \ 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 3, \\ 0 & , \ \text{jinde.} \end{cases}$$

Vypočtěte konstantu c a $P(0 \le X \le 1, 2 \le Y \le 3)$.

3.1.7. Náhodný vektor $Z = (X, Y)$ má distribuční funkci

$$F(x,y) = \begin{cases} \sin(x)\sin(y) & , \ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le \frac{\pi}{2}, \\ 0 & , \text{jinde.} \end{cases}$$

Přesvědčte se, že se jedná opravdu o distribuční funkci a vypočtěte sdruženou hustotu náhodného vektoru Z.

3.1.8. Náhodný vektor $Z = (X, Y)$ má distribuční funkci

$$F(x,y) = \frac{1}{2}(sin(x) + sin(z) - sin(x+y)), 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le \frac{\pi}{2}.$$

Vypočtěte

a) sdruženou hustotu f(x,y), b) $P(0 \le x \le \frac{\pi}{6}, 0 \le y \le \frac{\pi}{6})$.

3.1.9. Náhodný vektor $V = (X, Y, Z)$ má hustotu

$$f(x,y,z) = \begin{cases} c(x+y+z) & , \ 0 \le x \le 1, 0 \le y \le y \le 1, 0 \le z \le 1, \\ 0 & , \text{jinde.} \end{cases}$$

Vypočtěte konstantu c a $P(0 \le X \le \frac{1}{2}, 0 \le Y \le \frac{1}{2}, 0 \le Z \le \frac{1}{2})$.

3.2. Definujte vektor středních hodnot náhodného vektoru. Jak se počítají jednotlivé složky tohoto vektoru? Definujte kovariaci a kolerační koeficient. Na příkladech ukažte výpočet kovariační a korelační matice.

Úlohy :

3.2.1 Uvažujme náhodný vektor $Z = (X, Y)$ z příkladu 3.1.1. Vypočtěte
a) $E(X), E(Y)$, b) $D(X), D(Y)$, c) kovarianci $d(X, Y)$.

3.2.2. Uvažujme náhodný vektor $Z = (X, Y)$ z příkladu 3.1.2. Vypočtěte
a) kovarianci $d(X, Y)$, b) korelaci $r(X, Y)$.

3.2.3. Uvažujme náhodný vektor $Z = (X, Y)$ z příkladu 3.1.5. Vypočtěte kovariační matici Σ.

3.2.4. Uvažujme náhodný vektor $Z = (X, Y)$ z příkladu 3.1.6. Vypočtěte
a) kovarianční matici Σ, b) kolerační koeficient $\rho(X, Y)$.

3.2.5. Vypočtěte kovarianční matici Σ náhodného vektoru $Z = (X, Y)$ s hustotu

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ x + y \leq 2 \\ 0 & , \ \text{jinde.} \end{cases}$$

3.2.6. Náhodný vektor $U = (X, Y, Z)$ má hustotu

$$f(x, y, z) = \begin{cases} x + 2z & , \ 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq 1, \ 0 \leq z \leq 1 \\ 0 & , \ \text{jinde.} \end{cases}$$

Vypočtěte a) $E(X), E(Y), E(Z)$, b) kovariační matici Σ.

3.2.7. Najděte korelační matici R náhodného vektoru $U = (X, Y, Z)$ s kovarianční matici $\Sigma = \begin{pmatrix} 16 & -14 & 12 \\ -14 & 49 & -21 \\ 12 & -21 & 36 \end{pmatrix}$.

3.2.8. Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$. Zaveďme náhodnou veličinu $Y = \sin(X)$. Vypočtěte kovarianci $d(X, Y)$.

3.2.9. Uvažujme náhodnou veličinu X s alternativním rozdělením daným předpisem: $P(X = 0) = \frac{1}{3}, P(X = 1) = \frac{2}{3}$. Zaveďme náhodné veličiny $Y = X^3, Z = X^5$. Vypočtěte korelační koeficient $\rho(Y, Z)$ a výsledek zdůvodněte!

3.2.10. Nechť náhodná veličina X má exponenciální rozdělení s parametrem $\lambda = 1$. Zaveďme náhodné veličiny $Y = X^2, Z = X^3$. Vypočtěte (pomocí funkce gama) korelační matici R náhodného vektoru $U = (X, Y, Z)$.

3.3. Co je to marginální rozdělení? Jak se vypočítá marginální rozdělení ze sdruženého rozdělení v diskrétním a spojitém případě? Definujte nezávislé náhodné veličiny a vysvětlete, jak souvisí nezávislost náhodných veličin s kovariancí a korelací.

Úlohy :

3.3.1. Uvažujte náhodný vektor $Z = (X, Y)$ z příkladu 3.1.1. Vypočtěte marginální rozdělení náhodných veličin X, Y a rozhodněte, zda jsou veličiny X a Y nezávislé. Srovnejte s výsledkem příkladu 3.2.1. c) !

3.3.2. Uvažujte náhodný vektor $Z = (X, Y)$ z příkladu 3.1.2. Vypočtěte marginální rozdělení náhodných veličin X, Y a rozhodněte, zda jsou veličiny X a Y nezávislé. Je tento závěr možné udělat též na základě výsledků příkladu 3.2.2 ?

3.3.3. Uvažujte náhodný vektor $Z = (X, Y)$ z příkladu 3.1.4. Vypočtěte marginální rozdělení náhodných veličin X, Y. Jsou veličiny X a Y nezávislé?

3.3.4. Náhodný vektor $Z = (X, Y)$ má rovnoměrné rozdělení na kruhu s hustotou

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & , x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0 & ,\text{jinde.} \end{cases}$$

Vypočtěte
a) marginální hustoty $f_x(x), f_y(y)$ náhodných veličin X, Y
a dokažte, že tyto náhodné veličiny jsou závislé,
b) kovarianci $d(X, Y)$.

3.3.5. Uvažujte náhodný vektor $Z = (X, Y)$ z příkladu 3.1.6. Vypočtěte marginální hustoty $f_x(x), f_y(y)$ náhodných veličin X, Y.

3.3.6. Uvažujte náhodný vektor $Z = (X, Y)$ z příkladu 3.1.8. Vypočtěte kovarianci $d(X, Y)$ a na základě výsledku dokažte, že náhodné veličiny X a Y jsou závislé.

3.3.7. Náhodný vektor $Z = (X, Y)$ má hustotu

$$f(x,y) = \frac{c}{(18 + x^2)(25 + y^2)}, \ x \in (-\infty, \infty), \ y \in (-\infty, \infty).$$

Vypočtěte konstantu c a marginální hustoty $f_x(x), f_y(y)$ a rozhodněte, zda jsou náhodné veličiny X a Y závislé.

3.3.8. Náhodný vektor $Z = (X, Y)$ má hustotu

$$f(x,y) = \begin{cases} cxye^{-x-y} & , \ x \geq 0, \ y \geq 0, \\ 0 & , \text{ jinde.} \end{cases}$$

Vypočtěte konstantu c, marginální hustoty $f_x(x), f_y(y)$ a rozhodněte, zda jsou náhodné veličiny X a Y nezávislé.

3.3.9. Uvažujte náhodný vektor $U = (X, Y, Z)$ z příkladu 3.2.6. Vypočtěte marginální hustoty
a) náhodných veličin X, Y, Z,
b) náhodných vektorů $(X, Y), (X, Z), (Y, Z)$.
Jsou náhodné veličiny X, Y, Z sdruženě, nebo alespoň po dvou nezávislé?

3.4. Vysvětlete pojem funkce náhodného vektoru. V jednoduchých případech vypočtěte střední hodnotu a rozptyl konkrétní funkce, popřípadě nalezněte její rozdělení.

Úlohy :

3.4.1. Náhodný vektor $Z = (X, Y)$ má diskrétní rozdělení dané tabulkou:

	$Y = 0$	$Y = 6$
$X = 0$	0.3	0.4
$X = 8$	0.2	0.1

Zaveďme náhodnou veličinu $U = \sqrt{X^2 + Y^2}$. Vypočtěte $E(U), D(U)$ a najděte rozdělení náhodné veličiny U.

3.4.2 Náhodný vektor $Z = (X, Y)$ má spojité rozdělení na čtverci (viz příklad 3.3.4. a)) s hustotou

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & , \ 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, \\ 0 & , \text{ jinde.} \end{cases}$$

Vypočtěte střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny $U = |X - Y|$.

3.4.3 Náhodný vektor $Z = (X, Y)$ má dvojrozměrné normální rozdělení s hustotou

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{(}\frac{x^2+y^2}{2}), \ x \in (-\infty, \infty), \ y \in (-\infty, \infty).$$

Vypočtěte střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny $U = \sqrt{X^2 + Y^2}$. K výpočtu použijte substituce do polárních souřadnic.

3.4.4. Náhodný vektor $U = (X, Y, Z)$ má rovnoměrné rozdělení na kouli s hustotou

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi} & , \ x^2 + y^2 + z^2 \le 1, \\ 0 & , \text{ jinde.} \end{cases}$$

Vypočtěte střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny $T = \sqrt{X^2 + Z^2 + Y^2}$. K výpočtu použijte sférických souřadnic.

3.4.5. Uvažujte náhodný vektor $U = (X, Y, Z)$ z příkladu 3.2.6. Vypočtěte střední hodnotu a rozptyl náhodných veličin $S = XYZ, \ T = XY^2Z^3$.

3.4.6. Náhodný vektor $Z = (X, Y)$ má kovarianční matici $\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.
Víte-li, že E(X) = 1 a E(Y) = 2, vypočtěte
 a) střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny $U = X + Y$,
 b) kovarianční matici náhodného vektoru $T = (X + Y, X - Y)$.

3.4.7. Náhodný vektor $U = (X, Y, Z)$ má nulový vektor středních hodnot a kovarianční matici $\Sigma = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. Vypočtěte
 a) $E(X^2 + 2Y^2 + 3Z^2)$,
 b) $D(3X + 2Y - Z)$,
 c) kovarianci $d(S, T)$, kde $S = X + Y - Z, T = X + Z$.

3.4.8. Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny, přičemž

a) $X \sim \beta\iota(n_1, p), Y \sim \beta\iota(n_2, p)$ (binomické rozdělení),

b) $X \sim \rho\sigma(\lambda_1), Y \sim \rho\sigma(\lambda_2)$ (Poissonovo rozdělení),

c) $X \sim N(\mu_1, \sigma^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$ (normální rozdělení).

Pomocí charakteristických funkcí najděte rozdělení náhodné veličiny $Z = X+Y$.

3.4.9. Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny s alternativním rozdělením s parametrem p. Pomocí charakteristických funkcí dokažte, že náhodná veličina $Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ má binomické rozdělení $\beta\iota(n, p)$.

3.4.10. Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením na intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Zaveďme náhodnou veličinu $Z = X + Y$. Pomocí charakteristických funkcí dokažte, že náhodná veličina Z je veličina z příkladu 2.3.4.

Výsledky a řešení úloh:

3.1.1. a) $P(X = Y) = \frac{1}{8}$; b) $P(Y > X) = \frac{7}{8}$ **3.1.2.** a) $P(X = Y) = \frac{7}{16}$; b) $P(XY > 0) = \frac{1}{8}$; c) $P(|X - Y| \geq 1) = \frac{9}{16}$; **3.1.3.**

	$Y=3$	$Y=4$	$Y=5$
$X=1$	0.1	0.2	0.3
$X=2$	0	0.1	0.2
$X=3$	0	0	0.1

; **3.1.4.** a) $c = 1$; $P(Y \geq 2X) = \frac{1}{4}$; b) $c = 2$; $P(Y \geq 2X) = \frac{1}{2}$; **3.1.5.** $c = \frac{2}{\pi}$; $P(X^2 + Y^2 \leq \frac{1}{4}) = \frac{1}{16}$; **3.1.6.** $c = \frac{1}{6}; P(0 \leq X \leq 1,\ \ 2 \leq Y \leq 3) = \frac{13}{72}$; **3.1.7.** $f(x, y) = \cos(x)\cos(y),\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2};\ f(x, y) = 0$ jinde; **3.1.8.** a) $f(x, y) = \frac{1}{2}\sin(x, y),\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2},\ f(x, y) = 0$ jinde; b) $P(0 \leq x \leq \frac{\pi}{6},\ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{6}) = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$; **3.1.9.** $c = \frac{2}{3}; P(0 \leq X \leq \frac{1}{2},\ 0 \leq Y \leq \frac{1}{2},\ 0 \leq Z \leq \frac{1}{2}) = \frac{1}{16}$;

3.2.1. a) $E(X) = \frac{3}{6},\ E(Y) = \frac{3}{2}$; b) $D(X) = \frac{15}{64},\ D(Y) = \frac{1}{4}$; c) $d(X, Y) = \frac{1}{16}$; **3.2.2.** a) $d(X, Y) = 0$; b) $r(X, Y) = 0$; **3.2.3.** $\Sigma = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/9 \end{pmatrix}$; **3.2.4.** a) $\Sigma = \begin{pmatrix} \frac{11}{36} & -\frac{1}{24} \\ -\frac{1}{24} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$; b) $\rho(X, Y) = -\frac{1}{11}$; **3.2.5.** $\Sigma = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$; **3.2.6.** a) $E(X) = E(Y) = E(Z) - \frac{7}{12}$; b) $\Sigma = \frac{1}{144}\begin{pmatrix} 11 & -1 & -1 \\ -1 & 11 & 1 \\ -1 & 1 & 11 \end{pmatrix}$; **3.2.7.** $\Sigma = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; **3.2.8.** $d(X, Y) = \frac{4-\pi}{2\pi}$; **3.2.9.** $\rho(Y, Z) = 1$; v obou případech se jedná o náhodnou veličinu X; **3.2.10.** $R = \begin{pmatrix} 1 & 0,894 & 0,688 \\ 0,894 & 1 & 0,923 \\ 0,688 & 0,923 & 1 \end{pmatrix}$

3.3.1. X : $\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline 5/8 & 3/8 \\ \hline\end{array}$; Y : $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 1/2 & 1/2 \\ \hline\end{array}$; závislé; **3.3.2.** X : $\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline 3/4 & 1/4 \\ \hline\end{array}$; Y : $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 2 \\ \hline 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ \hline\end{array}$; nezávislé; není to možné; **3.3.3.** a) $f_x(x) = \begin{cases} 1 & ,0 \leq x \leq 1 \\ 0 & ,\text{jinde} \end{cases}$; $f_y(y) = \begin{cases} 1 & ,0 \leq y \leq 1 \\ 0 & ,\text{jinde} \end{cases}$; nezávislé; b) $f_x(x) = \begin{cases} 2x & ,0 \leq x \leq 1 \\ ;0 & ,\text{jinde} \end{cases}$; $f_y(y) = \begin{cases} 2(1-y) & ,0 \leq y \leq 1 \\ 0 & ,\text{jinde} \end{cases}$; závislé; **3.3.4.**

4. Základní pojmy z teorie náhodných proccesů.

4.1. Definujte nekonečnou posloupnost náhodných veličin a uveďte zákony velkých čísel. Vyslovte Bernoulliovu větu a centrální limitní větu a ukažte jejich použití na příkladech. Vyslovte Chinčinovu větu a pomocí ní ukažte, jak lze některé integrály počítat metodu Monte Carlo.

Úlohy :

4.1.1. Pravděpodobnost výskytu jevu při jednom pokusu je 0,3. S jakou pravděpodobností lze tvrdit, že relativní četnost výskytu tohoto jevu ve 100 pokusech bude v mezích od 0,2 do 0,4 ? *(Použijte centrální limitní větu.)*

4.1.2. Pravděpodobnost toho, že se za dobu T porouchá jeden přístroj, je rovna 0,2. Užitím centrální limitní věty určete pravděpodobnost toho, že se za dobu T ze sto přístrojů porouchá
a) alespoň 20, b) méně než 28, c) 14 až 26.

4.1.3. Pravděpodobnost výskytu jevu v jednom pokusu je rovna 0,6. Bude provedeno 60 pokusů. Jaká je pravděpodobnost toho, že se tento jev vyskytne ve většině z nich?

4.1.4. Při jednom pokusu získáme kladný výsledek s pravděpodobností 0,05. Kolik je třeba provést pokusů, abychom s pravděpodobností 0,8 získali alespoň pětkrát kladný výsledek?

4.1.5. Vybereme nezávisle na sobě 12 náhodných čísel z intervalu $(0;1)$. Vypočtěte pravděpodobnost, že jejich součet padne do intervalu
a) $(5;7)$, b) $(4;8)$, c) $(5;10)$.

4.1.6. Kolikrát je třeba změřit jistou veličinu, jejíž přesná hodnota je m, aby bylo možné s pravděpodobností 0,98 tvrdit, že absolutní hodnota aritmetického průměru těchto měření se od m liší o méně než 2, je-li směrodatná odchylka rovna čtyřem? Řešte pomocí
a) Čebyšovovy nerovnosti, b) centrální limitní věty.

4.1.7. Urna obsahuje 10 míčků s čísly $0, 1, \ldots, 9$. Vytáhneme postupně n míčků tak, že vytažený míček vždy vracíme zpět. Kolik míčků je třeba vytáhnout, aby relativní četnost vytažení míčků s číslem 6 byla s pravděpodobností alespoň 0,95 v intervalu $(0,09; 0,11)$? Řešte pomocí
a) Čebyšovovy nerovnosti, b) centrální limitní věty.

4.1.8. Výpočet integrálu $J = \int_0^1 x^2 dx$ je proveden metodou Monte Carlo na základě 1000, nezávislých pokusů. Vypočtěte pravděpodobnost toho, že absolutní chyba při určení veličiny J nepřekročí 0,01.

4.1.9. Kolik pokusů musíme provést při výpočtu integrálu $J = \int_o^{\pi/2} sin(x)dx$ metodou Monte Carlo, chceme-li, aby absolutní chyb vypočteného integrálu nepřekročila $0,001.J$ s pravděpodobností $P \geq 0,99$?

4.1.10. Vypočtěte dvojný integrál $J = \int_0^1 \int_0^1 x.sin(\pi xy)dxdy$. Dále tento integrál vypočtěte pomocí metody Monte Carlo na počítači (volte 500 generovaných hodnot) a oba výsledky porovnejte.

4.2. Definujte náhodnou posloupnost a náhodný proces. Vysvětlete pojem silné a slabé stacionarity. Zaveďte pojem kovarianční funkce a spektrální hustoty náhodné posloupnosti (náhodného procesu). Jaký je vztah mezi kovarianční funkcí a spektrální hustotou?

Úlohy (V příkladech 4.2.1 - 4.2.4. je $\{Y_t\}$ posloupnost nekorelovaných náhodných veličin s nulovou střední hodnotou a jednotkovým rozptylem):

4.2.1. Náhodná posloupnost $\{X_t\}$ je dána předpisem

$$X_t = Y_t - 2Y_t - 1$$

. Dokažte, že tato schopnost je stacionární a vypočtěte kovarianční funkci $B(t)$.

4.2.2. Náhodná posloupnost $\{X_t\}$ je dána předpisem

$$X_t = Y_t + 2Y_t - 1 - 3Y_t - 2$$

. Dokažte, že tato posloupnost je stacionární a vypočtěte kovarianční funkci $B(t)$.

4.2.3. Náhodná posloupnost $\{X_t\}$ je dána předpisem

$$X_t a X_t 1 = Y_t$$

, kde $|a| < 1$. Vypočtěte kovarianční funkci $B(t)$ a spektrální husotu $f(\lambda)$ posloupnosti $\{X_t\}$.

4.2.4. Náhodná posloupnost $\{X_t\}$ je dána předpisem

$$X_t 2a X_t 1 + a^2 X_t 2 = Y_t$$

, kde $|a|1$. Vypočtěte kovarianční funkci $B(t)$ a spektrální hustotu $f(\lambda)$ posloupnosti $\{X_t\}$.

4.2.5. Náhodná veličina Y má rovnoměrné rozdělení na intervalu $(0; 2\pi)$. Dokažte, že náhodný proces $X_t = \sin(t + Y)$ je stacionární a vypočtěte jeho kovarianční funkci $B(t)$.

4.2.6. Je-li X_t stacionární proces s kovarianční funkcí
a) $B(t) = e^{-}|t|$, b) $B(t) = e^{-|t|}\cos(t)$,
vypočtěte jeho spektrální hustotu $f(\lambda)$.

4.2.7. Je-li X_t stacionární proces s kovarianční funkcí

$$B(t) = \begin{cases} 1 - |t| & , |t| \leq 1 \\ 0 & , |t| 1 \end{cases},$$

vypočtěte jeho spektrální hustotu $f(\lambda)$.

4.2.8. Je-li X_t stacionární proces se spektrální hustotou

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{(\lambda^2 + 1)^2},$$

vypočtěte jeho kovarianční funkci $B(t)$.

Výsledky a řešení úloh:

4.1.1. $p \doteq 0,97$; **4.1.2.** a) $p \doteq 0,5$; b) $p \doteq 0,977$; c) $p \doteq 0,866$; **4.1.3.** $p \doteq 0.943$; **4.1.4.** 144; **4.1.5.** a) $p \doteq 0,683$; b) $p \doteq 0,955$; c) $p \doteq 0,841$; **4.1.6.** a) $n = 100$; b) $n = 17$; **4.1.7.** a) $n = 1800$; b) $n = 59$; **4.1.8.** $p \doteq 0,71$; **4.1.9.** $n \doteq 1,55.10^6$; **4.1.10.** $J = \frac{1}{\pi}$;

4.2.1. $B(t) = \begin{cases} 5, & t = 0 \\ -2, & t \in \{-1;1\} \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$ **4.2.2.** $B(t) = \begin{cases} 14, & t = 0 \\ -4, & t \in \{-1;1\} \\ -3, & t \in \{-2;2\} \\ 0, & |t|1 \end{cases}$

4.2.3. $B(t) = \frac{a^{|t|}}{1-a^2}$, $f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{(1-2a\cos\lambda + a^2)}$; **4.2.4.** $B(t) = \frac{1}{(1-a^2)^3}[(1 + a^2) + (1a_2)|t|]a^{|t|}$; $f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{(12a\cos\lambda + a^2)^2}$; **4.2.5.** $B(t) = \frac{1}{2}cost$; **4.2.6.** a) $f(\lambda) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+\lambda^2}$; b) $f(\lambda) = \frac{1}{\pi}\frac{\lambda^2+2}{\lambda^4+4}$; **4.2.7.** $f(\lambda) = \frac{1\cos\lambda}{\pi\lambda^2}$; **4.2.8.** $B(t) = \frac{1}{4}e^{|t|}(1 + |t|)$.

5. Výběr, úloha statistické indukce.

5.1. Co je to náhodný výběr? Jak se určí rozdělení náhodného výběru v diskrétním a spojitém případě? Jaký tvar má distribuční funkce náhodného výběru? Definujte uspořádaný náhodný výběr.

Úlohy :

5.1.1. Vyjádřete sdruženou pravděpodobnost $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n)$, je-li $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ prostý náhodný výběr

a) z alternativního rozdělení s parametrem p.

b) z binomického rozdělení s parametry m a p.

c) z Poissonova rozdělení s parametrem λ.

d) z diskrétního rovnoměrného rozdělení v rozsahu N.

5.1.2. Nechť $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ je prostý náhodný výběr ze spojitého rovnoměrného rozdělení na intervalu $(0; 1)$. Vypočtěte sdruženou distribuční funkci $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

5.1.3. Nechť $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ je prostý náhodný výběr z exponenciálního rozdělení s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , \quad x \geq 0, \\ 0 & , \quad x < 0. \end{cases}$$

Jaký tvar má sdružená hustota $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a sdružená distribuční funkce $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$?

5.1.4. Nechť $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ je prostý náhodný výběr z normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$. najděte tvar sdružené hustoty $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

5.1.5. Nechť $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ je prostý náhodný výběr z rozdělení s hustotou $f(x)$ a distribuční funkcí $F(x)$. Uvažujme příslušný uspořádaný náhodný výběr $(X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)})$. Odvoďte

a) obecně distribuční funkci a hustotu náhodných veličin $X_{(1)}, X_{(n)}$,

b) distribuční funkci a hustotu náhodných veličin $X_{(1)}, X_{(n)}$ v případě, že $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ je výběr ze spojitého rovnoměrného rozdělení na intervalu (0;1).

5.2. Co je to realizace náhodného výběru? Jak se sestrojí histogram a empirická distribuční funkce? Uveďte výběrové charakteristiky náhodného výběru - výběrový průměr, rozptyl, modus, medián, variační koeficient a rozpětí. Jak se tyto charakteristiky počítají? Jak se provádí třídění dat - ukažte na příkladech.

Úlohy :

5.2.1. Vypočtěte
empirickou distribuční funkci,
modus, medián, variační rozpětí V,
výběrový průměr $\bar{x}$ a rozptyl s^2,
jestliže jsme při náhodném výběru získali následující realizace
a) 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0.
b) 1, 1, 1, 2, 3, 3, 4, 5, 7.
c) 16, 17, 19, 22, 18, 19, 20, 21, 20, 22, 18.

5.2.2. Při dvou náhodných výběrech ($n_1 = n_2 = 15$) jsme získali následující realizace:
$X_i : 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 10,$
$Y_i : 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 9, 9, 10.$
Vypočtěte
a) modus, medián a variační rozpětí v obou výběrech,
b) $\bar{x}, \bar{y}, s_x^2, s_y^x,$
c) v první složce proveďte třídění do 4 tříd, ve druhé složce do 3 tříd.

5.2.3. V předchozí úloze 5.2.2 uvažujte vektor realizací $(X_i, Y_i), i = 1, 2, \ldots, 15.$ Sestavte tabulku absolutních četností
a) jednotlivých dvojic.
b) při třídění do 3 tříd v první složce, do 4 tříd ve druhé složce.

5.2.4. Při měření 100 novorozenců byla měřena délka těla X a odvod hlavy Y. jako realizace vektoru (X, Y) byla získána následující data:

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
52	36	48	34	50	34	51	34	47	35	51	35	52	36	49	34
52	37	52	36	50	35	50	34	43	34	49	34	48	34	49	34
50	33	48	34	51	36	54	38	49	34	49	33	49	33	49	33
50	34	50	33	49	35	51	35	53	35	48	32	48	33	51	35
51	34	49	34	51	36	51	34	50	35	47	35	49	34	52	35
51	37	50	35	56	39	52	34	47	34	53	36	49	34	48	33
51	36	53	33	51	36	49	34	51	35	50	34	49	35	50	33
49	34	50	34	48	34	47	35	50	35	53	36	52	36	47	33
48	33	48	33	50	36	49	32	49	35	48	34	50	34	50	35
48	34	50	35	49	33	50	32	54	37	50	35	52	34	53	38
52	36	53	37	48	34	48	33	50	35	50	35	50	34	53	39
48	33	52	34	50	33	51	35	52	36	49	33	50	34	49	35
52	36	49	35	49	34	51	35								

Sestavte tabulku absolutních četností
a) jednotlivých dvojic.
b) při třídění do 5 tříd pro první souřadnici, do 4 tříd pro druhou souřadnici.

Výsledky a řešení úloh:

5.1.1. a) $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) = p^{\sum_{i=1}^n X_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^n X_i}$; b) $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) = \binom{m}{x_1}\binom{m}{x_2}\ldots\binom{m}{x_n}p^{\sum_{i=1}^n X_1}(1-p)^{mn-\sum_{i=1}^n X_i}$; c) $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) = \frac{e^{n\lambda}}{x_1!x_2!\ldots x_n!}\lambda^{\sum_{i=1}^n X_1}$; d) $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2 \ldots, X_n = x_n) = (\frac{1}{N})^n$; **5.1.2.** $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 x_2 \ldots x_n$; **5.1.3.** $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda^n exp(-\lambda\sum_{i=1}^n X_i), F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (1-e^{-\lambda x_1})(1-e^{\lambda x^2})\ldots(1-e^{-\lambda x_n})$; **5.1.4.** $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}} exp(-\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n (X_i-\mu)^2)$; **5.1.5.** a) $F_{(1)}(x) = 1-(1-F(x))^n, f_{(1)}(x) = nf(x)(1-F(x))^{n-1}$; $F_{(n)}(x) = (F(x))^n, f_{(n)}(x) = nf(x)(F(x))^{n1}$; **5.2.1.** a)
$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0, \\ \frac{5}{11} & x \in \langle 0; 1); \\ 1 & x > 1, \end{cases}$$
, $x_{mod} = x_{0,5} = V = 1$, $\bar{x} = \frac{6}{11}, s^2 = 0,273$; b)

x	< 1	$< 1; 2)$	$< 2; 3)$	$< 3; 4)$	$< 4; 5)$	$< 5; 7)$	> 7
$F(x)$	0	1/3	4/9	2/3	7/9	8/9	1

, $x_{mod} = 1, x_{0,5} = 3, V = 6$, $\bar{x} = 3, s^2 = 4,25$, c) $\bar{x} \doteq 19,273; s^2 \doteq 3,807$;
5.2.2. a) $x_{mod} = 6; x_{0,5} = 5; V = 8; y_{mod} = 6, y_{0,5} = 6, V = 6$; b) $\bar{x} = 5; s_x^2 = 3,571; \bar{y} = 6; s_y^2 = 2,857$; c)

X	2,0-3,9	4,0-5,9	6,0-7,9	8,0-10
n	3	6	5	1

;

Y	4,0-5,9	6,0-7,9	8,0-10
n	7	5	3

;

5.2.3. a)

Y:	4	5	6	9	10
2	1				
3	2				
4		3			
5		1	2		
6			3	2	
10					1

5.2.4. a)

Y:	32	33	34	35	36	37	38	39
47		1	1	3				
48	1	6	7					
49	1	5	10	5				
50	1	4	9	9	1			
X:51			3	6	4	1		
52			3	1	7	1		
53		1		1	2	1	1	1
54						1	1	
55								
56								1

b)

Y:	31,5-33,5	33,5-35,5	35,5-37,5	37,5-39,5
46,5-48,5	8	11		
48,5-50,5	11	33		
X: 50,5-52,5		13	13	2
52,5-54,5	1	1	4	3
54,5-56,5				1

6. Teorie odhadu.

6.1. Co jsou bodové odhady parametrů? Jak se zajistí, že příslušný odhad je nestranný, konzistentní, vydatný?

Úlohy :

6.1.1. Uvažujme prostý náhodný výběr $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z libovolného rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2. Dokažte, že výběrový průměr $\bar{x}$ je
a) nestranným b) konzistentním
odhadem střední hodnoty μ (v případě b) použijte Čebyšeovovu nerovnost). Je statistika $\frac{X_1+X_2}{2}$ nestranným či konzistentním odhadem μ?

6.1.2. Mějte prostý náhodný výběr $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z libovolného rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2. Uvažujme následující odhadové statistiky pro rozptyl σ^2:
a) $V_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$, c) $V_3 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$,
b) $V_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$, d) $V_4 = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n-1}(X_i X_{i+1})^2$. Zjistěte, které z nich jsou nestranné či konzistentní.

6.1.3. Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_n$ je prostý náhodný výběr z alternativního rozdělení s parametrem p. Dokažte, že
a) $\bar{X} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ je nestranný odhad parametru p,
b) $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i(\sum_{i=1}^{n} X_i - 1)}{n(n-1)}$ je nestranným odhadem p^2.
(Návod: uvědomte si, že $\sum_{i=1}^{n} X_i$ má binomické rozdělení s parametry n a p - viz příklad 3.4.9.)

6.1.4. Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_n$ je prostý náhodný výběr z Poissonova rozdělení. Dokažte, že
a) $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ je nestranným konzistentním odhadem parametru λ,
b) $T = (\frac{n-1}{n})^{\sum_{i=1}^{n} X_i}$ je nestranným a konzistentním odhadem e^{λ}.
a vypočtěte rozptyl odhadu uvedeného v b).

6.1.5. Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_n$ je prostý náhodný výběr z rozdělení s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}\exp(-\frac{x}{\alpha}) & , x \geq 0 \ (\alpha > 0), \\ 0 & , x < 0. \end{cases}.$$

Dokažte, že $\bar{X}$ je nestranný, konzistentní a eficientní odhad parametru α.

6.1.6. Uvažujme prostý náhodný výběr $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z rozdělení s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\theta}\exp(-\frac{x^2}{2\theta^2}) & , x \geq 0 \ (\theta > 0), \\ 0 & , x < 0. \end{cases}.$$

Dokažte, že $\bar{X}$ není nestranným odhadem parametru θ a najděte konstantu c tak, aby $c.\bar{X}$ byl nestranným odhadem parametru θ.

6.1.7. Uvažujme prostý náhodný výběr $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z rovnoměrného rozdělení na intervalu $(0;\theta)$ s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & , x \in (0;\theta), \\ 0 & , jinde \end{cases}.$$

Nechť nyní $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ je uspořádaný náhodný výběr. Vypočtěte (s pomocí výsledku příkladu 5.1.8.) střední hodnotu $E(X_(n))$ a na základě výsledku tohoto výpočtu rozhodněte, zda je $X_{(n)}$ nestranným nebo konzistentním odhadem parametru θ.

6.2. Vysvětlete, co je podstatou metody maximální věrohodnosti a na příkladech ukažte použití této metody. Co je to momentová metoda a jak se provádí?

Úlohy :

6.2.1. Uvažujme prostý náhodný výběr $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z alternativního rozdělení s parametrem p. Odhadněte parametr p

a) metodou maximální věrohodnosti (použijte výsledku příkladu 5.1.1.),

b) momentovou metodou

a oba výsledky porovnejte s výsledkem příkladu 6.1.3.a).

6.2.2. Uvažujme prostý náhodný výběr $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z binomického rozdělení s parametry m, p, kde m je známé číslo. Odhadněte parametr p metodou maximální věrohodnosti. K výpočtu použijte výsledku příkladu 5.1.2.

6.2.3. Uvažujme prostý náhodný výběr $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z binomického rozdělení s parametry m, p. Odhadněte metodou momentů

a) parametr p, je-li m známé (porovnejte s výsledkem příkladu 6.2.2.)

b) parametry m, p (oba jsou neznámé).

6.2.4. Uvažujme prostý náhodný výběr $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z Poissonova rozdělení s parametrem λ. Odhadněte parametr λ

a) metodou maximální věrohodnosti (použijte výsledku příkladu 5.1.3.).

b) momentovou metodou

a oba výsledky porovnejte.

6.2.5. Na základě výsledku předchozího příkladu odhadněte parametr λ, je-li dána tabulka četností realizace náhodné veličiny X, u níž předpokládáme Poissonovo rozdělení.

X_i	0	1	2	3	4
n_i	109	65	22	3	1

6.2.6. nechť $X_1, X_2, \ldots, X_n$ je prostý náhodný výběr z diskrétního rozdělení, v němž

$$P(X_i = x_i) = \frac{1}{2.x_i!}(e^{\lambda_1}.\lambda_1^{x_i} + e^{\lambda_2}.\lambda_2^{x_i}), \qquad x_i = 0, 1, 2, \ldots,\ 0 < \lambda_1 < \lambda_2.$$

Odhadněte parametry λ_1, λ_2 momentovou metodou.

6.2.7. Uvažujme prostý náhodný výběr $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$. Odhadněte metodou maximální věrohodnosti i momentovou metodou
a) parametr μ,
b) parametr σ^2 při známém μ,
c) parametr σ^2 při neznámém μ.
Při použití metody maximální věrohodnosti využijte výsledku příkladu 5.1.7. Výsledky v b), c) porovnejte s odhady V_1, V_2 z příkladu 6.1.2.

6.2.8. Uvažujme prostý náhodný výběr $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z exponenciálního rozdělení s parametrem λ. Odhadněte parametr λ metodou maximální věrohodnosti i momentovou metodou a oba výsledky porovnejte. Při použití metody maximální věrohodnosti využijte výsledku ulohy 5.1.6.

6.2.9. Metodou maximální věrohodnosti odhadněte parametr λ, jedná-li se o prostý náhodný výběr $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z rozdělení s hustotou

a) $f(x) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{\lambda x} & , x \geq 0, (\lambda > 0), \\ 0 & , x < 0, \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \lambda^3 x^2 e^{\lambda x} & , x \geq 0, (\lambda > 0), \\ 0 & , x < 0. \end{cases}$

6.3. Popište normální rozdělení a rozdělení od něho odvozené. Co je to normované normální rozdělení?

Úlohy :

6.3.1. Nechť X je náhodná veličina s normálním rozdělením $N(\mu, \sigma^2)$. Pomocí hodnot distribuční funkce $\Phi(x)$ rozdělení $N(0, 1)$ stanovte následující pravděpodobnosti:
a) $P(\mu\sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$, d) $P(\mu 1,96\sigma \leq X \leq \mu + 1,96\sigma)$,
b) $P(\mu 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)$, e) $P(\mu 2,58\sigma \leq X \leq \mu + 2,58\sigma)$,
c) $P(\mu 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma)$, f) $P(\mu 3,29\sigma \leq X \leq \mu + 3,29\sigma)$.
Při výpočtu využijte rovnost $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x), x \in \Re$, kterou zároveň dokažte.

6.3.2. Nechť X je náhodná veličina s normálním rozdělením $N(\mu, \sigma^2)$, kde $\mu = 0,8, \sigma^2 = 4$. Vypočtěte následující pravděpodobnosti:
a) $P(X \leq 2,44)$, d) $P(X \geq 1)$,
b) $P(X \leq -1,16)$, e) $P(X \geq -2,9)$,
c) $P(X \leq 1,932)$, f) $P(2 \leq X \leq 10)$.
K výpočtu použijte hodnot distribuční funkce rozdělení $N(0, 1)$.

6.3.3. Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_n$ je prostý náhodný výběr z rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$. Vypočtěte střední hodnotu a rozptyl výběrového průměru $\bar{X}$ a pomocí příkladu 3.4.8.c) dokažte, že $\bar{X}$ má rozdělení $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.

6.3.4. Jaké rozdělení mají statistiky

a) $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}$, c) $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i\mu)^2$,

b) $\frac{\bar{X}-\mu}{s}\sqrt{n}$, d) $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$

za předpokladu, že $X_1, X_2, \ldots, X_n$ je výběr z normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$?

6.3.5. Hmotnost výrobku v gramech má normální rozdělení $N(2000; 16)$. Jaká je pravděpodobnost, že průměrná hmotnost n náhodně vybraných výrobků bude větší než 2002g, je-li počet vybraných výrobků

a) $n = 8$, b) $n = 12$, c) $n = 16$.

6.3.6. Uvažujte znovu příklad 6.3.5. s tím, že rozptyl σ^2 je neznámý. Na základě výběru jsme dostali hodnotu $s^2 = 14,44$. Jaké rozdělení použijeme nyní a jak vyjdou příslušné pravděpodobnosti pro $n = 8, 12, 16$?

6.3.7. uvažujme znovu náhodný výběr z příkladu 5.2.2. ($n = 9$). Předpokládejme, že se jedná o výběr z normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ s neznámou střední hodnotou. Vypočtěte pravděpodobnost, že $\mu \geq 4$, je-li

a) $\sigma^2 = 4$, b) σ^2 neznámé,

(V případě b) nahraďte σ^2 veličinou s^2).

6.3.8. Uvažujme, stejně jako v příkladě 6.3.5., že hmotnost výrobku má normální rozdělení $N(2000; 16)$. Jaká je pravděpodobnost, že výběrový rozptyl nepřekročí číslo 24, je-li počet vybraných výrobků

a) $n = 8$, b) $n = 12$, c) $n = 16$.

6.3.9. Uvažujme znovu náhodný výběr z příkladu 5.2.2. ($n = 9$). Předpokládejme, že se jedná o výběr z normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$. Vypočtěte pravděpodobnost že $\sigma^2 > 2$.

6.4. Co jsou to intervalové odhady? Jak se sestrojí intervaly spolehlivosti - oboustranné i jednostranné - s předepsanou spolehlivostí? Použití dokumentujte na příkladech.

Úlohy :

6.4.1. Z normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$, kde $\sigma^2 = 0,06$ jsme získali náhodný výběr ($n = 7$): 1,3; 1,8; 1,4; 1,2; 0,9; 1,5; 1,7. Sestrojte oboustranný

a) 99%-ní, b) 95%-ní, c) 90%-ní

interval spolehlivosti pro parametr μ.

6.4.2. Uvažujme znovu náhodný výběr z příkladu 5.2.2. ($n = 9$). Předpokládejme, že se jedná o výběr z normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$, kde $\sigma^2 = 4$. sestrojte

a) 95%-ní oboustranný interval spolehlivosti pro střední hodnotu

b) 95%-ní pravostranný (dolní odhad) pro střední hodnotu μ,

c) 95%-ní levostranný (horní odhad) pro střední hodnotu μ.

6.4.3. Uvažujme znovu předchozí příklad s tím rozdílem, že σ^2 je neznámé. Sestrojte opět 95%-ní oboustranný i oba jednostranné intervaly spolehlivosti pro parametr μ.

6.4.4. Náhodná veličina X má normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$, kde μ, σ^2 jsou neznámé parametry. Její realizace jsou dány hodnotami

25, 17, -5, -4, 10, 22, 11, 2, 5, 12.

Najděte 95%-ní oboustranný interval spolehlivosti pro parametr μ.

6.4.5. Uvažujme znovu příklad 5.2.4. Předpokládejme, že v tomto případě jsou uvedeny realizace náhodných veličin X s rozdělením $N(\mu_x, \sigma_x^2)$ a Y s rozdělením $N(\mu_y, \sigma_y^2)$. Sestrojte 95%-ní oboustranné intervaly spolehlivosti pro μ_x, μ_y.

6.4.6. Předpokládejme, že z hodnot prostého náhodného výběru $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsme vypočítali výběrový rozptyl $s^2 = \frac{1}{29} \sum_{i=1}^{30} (x_i - \bar{x})^2 = 4,41$.
Najděte

a) 99%-ní oboustranný interval spolehlisvosti pro rozptyl σ^2,
b) 99%-ní pravostranný (dolní odhad) pro rozptyl σ^2,
c) 99%-ní levostranný (horní odhad) pro rozptyl σ^2.

6.4.7. Při ověřování koncentrace chemické látky v roztoku bylo provedeno 32 analýz s těmito výsledky:

17, 12, 15, 16, 11, 17, 18, 9, 15, 12, 16, 11, 16, 17, 18, 12,
14, 20, 21, 17, 18, 14, 15, 20, 14, 15, 16, 15, 15, 14, 15, 16,

předpokládejme, že koncentrace má normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$. Vypočtěte

a) 90%-ní oboustranný interval spolehlivosti pro rozptyl σ^2,
b) 90%-ní pravostranný interval spolehlivosti pro rozptyl σ^2.

6.4.8. Na každém ze dvou vzorků výfukových plynů jsme provedli 4-krát analýzu obsahu olova. Metoda analýzy má přesnost $\sigma = 0,12\%$. Na základě výsledků analýz jsme vypočítali výběrové průměry $\bar{x}_1 = 36,82\%$, $\bar{x}_2 = 36,45\%$. Najděte 99%-ní oboustranný interval spolehlivosti pro neznámý rozdíl parametrů $\mu_1 - \mu_2$.

6.4.9. Sledovali jsme účinek dvou protikorozních látek. První látku jsme použili v $n_1 = 20$ případech, druhou v $n_2 = 25$ případech. Po stanovené době jsme zjistili stupeň poškození s výsledky

$\bar{x}_1 = 82.4, \ s_1^2 = 12, \qquad \bar{x}_2 = 80.0, \ s_2^2 = 10.$

Určete 95%-ní oboustranný interval spolehlivosti pro neznámý rozdíl parametrů $\mu_1 - \mu_2$, když předpokládáme, že sledovaný znak má v obou případech normální rozdělení $N(\mu_1, \sigma^2)$ a $N(\mu_2, \sigma^2)$, kde μ_1, μ_2 a σ^2 jsou neznámé.

6.4.10. Řešte znovu předchozí příklad pro případ, že σ^2 je známé a platí $\sigma^2 = 11$. Výsledky obou příkladů porovnejte.

Výsledky a řešení úloh:

6.1.1. statistika $\frac{X_1+X_2}{2}$ je nestranným, ale není konzistentním odhadem; **6.1.2.** všechny odhady a)- d) jsou konzistentní; nestranné jsou pouze a) a c); **6.1.4.** $var(T) = \exp(-\frac{\lambda}{n}(2n-1)) - \exp(-2\lambda)$; **6.1.6.** $E(\bar{X}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$; $c = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$; **6.1.7.** $E(X_(n)) = \frac{n}{n+1}\theta$; $X_(n)$ není nestranným, ale je konzistentním odhadem parametru θ; **6.2.1.** $\hat{p} = \bar{X}$ v obou případech; **6.2.2.** $\hat{p} = \frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{n} X_i$; **6.2.3.** a) $\hat{p} = \frac{1}{mn}\sum_{i-1}^{n} X_i$; b) $\hat{p} = (X + (\bar{X})^2 - (\bar{X^2}))\bar{X}^{-1}; \hat{m} = \frac{\bar{X}}{\hat{p}}$; **6.2.4.** $\hat{\lambda} = \bar{X}$ v a) i v b); **6.2.5.** $\hat{\lambda} = 0,61$; **6.2.6.** $\hat{\lambda}_1 = \bar{X} - \sqrt{\bar{X}^2 - \bar{X} - (\bar{X})^2}$; $\hat{\lambda}_2 = \bar{X} + \sqrt{\bar{X}^2 - \bar{X} - (\bar{X})^2}$; **6.2.7.** obě metody dávají stejné výsledky: a) $\hat{\mu} = \bar{X}$; b) $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$; c) $\hat{\sigma}^2 = \bar{X}^2 - (\bar{X})^2$; **6.2.8.** $\hat{\lambda}_1 = \bar{X}^{-1}$; **6.2.9.** a) $\hat{\lambda}_1 = 2\bar{X}^{-1}$; b) $\hat{\lambda}_1 = 3\bar{X}^{-1}$;

6.3.1. a) $\doteq 0.68$; b) $\doteq 0.955$; c) $\doteq 0.997$; d) $\doteq 0.95$; e) $\doteq 0.99$; f) $\doteq 0.999$; **6.3.2.** a) $\doteq 0.794$; b) $\doteq 0.164$; c) $\doteq 0.713$; d) $\doteq 0.46$; e) $\doteq 0.966$; f) $\doteq 0.274$; **6.3.3.** $E(\bar{X}) = \mu$; $D(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$; **6.3.4.** a) normální $N(0,1)$; b) Studentovo t_{n-1}; c) χ^2_n; d) χ^2_{n-1}; **6.3.5.** a) $1 - \Phi(\sqrt{2}) \doteq 0.079$; b) $1 - \Phi(\sqrt{3}) \doteq 0.042$; c) $1 - \Phi(2) \doteq 0.023$; **6.3.6.** a) $p \doteq 1 - t_7(1.47) \doteq 0.09$; b) $p \doteq 1 - t_{11}(1.80) \doteq 0.05$; c) $p \doteq 1 - t_{15}(2.08) \doteq 0.03$; **6.3.7.** $p = 1 - \Phi(\frac{2}{3}) \doteq 0.067$; b) $p = 1 - t_8(1.455) \doteq 0.09$; **6.3.8.** a) $p = \chi^2_7(10.5) \doteq 0.84$; b) $p = \chi^2_{11}(16.5) \doteq 0.87$; c) $p = \chi^2_{15}(22.5) \doteq 0.90$; **6.3.9.** $p = \chi^2_8(17) \doteq 0.97$;

6.4.1. 6.4.2. 6.4.3. 6.4.4. 6.4.5. 6.4.6. 6.4.7. 6.4.8. 6.4.9. 6.4.10.

7. Testování hypotéz.

7.1. Co je to jednoduchá a složená hypotéza? Co je to testová statistika a kritický obor testu? Vysvětlete, co je to chyba prvního, resp. druhého druhu. Co rozumíme pod pojmy hladina a síla testu?

Úlohy :

7.1.1. Při 10 hodech mincí padne líc X-krát. Rozhodněte, zda následující hypotézy jsou jedoduché, či složené:

a) X má binomické rozdělení s parametry $n = 10, p = \frac{1}{2}$,
b) X má binomické rozdělení s parametry $n = 10, \frac{1}{3} \leq p \leq \frac{2}{3}$,
c) $P(X \leq 3) > \frac{1}{2}$,
d) mince je symetrická,
e) mince je nesymetrická.

7.1.2. Automat vyrábí kuličky o průměru 10mm. Výroba je kontrolována měřením veličiny X, což je odchylka od požadovaného průměru. předpokládáme, že X má rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$, kde μ je neznámé a $\sigma^2 = 0.1mm^2$. Proti hypotéze H_0 stojí alternativa H_1. Posuďte hypotézy a alternativy v následujícíhc případech:

a) $H_0 : \mu = \mu_0, H_1 : \mu = \mu_1$,
b) $H_0 : \mu = \mu_0, H_1 : \mu \neq \mu_1$,
c) $H_0 : \mu = \mu_0, H_1 : \mu < \mu_1$,
d) $H_0 : |\mu| = \mu_0, H_1 : \mu = \mu_1$.

7.1.3. Soubor výrobků obsahuje $100p\%$ zmetků. Dodavatel předpokládá, že $p = 0.05$, odběratel počítá s tím, že $p = 0.1$. Náhodně bude vybráno 10 výrobků. Nákup se uskuteční, pokud mezi těmito vybranými výrobky bude nejvýše 1 zmetek. V opačném případě k nákupu nedojde. Zformulujte úlohu v pojmech teorie testování hypotéz a vyřešte tyto úlohy: Určete

a) testovací statistiku, rozsah jejích možných hodnot a kritický obor W.
b) jaké má testovací statistika rozložení pravděpodobnosti?
c) jaká je nulová a alternativní hypotéza?
d) jaké jsou pravděpodobnosti chyb 1. a 2. druhu?

7.1.4. Ze souboru výrobků stroje vyrábějícího šrouby o délce $m = 40mm$ jsme vybrali 36 šroubů. Soubor považujeme za nekvalitní, jestliže aritmetický průměr délek vybraných šroubů překročí $40.1mm$. Přitom předpokládáme, že délka šroubů má normální rozdělení s rozptylem $\sigma^2 = 1mm^2$. Uvažujme hypotézu $H_0 : m = 40mm$; řešte následující úlohy: Najděte

a) pravděpodobnost chyb 1. a 2. druhu při alternativní hypotéze $H_1 : m = 40.3mm$.
b) sílu testu postupně pro alternativní hypotézy $m = 40.1$; 40.2; 40.3; 40.4; 40.5 mm a kritický obor W.
c) Jaký minimální rozsah výběru by bylo třeba vzít, aby pro danou hypotézu H_0 a alternativu H_1 nepřekročily pravděpodobnosti chyb 1. a 2. druhu hodnoty $\alpha = 0.1$ a $\beta = 0.1$?

7.1.5. Jaký minimální rozsah výběru je třeba vzít v podmínkách předcházející úlohy, aby při testování hypotézy $H_0 : m = 40mm$ proti alternativě $H_1 : m = 40.3mm$ nepřekročily pravděpodobnosti chyb 1. a 2. druhu hodnoty $\alpha = 0.05$ a $\beta = 0.05$?

7.1.6. Řešte znovu příklad 7.1.4. a), b), jestliže se kritický obor $W = \{X > 40,1\}$ rozšíří na $W = \{X < 39,9\} \cup \{X > 40,1\}$.

7.1.7. V urně jsou bílé a černé koule, o nichž předpokládáme, že je jich stejný počet. Tato hypotéza bude přijata, jestliže z 50 kuliček, které vybereme s vracením, je černých kuliček mezi 20 a 30. najděte pravděpodobnost

a) chyby 1. druhu,

b) chyby 2. druhu při alternativní hypotéze, že pravděpodobnost vytažení černé koule je $\frac{1}{3}$.

7.2. Co jsou to parametrické testy? Za předpokladu výběru z normálního rozdělení testujte proti oboustranné i jednostranným alternativám a) hypotézu o střední hodnotě při známém i neznámém rozptylu, b) hypotézu o rozptylu při známé i neznámé střední hodnotě, c) hypotézu o rovnosti středních hodnot dvou výběrů při známých i neznámých rozptylech, d) hypotézu o rovnosti rozptylů.

Úlohy :

7.2.1. Provedli jsme náhodný výběr o rozsahu $n = 10$ z normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$, kde $\sigma = 3$. Chceme testovat hypotézu $H_0 : \mu = \mu_0 = 24$. Sestrojte kritický obor testu hypotézy H_0 proti alternativě

a) $H_1 : \mu \neq \mu_0$,

b) $H_1 : \mu > \mu_0$,

c) $H_1 : \mu < \mu_0$,

na hladině významnosti $\alpha = 0.05$. Testujte uvedenou hypotézu proti všem třem alternativám, jestliže výběrový průměr je $\bar{x} = 25.25$.

7.2.2. Byl proveden náhodný výběr o rozsahu $n = 16$ z normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$, přičemž byly získány hodnoty $\bar{x} = 4482, s = 115$. Testujte hypotézu $H_0 : \mu = \mu_0 = 4500$ oproti alternativě $H_1 : \mu < \mu_0$ na hladině významnosti $\alpha = 0.05$.

7.2.3. Tvrdíme, že kuličky vyráběné automatickým obráběcím strojem mají střední hodnotu průměru $d_0 = 10mm$. Použitím jednostranného testu při $\alpha = 0.05$ testujte uvedenou hypotézu, jestliže ve výběru obsahujícím 16 kuliček je výběrový průměr jejich průměru $\bar{x} = 10.3mm$, přičemž

a) $\sigma^2 = 1mm^2$,

b) σ^2 je neznámý a $s^2 = 1.21mm^2$.

7.2.4. Ze souboru odporů stejné nominální hodnoty jsme náhodně vybrali 16 kusů. Výběrový průměr skutečných hodnot odporů je $\bar{x} = 9.3k\Omega$. Použitím oboustranného testu na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ testujte hypotézu, že výběr pochází ze souboru s nominální hodnotou $\mu = 10k\Omega$, je-li

a) $\sigma^2 = 4k\Omega$,

b) σ^2 je neznámý a $s^2 = 6.25k\Omega$.

7.2.5. Uvažujte znovu předchozí příklad. Řešte následující úlohy:

a) Jaká je síla testu proti alternativě $H_1 : \mu = 9.5k\Omega$

b) Jaký rozsah výběru je třeba zvolit, aby chyba 2. druhu nepřekročila 0.01?

7.2.6. Při měření koeficientu tepelné vodivosti jsme naměřili tyto hodnoty:

0.62; 0.64; 0.57; 0.61; 0.59; 0.57; 0.62; 0.59.

Na základě uvedeného náhodného výběru testujte hypotézy (při $\alpha = 0.05$):

a) $H_0 : \sigma^2 = 0.003$ proti alternativě $H_1 : \sigma^2 \neq 0.003$,

b) $H_0 : \sigma^2 = 0.003$ proti alternativě $H_1 : \sigma^2 < 0.003$.

7.2.7. Přesnost nastavení automatického obráběcího stroje je dána rozptylem délky součástek, které stroj vyrábí. Je-li tato hodnota větší, než $400\mu m^2$, je třeba stroj znovu nastavit. Výběrový rozptyl 15 náhodně vybraných součástek je $s^2 = 680\mu m^2$. Posuďte, zda je třeba provést nové nastavení, je-li

a) $\alpha = 0.01$, b) $\alpha = 0.1$.

7.2.8. Na dvou soustruzích se vyrábějí stejné součástky, u nichž se kontroluje vnitřní průměr. Z výrobků prvního soustruhu bylo náhodně vybráno $n_1 = 16$, z produkce druhého soustruhu potom $n_2 = 25$ součástek. Příslušné výběrové průměry jsou $\bar{x_1} = 37.5mm, \bar{x_2} = 36.8mm$. Oboustranným testem testujte hypotézu o rovnosti středních hodnot kontrolovaných rozměrů u obou soustruhů, platí-li

a) $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1.21mm^2$,

b) rozptyly σ_1^2 a σ_2^2 jsou neznámé; výběrové rozptyly mají naměřené hodnoty $s_1^2 = 1.21mm^2$ a $s_2^2 = 1.44mm^2$.

Volte $\alpha = 0.05$.

7.2.9. Testujte hypotézu $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ proti alternativě $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ pro náhodné výběry uvedené

a) v příkladě 6.4.9., b) v příkladě 6.4.10.

Uveďme si, jaká je souvislost mezi intervalem spolehlivosti a testem příslušné hypotézy.

7.2.10. Dva soustruhy vyrábějí stejné součástky. Z produkce prvního vybereme $n_1 = 9$, z produkce druhého $n_2 = 11$ součástek. Příslušné výběrové rozptyly jsou $s_1^2 = 5.9\mu m^2$ a $s_2^2 = 23.3\mu m^2$. Testujte hypotézu $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ proti alternativě $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. Volte $\alpha = 0.05$.

7.3. Co jsou to neparametrické testy? jak se provádí test dobré shody a s jakým rozdělením je spojen? Uveďte další neparametrické testy (znaménkový, Wilcoxonův) a jejich použití.

Úlohy :

7.3.1. při pokusech a křížením hrachu získal Mendel dohromady 355 žlutých a 123 zelených kuliček hrachu. Pomocí testu dobré shody ($\alpha = 0.05$) rozhodněte, zda tyto počty potvrzují Mendelovu teorii, podle níž jsou žluté ku zeleným kuličkám v poměru 3:1.

7.3.2. Při padesáti hodech mincí padl 27-krát líc. testujte hypotézu, že mince je symetrická ($\alpha = 0.05$).

7.3.3. při kterém nejmenším (největším) počtu líců při 50 hodech mincí zamítneme hypotézu o symetrii mince z předchozího příkladu?

7.3.4. při hodu kostkou byla získána následující tabulka absolutních četností jednotlivých počtů bodů:

1	2	3	4	5	6
16	19	18	17	17	13

Volte $\alpha = 0.05$ a testujte hypotézu, že kostka je pravidelná.

7.3.5. V průběhu roku byly v jednotlivých měsících zaznamenány následující počty narozených dětí:

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
80	78	86	82	83	78	79	76	78	76	72	76

testujte hypotézu, že pravděpodobnost narození dítěte je ve všech měsících stejná ($\alpha = 0.05$).

7.3.6. Při jiném pokusu (než v př.7.3.1.) získal Mendel křížením hrachu 315 kulatých žlutých, 108 kulatých zelených, 101 hranatých žlutých a 32 hranatých zelených hrášků. Podporuje toto zjištění Mendelovu teorii, podle níž mají být uvedené počty v poměru 9 : 3 : 3 : 1?

7.3.7. V tabulce jsou časy v sekundách, během nichž vyřešili žáci kontrolní úlohu před a po speciálním cvičení paměti.

před cvičením	87	61	98	90	93	74	83	72	81	75	83
po cvičení	50	45	79	90	88	65	52	79	84	61	52

Můžeme tvrdit, že cvičení zlepšilo schopnost žáků řešit zadanou úlohu? Volte $\alpha = 0.01$ a použijte

a) znaménkový test, b) Wilcoxonův test.

7.3.8. 10 lidí drželo speciální dietu. Po dvou týdnech diety se změnila jejich hmotnost následovně:

před dietou	68	80	92	81	70	79	78	66	57	76
po dietě	60	84	87	79	74	71	72	67	57	60

Můžeme tvrdit, že dieta měla vliv na hmotnost? Volte $\alpha = 0.01$ a použijte

a) znaménkový test, b) Wilcoxonův test.

Výsledky a řešení úloh:
7.1.1. a), d), e) jsou jednoduché hypotézy; b), c) jsou hypotézy složené; **7.1.2.** a) hypotéza i alternativa jsou jednoduché; b) hypotéza je jednoduchá, alternativa složená; c) hypotéza i alternativa jsou složené; d) hypotéza složená a alternativa je jednoduchá; **7.1.3.** a) X = počet zmetků; obor hodnot je $\{0, 1, \ldots, 10\}$; $W = \{2, 3, \ldots, 10\}$; b) binomické $\mathcal{B}(10; p)$; c) $H_0 : p = 0.05$; $H_1 : p = 0.1$; d) $\alpha \doteq 0.086$; $\beta \doteq 0.736$; **7.1.4.** a) $\alpha \doteq 0.274$; $\beta \doteq 0.115$; b) síla testu je po řadě; 0.5; 0.726; 0.885; 0.964; 0.992; c) $n \doteq 73$ **7.1.5.** $n = 121$; **7.1.6.** a) $\alpha \doteq 0.548$; $\beta \doteq 0.107$; b) síla testu je po řadě; 0.615; 0.762; 0.893; 0.965; 0.992; **7.1.7.** $\alpha = 0.16$; $\beta = 0.16$; **7.2.1.** a) $W = \{\bar{X} < 22.14 \vee \bar{X} > 25.86\}$; b) $W = \{\bar{X} > 25.56\}$; c) $W = \{\bar{X} < 22.44\}$; hypotézu ve všech třech případech nezamítneme; **7.2.2.** hypotéza se mezamítá; **7.2.3.** a) hypotézu nezamítáme; b) hypotézu nezamítáme; **7.2.4.** a) hyptézu zamítneme; b) hypotézu nezamítneme; **7.2.5.** a) $1-\beta = 0.323$; b) $n = 294$; **7.2.6.** hypotézu zamítáme v obou případech; **7.2.7.** a) ne; b) ano; **7.2.8.** a) hypotézu zamítáme; b) hypotézu nezamítáme; **7.2.9.** hypotézu zamítáme v obou případech; **7.2.10.** hypotézu nezamítáme; **7.3.1.** ano, potvrzují; **7.3.2.** hypotéza se přijímá; **7.3.3.** pro $n \leq 18 (n \geq 32)$; **7.3.4.** hypotéza se přijímá; **7.3.5.** hypotéza se zamítá; **7.3.6.** ano, podporuje; **7.3.7.** a) ano b) ano; **7.3.8.** a) ne; b) ne;

8. Korelace a regrese

8.1. Jak se vypočte výběrová kovariance a výběrový korelační koeficient? Popište test hypotézy o nulovosti korelačního koeficientu. Jak se sestrojí intervalový odhad korelačního koeficientu a jaké statistiky se při tom používá? Jak se testuje hypotéza $H_0 : \rho = r$? Co jsou to koeficienty mnohonásobné a parciální korelace a jak se vypočtou?

Úlohy :

8.1.1. Předpokládejme, že realizace náhodného vektoru (X, Y) z příkladu 5.2.4. pocházejí z dvojrozměrného normálního rozdělení. Vypočtěte výběrový korelační koeficient r a testujte na 5%-ní hladině významnosti hypotézu $H_0 : \rho = 0$.

8.1.2. Vypočtěte výběrovou kovarianci a výběrový korelační koeficient pro následující dvojice realizací náhodného vektoru (X, Y):

X	0,14	0,17	0,18	0,21	0,23	0,17	0,18
Y	0,16	0,18	0,18	0,12	0,20	0,20	0,20

8.1.3. V následující tabulce je udána délka slunečního svitu v jednotlivých měsících (v hodinách), a to dopoledne (X) a odpoledne(Y):

měsíce	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
X	26	45	111	92	119	114	136	156	132	55	30	35
Y	36	59	102	90	97	116	114	143	131	59	41	37

Vypočtěte výběrový korelační koeficient r a testujte hypotézu $H_0 : \rho = 0$.

8.1.4. Při přijímací zkoušce získá student určitý počet bodů z matematiky (X) a z fyziky (Y). Dosažené výsledky 9 studentů byly:

X	80	75	45	75	70	60	45	80	80
Y	80	75	75	95	100	80	45	70	90

Vypočtěte výběrový korelační koeficient r a testujte hypotézu

a) $H_0 : \rho = 0$, b) $H_0 : \rho = 0.5$

na hladině významnosti $\alpha = 0.05$. Lze pro sestrojení kritického oboru obou testů použít stejnou testovací statistiku?

8.1.5. Uvažujme příklad 5.2.8. Vypočtěte výběrový korelační koeficient r a testujte hypotézu $H_0 : \rho = 0$.

8.1.6. Výběrová korelační matice náhodného vektoru (X, Y, Z) je

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & -0.7 & 0.4 \\ -0.7 & 1 & 0.3 \\ 0.4 & 0.3 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.7 \\ 0.5 & 1 & 0.6 \\ 0.7 & 0.6 & 1 \end{pmatrix}$$

Vypočtěte výběrový koeficient mnohonásobné korelace $r_{x,(y,z)}$, $r_{y,(x,z)}$, $r_{z,(x,y)}$ a výběrové koeficienty parciální korelace $r_{x,y.z}$, $r_{x,z.y}$, $r_{y,z.x}$.

8.2. Popište regresní model. Napište regresní funkce pro lineární, kvadratickou a hyperbolickou regresi. Jak se provádí odhad regresních koeficientů? Vysvětlete metodu nejmenších čtverců a ukažte, jak získáme soustavu tzv. normálních rovnic.

Úlohy :

8.2.1. Sestrojte funkci, jejíž minimalizací získáme odhad neznámých parametrů, a odvoďte příslušnou soustavu normálních rovnic pro kvadratickou regresi
a) $Y = aX^2 + bX + c$, b) $Y = aX^2 + c$, c) $Y = aX^2 + bX$.
(Uvědomte si, jaká je vzájemná souvislost mezi získanými soustavami normálních rovnic!)

8.2.2. Stejnou úlohu jako v předchozím příkladě řešte pro následující regresní funkce:
a) $Y = a + bX$, b) $Y = a + \frac{b}{X}$, c) $Y = aX + \frac{b}{X}$.
(Uvědomte si, že obecně neplatí $\sum_{i=1}^{n} X_i^{-1} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} X_i}$!)

8.2.3. Vypočtěte koeficienty a, b lineární regrese $Y = a + bX$ pro následující naměřené dvojice $(x_i, y_i), i = 1, 2, \ldots, 6$:
(1;-1), (2;2), (3;-1), (4;0), (5;5), (6;4).

8.2.4. Vypočtěte koeficienty a, b, c kvadratické regrese $Y = aX^2 + bX + c$ pro následující naměřené dvojice $(x_i, y_i), i = 1, 2, \ldots, 5$:
a) (-1;-1), (1;1), (1;-2), (1;1), (-2;0, ;)0;-1).
b) (-2;1), (-1;-1), (0;1), (1,2), (2;-3).
c) $(-\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$, (1;0), $(-\sqrt{2}; -4\sqrt{2})$, (1;1), (-1;-1).

8.2.5. Vypočtěte koeficienty a, b regrese $Y = a + \frac{b}{X}$ pro následující naměřené dvojice $(x_i, y_i), i = 1, 2, \ldots, 8$:
$(\frac{1}{2}; 2)$, (1;0), (-1;1), $(-\frac{1}{2};-1)$, $(\frac{1}{4};2)$, (-1;1), $(\frac{1}{3},2)$, $(\frac{1}{2},1)$.

8.2.6. Vypočtěte koeficienty a, b regrese $Y = aX^2 + bX$ pro následující naměřené dvojice $(x_i, y_i), i = 1, 2, \ldots, 8$:
(1;1), (0;3), (-1;2), (1;4), (2;0), (0;2), (-2;1), (2;1).

Výsledky a řešení úloh:

8.1.1. $r = 0.86$; H_0 zamítáme ($T = 6.076$); **8.1.2.** $r = -0.028$; $cov(X,Y) = -0.00002$; **8.1.3.** $r = 0.981$; H_0 zamítáme ($T = 15.99$); **8.1.4.** $r = 0.553$; a) H_0 přijímáme ($T = 1.756$); b) H_0 přijímáme ($Z = 0.623 \in \langle -0.22; 1.38\rangle$); **8.1.5.** $r = 0.643$; H_0 zamítáme ($T = 8.311$); **8.1.6.** a) $r_{x,(y,z)} = 0.898$; $r_{y,(x,z)} = 0.889$; $r_{z,(x,z)} = 0.809$; $r_{x,y.z} = -0.938$; $r_{x,z.y} = 0.895$; $r_{y,z.x} = 0.886$; b) $r_{x,(y,z)} = 0.910$; $r_{y,(x,z)} = 0.886$; $r_{z,(x,y)} = 0.924$; b) $r_{x,y.z} = 0.140$; $r_{x,z.y} = 0.577$; $r_{y,z.x} = 0.404$; **8.2.1.** Matice soustavy má v případě a) tvar

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \sum_{i-1}^n X_i^4 & \sum_{i=1}^n X_i^3 & \sum_{i=1}^n X_i^2 & \sum_{i=1}^n X_i^2 Y_i \\ \sum_{i=1}^n X_i^3 & \sum_{i=1}^n X_i^2 & \sum_{i=1}^n X_i & \sum_{i=1}^n X_i Y_i \\ \sum_{i=1}^n X_i^2 & \sum_{i=1}^n X_i & n & \sum_{i=1}^n Y_i \end{array}\right);$$

b) matice soustavy dostaneme z matice a) vyškrtnutím 2. sloupce a 2. řádku; c) matici soustavy dostaneme z matice a) vyškrtnutím 3.sloupce a 3. řádku;

8.2.2. a) $\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n X_i & \sum_{i=1}^n Y_i \\ \sum_{i=1}^n X_i & \sum_{i=1}^n X_i^2 & \sum_{i=1}^n Y_i X_i \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n X_i^{-1} & \sum_{i=1}^n Y_i \\ \sum_{i=1}^n X_i^{-1} & \sum_{i=1}^n X_i^{-2} & \sum_{i=1}^n Y_i X_i^{-1} \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n X_i^2 & n & \sum_{i=1}^n Y_i X_i \\ n & \sum_{i=1}^n X_i^{-2} & \sum_{i=1}^n Y_i X_i^{-1} \end{pmatrix}$; **8.2.3.** $a = -2,\ b = 1$;

8.2.4. $a = 1,\ b = c = \frac{1}{2}$; **8.2.5.** $a = 1,\ b = c = -\frac{1}{2}$; **8.2.6.** $a = \frac{5}{8},\ b = \frac{3}{8}$; **8.2.7.** $a = \frac{4}{3},\ b = -\frac{2}{3}$; **8.2.8.** $a = \frac{1}{38},\ b = \frac{11}{38}$.

9. Statistické tabulky

I. Hodnoty distribuční funkce standardního normálního rozdělení N(0,1)

$x = \Phi(u) = P(X \leq u)$

u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

II. Kritické hodnoty standardního normálního rozdělení

$U \sim N(0,1);\; P(U \geq u_\alpha) = \alpha$

α	0,2	0,15	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005
$u(\alpha)$	0,8416	1,0364	1,2816	1,6449	1,9600	2,3263	2,5758

III. Kritické hodnoty k_1, k_2 pro znaménkový test a w pro Wilcoxonův test. (Hodnoty v tabulce jsou uvedeny pro $\alpha = 01, 01$)

$P(Y \leq k_1) \leq \frac{\alpha}{2}, \quad P(Y \geq k_2) \leq \frac{\alpha}{2}, \quad P(\min\{S^+, s^-\} \leq w) \leq \alpha$

n	k_1	k_2	w
8	0	8	0
9	0	9	1
10	0	10	3

n	k_1	k_2	w
11	0	11	5
12	1	11	7
13	1	12	9

n	k_1	k_2	w
14	1	13	12
15	2	13	15

IV. Kritické hodnoty χ^2 rozdělení

$X \sim \chi^2_f;\ P(X \geq \chi^2_f \alpha) = \alpha$

f	α						
	0,995	0,99	0,975	0,5	0,025	0,01	0,005
1	0,0000	0,0002	0,0010	0,4549	5,0239	6,6349	7,8794
2	0,0100	0,0201	0,0506	1,3863	7,3778	9,2104	10,5965
3	0,0717	0,1148	0,2158	2,3660	9,3484	11,3449	12,8381
4	0,2070	0,2971	0,4844	3,3567	11,1433	13,2767	14,8602
5	0,4118	0,5543	0,8312	4,3515	12,8325	15,0863	16,7496
6	0,6757	0,8721	1,2373	5,3481	14,4494	16,8119	18,5475
7	0,9893	1,2390	1,6899	6,3458	16,0128	18,4753	20,2777
8	1,3444	1,6465	2,1797	7,3441	17,5345	20,0902	21,9549
9	1,7349	2,0879	2,7004	8,3428	19,0228	21,6660	23,5893
10	2,1558	2,5582	3,2470	9,3418	20,4832	23,2093	25,1881
11	2,6032	3,0535	3,8157	10,3410	21,9200	24,7250	26,7569
12	3,0738	3,5706	4,4038	11,3403	23,3367	26,2170	28,2997
13	3,5650	4,1069	5,0087	12,3398	24,7356	27,6882	29,8193
14	4,0747	4,6604	5,6287	13,3393	26,1189	29,1412	31,3194
15	4,6009	5,2294	6,2621	14,3389	27,4884	30,5780	32,8015
16	5,1422	5,8122	6,9077	15,3385	28,8453	31,9999	34,2671
17	5,6973	6,4077	7,5642	16,3382	30,1910	33,4087	35,7184
18	6,2648	7,0149	8,2307	17,3379	31,5264	34,8052	37,1564
19	6,8439	7,6327	8,9065	18,3376	32,8523	36,1908	38,5821
20	7,4338	8,2604	9,5908	19,3374	34,1696	37,5663	39,9969
21	8,0336	8,8972	10,2829	20,3372	35,4789	38,9322	41,4009
22	8,6427	9,5425	10,9823	21,3370	36,7807	40,2894	42,7957
23	9,2604	10,1957	11,6885	22,3369	38,0756	41,6383	44,1814
24	9,8862	10,8563	12,4011	23,3367	39,3641	42,9798	45,5584
25	10,5196	11,5240	13,1197	24,3366	40,6465	44,3140	46,9280
30	13,7867	14,9535	16,7908	29,3360	46,9792	50,8922	53,6719
35	17,1917	18,5089	20,5694	34,3356	53,2033	57,3420	60,2746
40	20,7066	22,1642	24,4331	39,3353	59,3417	63,6908	66,7660
45	24,3110	25,9012	28,3662	44,3351	65,4101	69,9569	73,1660
50	27,9908	29,7067	32,3574	49,3349	71,4202	76,1538	79,4898
60	35,5344	37,4848	40,4817	59,3347	83,2977	88,3794	91,9518
70	43,2753	45,4417	48,7575	69,3345	95,0231	100,4251	104,2148
80	51,1719	53,5400	57,1532	79,3343	106,6285	112,3288	116,3209
90	59,1963	61,7540	65,6466	89,3342	118,1359	124,1162	128,2987
100	67,3275	70,0650	74,2219	99,3341	129,5613	135,8069	140,1697