95

UČEBNÍ TEXTY VYSOKÝCH ŠKOL

Fakulta strojní

Základy teorie náhodných procesů

Ing. Milan Ullrich, CSc

České vysoké učení technické v Praze

O B S A H

	Str.
Předmluva	2
Kapitola I - Náhodné procesy	4
1.1. Definice náhodného procesu	4
Kapitola II - Náhodné procesy s diskrétním časem	11
2.1. Markovský řetězec	11
2.2. Homogenní markovský řetězec	14
2.3. Geometrické znázorňování homogenních markovských řetězců	17
2.4. Klasifikace stavů homogenního markovského řetězce	20
2.5. Pravděpodobnosti prvního dosažení stavu j ze stavu i	27
2.6. Trvalé a přechodné stavy	32
2.7. Nerozložitelné markovské řetězce	45
2.8. Stacionární markovské řetězce	49
2.9. Příklady	50
2.10. Zákon velkých čísel	53
Kapitola III - Náhodné procesy se spojitým časem	56
3.1. Markovský proces	56
3.2. Intenzity pravděpodobností přechodu a Kolmogorovy rovnice	57
3.3. Homogenní markovské procesy	61
3.4. Klasifikace stavů homogenního markovského procesu	65
3.5. Příklady homogenních markovských procesů	66
3.5.1. Poissonův proces	66
3.5.2. Proces ryzího rozmnožování	68
3.5.3. Proces rozmnožování a úmrtí	72
3.6. Aplikace homogenních markovských procesů	78
3.6.1. Zjednodušená úloha o telefonních linkách	78
3.6.2. Úloha o telefonních linkách v případě konečného počtu linek a s možností libovolné délky fronty čekajících	78
3.6.3. Úloha o telefonních linkách v případě konečného počtu linek a s možností jen konečné délky fronty čekajících	80
3.6.4. Úloha o obsluze m automatů jedním pracovníkem	82
3.6.5. Úloha o obsluze m automatů n pracovníky	84
3.7. Odhady intenzity pravděpodobnosti přechodu	86
Kapitola IV - Stacionární náhodné procesy	88
4.1. Charakteristiky náhodných procesů	88
4.2. Stacionární v užším a širším smyslu náhodné procesy	94
4.3. Gaussovy náhodné procesy	97
4.4. Spektrální funkce	100
4.5. Integrály z náhodných procesů	105
4.6. Spektrální rozklad stacionárního náhodného procesu	115
4.7. Ergodické náhodné procesy	117
4.8. Vzájemné korelační funkce	121
4.9. Optimální lineární transformace náhodných procesů	124

P ř e d m l u v a

Předložená skripta ze základů teorie náhodných procesů tvoří organické pokračování skript O. Hanše s úvodem do teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky. Jejich autorem je Ing. Milan Ullrich, CSc., který spolu s uvedeným autorem přednesl látku v zimním semestru 1967/68 v 5-semestrovém postgraduálním studiu řízení jakosti, pořádaném katedrou statistiky strojní fakulty ČVUT.

Náhodné procesy nacházejí dnes stále větší uplatnění v různých vědních oborech, pokud zkoumají dynamické vlastnosti různých procesů. I když podat přehled celé teorie náhodných procesů spolu s ukázkami různých aplikací není možné vtěsnat do jediných skript, pokusil se autor podat základy teorie náhodných procesů, a to s diskrétním a spojitým parametrem (časem). Skripta jsou převážně teoretického charakteru a mnoho základních tvrzení je vysloveno formou matematických vět a příkladů. Autor se pokusil podat nebo alespoň naznačit důkazy používaných tvrzení, a to jen pokud nepotřebovaly hlubších úvah matematiky, které nejsou běžné v kursech matematiky na strojní fakultě ČVUT. Ukončení důkazů vět a příkladů je označeno v textu symbolem ⊛ .

Prof. RNDr František Egermayer DrSc
Vedoucí katedry statistiky
strojní fakulty ČVUT

V Praze, květen 1968

1.1. Definice náhodného procesu

Stejně jako v celé teorii pravděpodobnosti, tak i v teorii náhodných procesů se vychází z daného pravděpodobnostního pole $(\Omega, \mathcal{S}, P)$, kde Ω je daná neprázdná množina pozorování (elementárních výsledků), $\mathcal{S}$ systém všech náhodných jevů a P je pravděpodobnostní míra definovaná na $\mathcal{S}$.

V teorii náhodných procesů navíc vystupuje nějaká neprázdná množina parametrů označená symbolem T a jednotlivé prvky budeme značit pomocí t, a resp. s indexy t_1, t_2, ... a pod. Množina T se interpretuje většinou jako čas, i když tomu obecně nemusí být, neboť T může značit příp. i geometrické souřadnice příp. jiné parametry. V našich dalších úvahách bude T nějaká podmnožina reálných čísel na příklad

$$T = \{0, 1, 2, \dots\}$$
$$T = \{t: 0 \leq t\}$$
$$T = \{t: -\infty < t < \infty\}$$
$$T = \{t: a \leq t \leq b\} ,$$

kde a, b jsou libovolná reálná čísla ($a < b$).

Nechť X je zobrazení kartézského součinu $\Omega \times T$ do množiny reálných čísel takové, že (1) pro každé $t \in T$ je $X(.,t)$ jako funkce definovaná na Ω náhodnou proměnnou, t.j. pro každé reálné číslo x množina

$$\{\omega : X(\omega, t) \leq x\} \in \mathcal{S} \tag{1.1.1}$$

(je náhodným jevem);

(2) pro každé $\omega \in \Omega$ je $X(\omega, .)$ jako funkce definovaná na T prvkem množiny všech reálných funkcí definovaných na T.

Zobrazení $X(.,.)$ splňující podmínky (1) a (2) nazýváme <u>náhodným procesem</u> definovaným na T.

Z definice náhodného procesu vyplývá, že náhodný proces je vlastně systémem náhodných proměnných indexovaných parametry z množiny T. Budeme proto náhodný proces $X(.,.)$ označovat symbolem $\{X(.,t)\}_{t \in T}$, kde $X(.,t)$ je tato náhodná proměnná označená parametrem $t \in T$.

Jestliže T je jednobodová množina, tak náhodný proces $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je vlastně jediná náhodná proměnná, neboli náhodný proces je zobecněním pojmu náhodné proměnné. Podobně pro každou konečnou množinu $T = \{1, 2, \dots, N\}$ je náhodný proces $\{X(.,t)\}_{t \in T}$. N - rozměrná náhodná proměnná (N-rozměrný náhodný vektor). Je proto náhodný proces též zobecněním vícerozměrných náhodných proměnných.

Ke každé náhodné proměnné $X(.)$ je přiřazena její distribuční funkce $F_X(.)$, která pro každé reálné číslo x je definována jako

$$F_X(x) = P(\{\omega : X(\omega) \leq x\}) \tag{1.1.2}$$

Je-li $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ náhodný proces definovaný na T, pak pro každé $t_1 \in T$ distribuční funkci náhodné proměnné $X(., t_1)$ budeme označovat symbolem $F(.;t_1)$ a máme tedy pro každé reálné číslo x

$$F(x;t_1) = P(\{\omega : X(\omega,t_1) \leq x\}) \tag{1.1.3}$$

Podobně pro každé přirozené číslo n a každou n-tici parametrů $t_1, t_2, \ldots, t_n$ z T n-rozměrná náhodná proměnná $(X(\cdot, t_1), X(\cdot, t_2), \ldots, X(\cdot, t_n))$ má n-rozměrnou distribuční funkci označenou symbolem

$$F(\cdot, \cdot, \ldots, \cdot\, ; t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

definovanou pro každou n-tici reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pomocí vztahu

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) = P\Big(\bigcap_{i=1}^{n} \big\{ \omega : X(\omega, t_i) \leq x_i \big\} \Big) \qquad (1.1.4)$$

Množina všech distribučních funkcí odpovídajících náhodným proměnným $(X(\cdot, t_1), X(\cdot, t_2), \ldots, X(\cdot, t_n))$ pro všechna přirozená čísla n a všechny n-tice parametrů $t_1, t_2, \ldots, t_n$ z T tvoří t. zv. *systém konečně - rozměrných distribučních funkcí* náhodného procesu $\{X(\cdot, t)\}_{t \in T}$.

Dokážeme si, že systém konečně - rozměrných distribučních funkcí náhodného procesu $\{X(\cdot, t)\}_{t \in T}$ splňuje podmínky:

(1) *symetrie*. Pro libovolnou permutaci čísel 1, 2, ..., n označenou $i_1, i_2, \ldots, i_n$, a každou n-tici parametrů $t_1, t_2, \ldots, t_n$ a reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí

$$F(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}, t_{i_1}, t_{i_2}, \ldots, t_{i_n}) = \qquad (1.1.5)$$

$$= F(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

(2) *konzistence*. Pro libovolné přirozené číslo n a n-tici parametrů $t_1, t_2, \ldots, t_n$ a všechna reálná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$

$$\lim_{x_n \to \infty} F(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) = \qquad (1.1.6)$$

$$= F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}; t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}).$$

Důkaz podmínky symetrie plyne přímo z komunitativity množinového průniku, neboť

$$\bigcap_{j=1}^{n} \big\{ \omega : X(\omega, t_{i_j}) \leq x_{i_j} \big\} = \bigcap_{j=1}^{n} \big\{ \omega : X(\omega, t_j) \leq x_j \big\} .$$

Podmínka konzistence plyne z toho, že

$$\lim_{x_n \to \infty} \big\{ \omega : X(\omega, t_n) \leq x_n \big\} = \Omega$$

Jestliže $\{X(\cdot, t)\}_{t \in T}$ a $\{Y(\cdot, t)\}_{t \in T}$ jsou dva náhodné procesy definované na stejném T, tak říkáme, že jsou *ekvivalentní*, když pro každé $t \in T$

$$P(\{ \omega : X(\omega, t) = Y(\omega, t)\}) = 1, \qquad (1.1.7)$$

neboli když pro každý parametr $t \in T$ odpovídající náhodné proměnné $X(\cdot, t)$ a $Y(\cdot, t)$ jsou si skoro jistě rovny.

Věta 1.1: Dva ekvivalentní náhodné procesy $\{X(.,t)\}_{t\in T}$ a $\{Y(.,t)\}_{t\in T}$ mají stejný systém konečně-rozměrných distribučních funkcí.

Důkaz: Důkaz tohoto tvrzení je založen na skutečnosti, že pro každé přirozené číslo n a každou n-tici parametrů $t_1, t_2, \ldots, t_n$ a reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$P(\bigcap_{j=1}^{n} \{\omega : X(\omega, t_j) \leq x_j\}) =$$

$$= P(\bigcap_{j=1}^{n} [\{\omega: X(\omega,t_j) \leq x_j\} \cap \{\omega : X(\omega,t_j) = Y(\omega,t_j)\}])$$

Skutečně, neboť

$$P(\bigcap_{j=1}^{n} \{\omega : X(\omega, t_j) \leq x_j\}) =$$

$$= P(\bigcap_{j=1}^{n-1} \{\omega: X(\omega,t_j) \leq x_j\} \cap \{\omega : X(\omega,t_n) \leq x_n\} [\{\omega : X(\omega,t_n) =$$

$$= Y(\omega, t_n)\} \cup \{\omega : X(\omega, t_n) \neq Y(\omega, t_n)\}]) =$$

$$= P(\bigcap_{j=1}^{n-1} \{\omega : X(\omega, t_j) \leq x_j\} \cap \{\omega : Y(\omega, t_n) \leq x_n\}) +$$

$$+ P(\bigcap_{j=1}^{n} \{\omega : X(\omega, t_j) \leq x_j\} \cap \{\omega : X(\omega, t_n) \neq Y(\omega, t_n)\})$$

Ale tento druhý sčítanec je roven nule, neboť uvažovaný jev je podmnožinou náhodného jevu $\{\omega: X(\omega, t_n) \neq Y(\omega, t_n)\}$, jež má pravděpodobnost rovnou nule. Podobně dostaneme též

$$P(\bigcap_{j=1}^{n} \{\omega : X(\omega,t_j) \leq x_j\}) = P(\bigcap_{j=1}^{n-2} \{\omega : X(\omega, t_j) \leq x_j\} \cap$$

$$\cap \bigcap_{k=n-1}^{n} \{\omega : Y(\omega,t_k) \leq x_k\}) = \ldots = P(\bigcap_{k=1}^{n} \{\omega : Y(\omega,t_k) \leq x_k\}). \qquad (*)$$

Pomocí systému konečně - rozměrných distribučních funkcí lze odvodit, jak uvidíme dále, většinu podstatných vlastností uvažovaného náhodného procesu. Existují však některé vlastnosti, které není možné určit pomocí tohoto systému konečně - roz-

rozměrných distribučních funkcí. Příkladem takové vlastnosti je na příklad ohraničenost daného náhodného procesu určitou konstantou. V následujícím příkladě bude takový případ podrobněji rozebrán.

Příklad 1.1: Nechť $\Omega = \langle 0,1 \rangle$, $\mathcal{S}$ - systém všech borelovských množin na intervalu $\langle 0,1 \rangle$ a P - Lebesgueova míra na $\mathcal{S}$. Nechť $T = \langle 0,1 \rangle$ a $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ a $\{Y(.,t)\}_{t \in T}$ nechť jsou dva náhodné procesy definované vztahy

$$\begin{aligned} X(\omega, t) &= 0 \quad \text{pro všechna } \omega \in \Omega \text{ a } t \in T \\ Y(\omega, t) &= 1 \quad \text{pro } \omega = t \\ &= 0 \quad \text{pro } \omega \neq t. \end{aligned} \tag{1.1.9}$$

Ukažte, že náhodné procesy $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ a $\{Y(.,t)\}_{t \in T}$ jsou ekvivalentní a

$$P(\{\omega : X(\omega,t) < 1, 0 \leq t \leq 1\}) = 1 \tag{1.1.10}$$

$$P(\{\omega : Y(\omega,t) < 1, 0 \leq t \leq 1\}) = 0. \tag{1.1.11}$$

Pro každé $t_0 \in T$ je

$$P(\{\omega : X(\omega,t_0) = Y(\omega, t_0)\}) = P(\Omega - \{t_0\}) = 1,$$

neboť jednobodová množina $\{t_0\} \in \mathcal{S}$ a $P(\{t_0\}) = 0$.
Dále máme

$$P(\{\omega : X(\omega, t) < 1, 0 \leq t \leq 1\}) = P(\Omega) = 1$$

a

$$P(\{\omega : Y(\omega, t) < 1, 0 \leq t \leq 1\}) = P(\emptyset) = 0,$$

neboť pro každé $\omega \in \Omega$ existuje t_ω takové, že

$$Y(\omega, t_\omega) \geq 1$$

stačí totiž vzít $t_\omega = \omega$ a podle (1.1.9) je $Y(\omega, \omega) = 1$. ⊛

Nechť $\{X(., t)\}_{t \in T}$ je náhodný proces. Potom pro každé $\omega \in \Omega$ funkci $X(\omega, .)$ jako funkci definovanou na množině parametrů T nazveme realizací náhodného procesu $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ pro toto ω. Označme R^T množinu všech reálných funkcí definovaných na T a $\mathcal{F}$ nejmenší systém podmnožin množiny R^T jež splňuje všechny podmínky kladené na systém náhodných jevů a jež pro každé $t \in T$ a reálné x obsahuje množiny funkcí tvaru

$$A(t, x) = \{x(.) : x(.) \in R^T, \ x(t) \leq x\}. \tag{1.1.12}$$

Množina $A(t, x)$ je tedy množinou těch reálných funkcí definovaných na T, které mají hodnotu v daném bodě $t \in T$ nejvýše rovnu x.

Jelikož platí

$$\{\omega : X(\omega, .) \in A(t, x)\} = \{\omega : X(\omega, t) \leq x\} \in \mathcal{S},$$

jak vyplývá z (1.1.1) je též pro každé $E \in \mathcal{F}$

$$\{\omega : X(\omega, .) \in E\} \in \mathcal{S} \tag{1.1.13}$$

Definujme nyní zobrazení ξ množiny Ω do R^T vztahem

$$\xi(\omega) = X(\omega, .), \tag{1.1.14}$$

t.j. každému $\omega \in \Omega$ přiřadíme realizaci náhodného procesu $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ pro toto ω.
Potom pro každé $E \in \mathcal{F}$ podle (1.1.13)

$$\{\omega : \xi(\omega) \in E\} = \{\omega : X(\omega, .) \in E\} \in \mathcal{S}$$

a tedy $\xi(.)$ je náhodná proměnná s hodnotami v R^T. Definujme nyní pro každé $E \in \mathcal{F}$

pravděpodobnost μ vztahem

$$\mu(E) = P(\{\omega : \xi(\omega) \in E\}) = P(\{\omega : X(\omega,.) \in E\}). \quad (1.1.15)$$

Dá se ukázat, že trojice $(R^T, \mathcal{F}, \mu)$ splňuje všechny axiomy platné pro pravděpodobnostní pole.

Došli jsme tak k závěru, že každému náhodnému procesu odpovídá nějaká pravděpodobnostní míra μ na $\mathcal{F}$. Tato úvaha odpovídá tomu, jak se v teorii pravděpodobnosti náhodné proměnné přiřazuje pravděpodobnostní míra na jejích hodnotách t.j. na borelovských množinách v množině reálných čísel na příklad na základě hustoty pravděpodobnosti určené k distribuční funkci uvažované náhodné proměnné.

Právě uvedený postup pro náhodné procesy odpovídá tomu, že se důsledně vychází ze všech možných realizací tohoto náhodného procesu. Poznamenejme ještě, že dva ekvivalentní náhodné procesy mají přiřazenu stejnou pravděpodobnostmí míru na $\mathcal{F}$.

Dokážeme si nyní obrácenou větu týkající se existence náhodného procesu odpovídající dané pravděpodobnostní míře na $\mathcal{F}$.

Věta 1.2: Nechť μ je pravděpodobnostní míra na systému $\mathcal{F}$ podmnožin množiny R^T. Potom existuje náhodný proces $\{X(., t)\}_{t \in T}$, jehož konečně-rozměrné distribuční funkce splňují pro každé přirozené číslo n a libovolné n-tice parametrů $t_1, t_2, \dots, t_n$ a reálných čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$ relaci

$$F(x_1,x_2,\dots,x_n;\ t_1,t_2,\dots,t_n) = \mu(\bigcap_{j=1}^{n} \{x(.) : x(t_j) \leq x_j\}) \quad (1.1.16)$$

Důkaz: Abychom dokázali tuto větu, je třeba zkonstruovat pravděpodobnostní pole $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ a systém náhodných proměnných $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ jehož distribuční funkce splňují (1.1.16).

Položme

$$\Omega = R^T, \quad \mathcal{S} = \mathcal{F}, \quad P = \mu$$

a pro každé $\omega = x(.) \in R^T$ a $t \in T$

$$X(\omega, t) = X(x(.), t) = x(t).$$

Potom pro každé reálné číslo x a $t \in T$

$$\{\omega : X(\omega, t) \leq x\} = \{x(.) : x(t) \leq x\} \in \mathcal{F} = \mathcal{S},$$

t.j. $X(., t)$ je náhodná proměnná, neboli $\{X(., t)\}_{t \in T}$ je náhodný proces.

Dále je pro dané n a dané n-tice $t_1, t_2, \dots, t_n$ a $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$F(x_1,x_2,\dots,x_n;\ t_1,t_2,\dots,t_n) = P(\bigcap_{j=1}^{n}\{\omega : X(\omega,t_j) \leq x_j\}) =$$

$$= \mu(\bigcap_{j=1}^{n} \{x(.) : x(t_j) \leq x_j\})$$

(*)

Jestliže daný systém distribučních funkcí splňuje podmínky symetrie a konsistence, t.j. podmínky (1.1.5) a (1.1.6), tak se dá dokázat, že existuje pravděpodobnostní míra μ na $\mathcal{F}$ splňující podmínku (1.1.16) a tedy dle věty 1.2. vyplývá, že existuje náhodný proces mající daný systém distribučních funkcí za svůj systém konečně-rozměrných distribučních funkcí. Důkaz existence pravděpodobnostní míry na $\mathcal{F}$ pro uvažovaný systém distribučních funkcí nebudeme provádět, neboť vyžaduje hlubších úvah teorie míry, které by přesáhly rámec těchto skript.

V závěru této kapitoly si ukážeme několik příkladů náhodných procesů.

Příklad 1.2: Nechť $X_1(.)$, $X_2(.)$, ... je posloupnost nezávislých náhodných proměnných se stejnou distribuční funkcí $G(.)$. Nechť $T = \{1, 2, \dots\}$ a pro každé $t \in T$ položme

$$X(., t) = X_t(.). \tag{1.1.17}$$

Dokažte, že $\{X(., t)\}_{t \in T}$ je náhodný proces.

I když se na první pohled zdá, že není v tomto příkladě co dokazovat, poněvadž podle předpokladu pro každé $t \in T$ je $X(., t)$ náhodnou proměnnou, je nutné si uvědomit, zda vůbec existuje taková posloupnost náhodných proměnných nezávislých se stejnou distribuční funkcí G. A to je právě skutečnost, kterou nyní naznačíme.

Uvažujme systém distribučních funkcí definovaných pro každé n a n-tici různých parametrů $t_1, t_2, \dots, t_n$ pro libovolnou n-tici reálných čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = G(x_1)G(x_2)\dots G(x_n). \tag{1.1.18}$$

V případě, že jsou právě dva parametry stejné, na příklad $t_1 = t_2$ a ostatní hodnoty parametrů jsou navzájem různé, tak musí být

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = G(\min(x_1, x_2))G(x_3)\dots G(x_n) \tag{1.1.19}$$

Podobně se definují i ostatní distribuční funkce pro jiná n.

Jak se lze lehce přesvědčit, takto definovaný systém distribučních funkcí $F(.,.)$ splňuje podmínky (1.1.5) a (1.1.6) a tedy existuje pravděpodobnostní míra μ na $\mathcal{F}$ a podle věty 1.2 existuje náhodný proces mající zavedený systém distribučních funkcí za svůj systém konečně-rozměrných distribučních funkcí.

⊛

Příklad 1.3: Nechť $X(.)$ je daná náhodná proměnná s distribuční funkcí G a nechť T je množinou všech reálných čísel. Nechť dále f je libovolná funkce definovaná na T. Dokažte, že systém náhodných proměnných

$$X(., t) = X(.)f(t) \quad t \in T \tag{1.1.20}$$

je náhodný proces a určete jeho systém konečně-rozměrných distribučních funkcí.

Pro každé $t \in T$ je $X(., t)$ jako násobek náhodné proměnné opět náhodná proměnná a tedy $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je náhodný proces.

Je-li G distribuční funkce náhodné proměnné $X(.)$ a je-li $f > 0$, tak pro každé n a libovolné n-tice parametrů $t_1, t_2, \dots, t_n$ a reálných čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$ dostáváme

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) &= \\ &= P\left(\bigcap_{j=1}^{n} \{\omega : X(\omega) f(t_j) \le x_j\}\right) = \\ &= P\left(\bigcap_{j=1}^{n} \left\{\omega : X(\omega) \le \frac{x_j}{f(t_j)}\right\}\right) = \\ &= P\left(\left\{\omega : X(\omega) \le \min_j \frac{x_j}{f(t_j)}\right\}\right) = \\ &= G\left(\min_j \frac{x_j}{f(t_j)}\right). \end{aligned} \tag{1.1.21}$$

Je-li naopak $f < 0$ dostaneme podobně

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n;\ t_1, t_2, \dots, t_n) = 1 - G(\max_j \frac{x_j}{f(t_j)}).$$

Může-li funkce f nabýt i nulové hodnoty a je-li pro některé t_j z n-tice $t_1, t_2, \dots, t_n$ právě $f(t_j) = 0$, tak buď

$$\left\{ \omega : X(\omega)\, f(t_j) \leq x_j \right\} = \Omega \qquad \text{když } x_j \geq 0$$

nebo

$$\left\{ \omega . X(\omega)\, f(t_j) \leq x_j \right\} = \emptyset \qquad \text{když } x_j < 0.$$

Proto celý průnik ve výrazu (1.1.21) je nemožným jevem v případě druhé alternativy nebo můžeme takové t_j vyloučit a omezit se jen na zbylá $t_1, t_2, \dots, t_n$ v případě alternativy první.

Obecně, když f nabývá jak kladných, tak i záporných hodnot, tak nejprve rozhodneme podle výše uvedené úvahy o těch hodnotách parametru, pro které je f nulová a zbylé rozdělíme na dvě části, takové, že do první dáme ty hodnoty parametrů z $t_1, t_2, \dots, t_n$ pro které je funkce f kladná a do druhé ty z nich, pro které je záporná. Dostaneme potom

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n;\ t_1, \dots, t_n) =$$

$$= G(\min_{\{j : f(t_j) > 0\}} \frac{x_j}{f(t_j)}) + G(\min_{\{j : f(t_j) < 0\}} \frac{x_j}{f(t_j)}) - 1. \qquad (1.1.22)$$

Tím jsme určili systém všech konečně-rozměrných distribučních funkcí odpovídající náhodnému procesu $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ definovanému v (1.1.20).

⊛

Kapitola II - Náhodné procesy s diskrétním časem

V této kapitole se budeme zabývat náhodnými procesy s diskrétním parametrem, t.j. případem, kdy množina T je daná konečná respektive spočetná množina speciálně, když T je daná konečná nebo nejvýše spočetná podmnožina množiny nezáporných čísel. Budeme uvažovat, že

$$T = \{0, 1, 2, \ldots, N\},$$

když se jedná o konečnou množinu parametrů (N je jejich počet) resp.

$$T = \{0, 1, 2, \ldots, N, \ldots\}$$

když se jedná o spočetnou množinu parametrů. Potom náhodný proces $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je vlastně vícerozměrná náhodná proměnná (náhodný vektor), když T je konečná případně posloupnost náhodných proměnných, když T je spočetná.

S náhodnými procesy tohoto typu jsme se již setkali v přednáškách o teorii pravděpodobnosti a matematické statistice. Tam se však většinou předpokládalo, že se jedná o posloupnosti nezávislých náhodných proměnných a to většinou se stejnou distribuční funkcí - se stejným rozložením pravděpodobnosti. V teorii náhodných procesů se takové předpoklady obecně nedělají a naopak se připouští libovolná závislost mezi uvažovanými náhodnými proměnnými.

Speciálním typem závislosti zkoumané v teorii náhodných procesů je t. zv. markovská závislost, jak bude uvedena v následujícím paragrafu.

2.1. Markovský řetězec

V kapitole II. budeme uvažovat, že T je množina všech nezáporných celých čísel a že I je daná, nejvýše spočetná množina nazývaná množinou stavů. Jednotlivé prvky množiny I - stavy si postupně očíslujeme 0, 1, 2, ... a budeme uvažovat, že počet stavů je konečný nebo spočetný, je-li množina I konečná nebo spočetná.

Řekneme, že náhodný proces $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je markovský řetězec s množinou stavů I, když T je množina všech nezáporných celých čísel a platí:

(1) pro každé $i \in I$ existuje $t \in T$ takové, že

$$P(\{\omega : X(\omega, t) = i\}) > 0; \tag{2.1.1}$$

(2) pro každé $t \geq 1$ a libovolné stavy $i_0, i_1, \ldots, i_t \in I$ je podmíněná pravděpodobnost

$$P(\{\omega : X(\omega,t) = i_t\} \mid \bigcap_{s=0}^{t-1} \{\omega : X(\omega, s) = i_s\}) \tag{2.1.2}$$

rovna podmíněné pravděpodobnosti

$$P(\{\omega : X(\omega,t) = i_t\} \mid \{\omega : X(\omega, t-1) = i_{t-1}\}), \tag{2.1.3}$$

pokud ovšem podmíněná pravděpodobnost (2.1.2) existuje.

Vlastnost uvedená pod (2) se nazývá markovskou vlastností a vyjadřuje tu skutečnost, že rozložení pravděpodobnosti náhodné proměnné $X(.,t)$ závisí pouze na stavu v čase t-1, t.j. na stavu náhodné proměnné $X(.,t-1)$ a nezávisí na tom, jak se do tohoto stavu náhodný proces $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ dostal.

Poznamenejme na tomto místě, že podmíněná pravděpodobnost (2.1.2) existuje, když

$$P\left(\bigcap_{s=0}^{t-1}\left\{\omega : X(\omega, s) = i_s\right\}\right) > 0. \qquad (2.1.4)$$

Označme nyní pro každé $i \in I$ symbolem

$$\pi_i(0) = P\left(\left\{\omega : X(\omega, 0) = i\right\}\right). \qquad (2.1.5)$$

Potom zřejmě

$$\sum_{i \in I} \pi_i(0) = 1 \qquad (2.1.6)$$

a $\left\{\pi_i(0)\right\}_{i \in I}$ nazýváme počátečním rozložením pravděpodobnosti náhodného procesu $\left\{X(., t)\right\}_{t \in T}$. Počáteční rozložení pravděpodobnosti je vlastně rozložení pravděpodobnosti náhodné proměnné $X(.,0)$.

Označme dále pro každé $t \in T$ symbolem $p_{ij}(t)$ pravděpodobnost přechodu náhodného procesu $\left\{X(.,t)\right\}_{t \in T}$ ze stavu i v čase t do stavu j v čase $t+1$, t.j. podmíněnou pravděpodobnost

$$p_{ij}(t) = P\left(\left\{\omega : X(\omega, t+1) = j\right\} \mid \left\{\omega : X(\omega, t) = i\right\}\right), \qquad (2.1.7)$$

pokud ovšem tato podmíněná pravděpodobnost má smysl.

Pro každé $i \in I$ a $t \in T$ musí zřejmě platit, že

$$\sum_{j \in I} p_{ij}(t) = 1 \qquad (2.1.8)$$

pokud ovšem $P\left(\left\{\omega : X(\omega, t) = i\right\}\right) > 0$, t.j. může markovský řetězec $\left\{X(.,t)\right\}_{t \in T}$ být s kladnou pravděpodobností v čase t ve stavu i, neboť přechod ze stavu i v čase t do nějakého stavu j v čase $t+1$ je jistým jevem.

Označme si dále pro každé $t, s \in T$ $(t < s)$ a $i, j \in I$ symbolem $p_{ij}(t, s)$ podmíněnou pravděpodobnost

$$p_{ij}(t, s) = P\left(\left\{\omega : X(\omega, s) = j\right\} \mid \left\{\omega : X(\omega, t) = i\right\}\right), \qquad (2.1.9)$$

když tato podmíněná pravděpodobnost existuje a nazveme ji pravděpodobností přechodu po s-t krocích ze stavu i v čase t do stavu j.

Porovnáním (2.1.9) s (2.1.8) dostáváme

$$p_{ij}(t, t+1) = p_{ij}(t). \qquad (2.1.10)$$

Platí následující věta.

Věta 2.1: Je-li náhodný proces $\left\{X(.,t)\right\}_{t \in T}$ markovským řetězcem s množinou stavů I, tak pro každou n-tici parametrů $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ takovou, že $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ a každou n-tici stavů $i_1, i_2, \dots, i_n \in I$ je

$$P\left(\left\{\omega : X(\omega, t_n) = i_n\right\} \Big| \bigcap_{j=1}^{n-1}\left\{\omega : X(\omega, t_j) = i_j\right\}\right) =$$

$$= P\left(\left\{\omega : X(\omega, t_n) = i_n\right\} \Big| \left\{\omega : X(\omega, t_{n-1}) = i_{n-1}\right\}\right), \qquad (2.1.11)$$

pokud podmíněná pravděpodobnost na levé straně této rovnosti má smysl.

Jestliže m je takové celé číslo, že $1 < m < n$, tak navíc

$$P\left(\bigcap_{\ell=m+1}^{n}\left\{\omega : X(\omega,t_\ell)= i_\ell\right\} \Big/ \bigcap_{j=1}^{m}\left\{\omega : X(\omega,t_j) = i_j\right\}\right) = \tag{2.1.12}$$
$$= P\left(\bigcap_{\ell=m+1}^{n}\left\{\omega : X(\omega,t_\ell)= i_\ell\right\} \Big/ \left\{\omega : X(\omega,t_m) = i_m\right\}\right).$$

Důkaz tohoto tvrzení vyplývá přímo z markovské vlastnosti a pro složitost zápisu jej zde nebudeme provádět. Je nutné si jen uvědomit, že podobně jako markovská vlastnost samotná udává závislost rozložení v čase t pouze na stavu v čase t-1 bez ohledu na průběh v minulosti, tak totéž podle věty 2.1 platí i pro delší odstup od minulosti než o jeden krok a také pro další budoucnost.

Aby bylo možné určit, podle úvah kapitoly I, jak vypadá pravděpodobnostní míra na prostoru všech posloupností odpovídající danému markovskému řetězci, je nutné určit všechny konečně-rozměrné distribuční funkce. K tomu však zřejmě stačí určit všechna konečně-rozměrná rozložení pravděpodobnosti odpovídající pro každé přirozené číslo n náhodným proměnným $X(.,0)$, $X(.,1)$, ..., $X(.,n)$.

Nechť tedy n je dané přirozené číslo a nechť i_0, i_1, ..., i_n jsou libovolné stavy z I. Potom zřejmě
$$P\left(\bigcap_{j=0}^{n}\left\{\omega : X(\omega,j)= i_j\right\}\right)= \pi_{i_0}(0)p_{i_0 i_1}(0)\ldots p_{i_{n-1}i_n}(n-1) = \tag{2.1.13}$$
$$= \pi_{i_0}(0) \prod_{j=1}^{n} p_{i_{j-1}i_j}(j-1).$$

Příklad 2.1. Nechť $Y_1(.)$, $Y_2(.)$, ... je posloupnost nezávislých náhodných proměnných nabývajících dvou hodnot 0 a 1 se stejnými pravděpodobnostmi
$$P(\left\{\omega : Y_i(\omega) = 1\right\}) = p = 1 - P(\left\{\omega : Y_i(\omega) = 0\right\})$$
pro všechna i = 1, 2, ...

Definujme nyní náhodné proměnné $X_1(.)$, $X_2(.)$, ... vztahy
$$X_1(.) = Y_1(.)$$
$$X_n(.) = X_{n-1}(.) + Y_n(.) \quad [\mathrm{mod}\ 2] \qquad n = 2,3,\ldots$$
Dokažte, že náhodný proces $\left\{X(.,t)\right\}_{t\in T}$ definovaný vztahem
$$X(., t) = X_t(.)$$
je markovský řetězec a určete jeho pravděpodobnosti přechodu $p_{ij}(t)$!

Nechť $t \in T$, $t \geq 1$ a nechť $i_0, i_1, \ldots, i_t$ je libovolná (t+1) tice nul a jednotek. Potom
$$P\left(\left\{\omega : X(\omega, t) = i_t\right\} \Big/ \bigcap_{j=0}^{t-1}\left\{\omega : X(\omega, j) = i_j\right\}\right) =$$
$$= \frac{P\left(\left\{\omega : i_t = Y_t(\omega) + i_{t-1}\ [\mathrm{mod}\ 2]\right\} \cap \bigcap_{j=0}^{t-1}\left\{\omega : X(\omega,j) = i_j\right\}\right)}{P\left(\bigcap_{j=0}^{t-1}\left\{\omega : X(\omega, j) = i_j\right\}\right)}$$

Vzhledem k nezávislosti náhodných proměnných $Y_1(.)$, $Y_2(.)$,... odtud dostáváme

$$P(\{\omega : X(\omega,t) = i_t\} \,/\, \bigcap_{j=0}^{t-1} \{\omega : X(\omega,j) = i_j\}) =$$

$$= P(\{\omega : i_t = Y_t(\omega) + i_{t-1} \,[\bmod 2]\})$$

Na druhé straně však též

$$P(\{\omega : X(\omega,t) = i_t\} \,/\, \{\omega: X(\omega,t-1) = i_{t-1}\}) =$$

$$= P(\{\omega : i_t = Y_t(\omega) + i_{t-1} \,[\bmod 2]\}) \qquad (2.1.14)$$

a tedy je splněna podmínka markovské vlastnosti a $\{X(.,t)\}_{t\in T}$ je markovský řetězec s množinou stavů $I = \{0, 1\}$ a s počátečním rozložením

$$\pi_0(0) = 1 - p \qquad \pi_1(0) = p.$$

Pravděpodobnosti přechodu $p_{ij}(t)$, jak je vidět z (2.1.14) nezávisí na t, neboť náhodné proměnné $Y_t(.)$ mají stejné rozložení pravděpodobnosti. Proto

$$p_{00}(t) = P(\{\omega: 0 = Y_1(\omega) + 0 \,[\bmod 2]\}) = P(\{\omega : Y_1(\omega) = 0\}) = 1 - p$$
$$p_{01}(t) = P(\{\omega: 1 = Y_1(\omega) + 0 \,[\bmod 2]\}) = P(\{\omega : Y_1(\omega) = 1\}) = p$$
$$p_{10}(t) = P(\{\omega: 0 = Y_1(\omega) + 1 \,[\bmod 2]\}) = P(\{\omega : Y_1(\omega) = 1\}) = p$$
$$p_{11}(t) = P(\{\omega: 1 = Y_1(\omega) + 1 \,[\bmod 2]\}) = P(\{\omega : Y_1(\omega) = 0\}) = 1 - p.$$

⊛

2.2. Homogenní markovský řetězec

Markovský řetězec, jehož pravděpodobnosti přechodu $p_{ij}(t)$ nezávisí na t, se nazývá homogenní markovský řetězec. Příklad takového homogenního markovského řetězce byl uveden v příkladě 2.1.

Každému homogennímu markovskému řetězci tedy odpovídají pravděpodobnosti přechodů $p_{ij} = p_{ij}(t)$ pro každé i, $j \in I$, které si můžeme sestavit v matici pravděpodobností přechodu $\mathbb{P}$ danou pomocí

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \cdots \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \cdots \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = (p_{ij}) \qquad (2.2.1)$$

t.j. pomocí matice, jejíž počet řádků a sloupců je roven počtu stavů v množině stavů I.

Matice pravděpodobností přechodu má tu vlastnost, že součet prvků v každém řádku je roven 1, neboť musí platit podle (2.1.8)

$$\sum_{j\in I} p_{ij}(t) = \sum_{j\in I} p_{ij} = 1$$

pro každé $i \in I$ a $p_{ij} \geq 0$.

Matice, jejíž všechny prvky jsou nezáporné a součet v každé řádce je roven 1 se nazývá někdy stochastická matice.

Ze vztahu (2.1.13) vidíme, že znalost počátečního rozložení pravděpodobnosti $\{\pi_i(0) : i \in I\}$ a matice pravděpodobností přechodu nám umožňuje vypočítat jakékoliv rozložení pravděpodobnosti na množině všech posloupností stavů a tedy též systém konečně-rozměrných distribučních funkcí. Tento systém pak nám zaručuje podle úvah kapitoly I existenci pravděpodobnostní míry na množině všech posloupností stavů. Důkaz tohoto tvrzení nebudeme provádět.

Uvažujme tedy homogenní markovský řetězec $\{X(\cdot,t)\}_{t \in T}$ jehož počáteční rozložení pravděpodobnosti je dáno pomocí $\{\pi_i(0): i \in I\}$ a jehož matice pravděpodobností přechodu je rovna $\mathbb{P} = (p_{ij})$. Určíme si nyní, jak vypadají pravděpodobnosti přechodu $p_{ij}(t,s)$ po s-t krocích ze stavu i v čase t do stavu j v čase s, t.j. určíme podmíněné pravděpodobnosti

$$P(\{\omega : X(\omega, s) = j\} / \{\omega : X(\omega, t) = i\}).$$

Označme $n = s-t$, tedy $s = t + n$ a hledejme pravděpodobnost

$$P(\{\omega : X(\omega, t+n) = j\} / \{\omega : X(\omega,t) = i\})$$

Pro $n = 1$ je tato pravděpodobnost rovna p_{ij}. Pro $n = 2$ dostáváme podle věty o úplné pravděpodobnosti a věty o násobení pravděpodobností.

$$P(\{\omega : X(\omega,t+2) = j\} / \{\omega : X(\omega, t) = i\}) = \tag{2.2.2}$$

$$= \sum_{k \in I} P(\{\omega : X(\omega,t+2) = j,\ X(\omega,t+1) = k\} / \{\omega : X(\omega,t)=i\}) =$$

$$= \sum_{k \in I} p_{ik} \cdot p_{kj} ,$$

což podle násobení matic je prvek i-tého sloupce a j-tého řádku matice

$$\mathbb{P}^2 = \mathbb{P} \cdot \mathbb{P} .$$

Předpokládejme nyní, že pravděpodobnost

$$P(\{\omega : X(\omega, t+n) = j\} / \{\omega : X(\omega,t) = i\}) \tag{2.2.3}$$

je prvek i-tého řádku a j-tého sloupce matice $\mathbb{P}^n$. Potom

$$P(\{\omega : X(\omega, t+n+1) = j\} / \{\omega : X(\omega,t) = i\}) =$$

$$= \sum_{k \in I} P(\{\omega : X(\omega,t+n)= k\} / \{\omega : X(\omega,t)= i\}) \cdot p_{kj} ,$$

což však je prvek i-tého řádku a j-tého sloupce matice $\mathbb{P}^{n+1}$.

Dokázali jsme tak, že podmíněná pravděpodobnost (2.2.3), když existuje, nezávisí na t a je prvek i-tého řádku a j-tého sloupce matice $\mathbb{P}^n$.

Označme pravděpodobnost (2.2.3) symbolem

$$p_{ij}^{(n)} ,$$

potom právě dokázané tvrzení lze symbolicky zapsat ve tvaru

$$(p_{ij}^{(n)}) = \mathbb{P}^n = (p_{ij})^n, \tag{2.2.4}$$

což se explicitně dá přepsat na

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k \in I} p_{ik}^{(n-1)} p_{kj} \qquad \text{pro } n > 1 \tag{2.2.5}$$

a tento explicitní vztah se nazývá Chapman - Kolmogorova rovnice. Chapman-Kolmogorov rovnice se dá psát i pro n = 1 použijeme-li označení

$$p_{ij}^{(o)} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{když } i \neq j \\ 1 & \text{když } i = j. \end{cases}$$

Věta 2.2: Pro každé nezáporné n a m platí

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k \in I} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)} \tag{2.2.6}$$

Důkaz: Pro m = 0 je (2.2.6) triviálně splněno podle definice $p_{ij}^{(o)}$. Předpokládejme, že pro dané n platí pro nějaké m. Dokážeme, že platí i pro m+1. Z (2.2.5) plyne

$$p_{ij}^{(n+m+1)} = \sum_{k \in I} p_{ik}^{(n+m)} p_{kj} =$$

$$= \sum_{k \in I} \sum_{\ell \in I} p_{i\ell}^{(n)} p_{\ell k}^{(m)} p_{kj} =$$

$$= \sum_{\ell \in I} p_{i\ell}^{(n)} \sum_{k \in I} p_{\ell k}^{(m)} p_{kj} =$$

$$= \sum_{\ell \in I} p_{i\ell}^{(n)} p_{\ell j}^{(m+1)}$$

⊛

Známe-li pravděpodobnosti přechodu ze stavu i do stavu j po n krocích pro homogenní markovský řetězec $\{X(.,t)\}_{t \in T}$, tak spolu s počátečním rozloženímpravděpodobnosti $\{\pi_i(0) : i \in I\}$ lze určit rozložení pravděpodobnosti náhodné proměnné X(.,t), které se nazývá absolutním rozložením pravdĕpodobnosti náhodného procesu $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ v bodě t. Označme $\{\pi_i(t) : i \in I\}$ toto absolutní rozložení pravděpodobnosti homogenního markovského řetězce $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ v čase t. Dostáváme pro $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \pi_i(t) &= P(\{\omega : X(\omega,t) = i\}) = \\ &= \sum_{j \in I} P(\{\omega : X(\omega,0)=j\}) . P(\{\omega : X(\omega,t)=i\} / \{\omega : X(\omega,0)=j\}) = \\ &= \sum_{j \in I} \pi_j(0)\, p_{ji}^{(t)} . \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

Příklad 2.2: Nechť $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je homogenní markovský řetězec se třemi možnými stavy $I = \{0, 1, 2\}$, jehož počáteční rozložení je dáno pomocí

$$\pi_o(0) = \pi_1(0) = \pi_2(0) = \frac{1}{3}$$

a jehož matice pravděpodobností přechodu je

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Určete pravděpodobnosti přechodu po 4 krocích a absolutní rozložení pravděpodobnosti v čase $t = 4$.
Podle (2.2.4) a (2.2.5) máme

$$\mathbb{P}^2 = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}; \qquad \mathbb{P}^3 = \begin{pmatrix} 3/8 & 3/8 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 3/8 & 3/8 & 1/4 \end{pmatrix};$$

$$\mathbb{P}^4 = \begin{pmatrix} 5/16 & 5/16 & 3/8 \\ 3/8 & 3/8 & 1/4 \\ 5/16 & 5/16 & 3/8 \end{pmatrix}.$$

Odtud potom na příklad dostaneme $p_{21}^{(4)} = 5/16$.

Absolutní rozložení pravděpodobnosti v čase $t = 4$ je podle (2.2.7) dána

$$\pi_0(4) = \pi_0(0)\, p_{00}^{(4)} + \pi_1(0) p_{10}^{(4)} + \pi_2(0)\, p_{20}^{(4)} =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{5}{16} + \frac{3}{8} + \frac{5}{16}\right] = \frac{1}{3}$$

$$\pi_1(4) = \pi_0(0) p_{01}^{(4)} + \pi_1(0)\, p_{11}^{(4)} + \pi_2(0)\, p_{21}^{(4)} =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{5}{16} + \frac{3}{8} + \frac{5}{16}\right] = \frac{1}{3}$$

$$\pi_2(4) = \frac{1}{3}\left[\frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8}\right] = \frac{1}{3}$$

(*)

2.3. Geometrické znázorňování homogenních markovských řetězců.

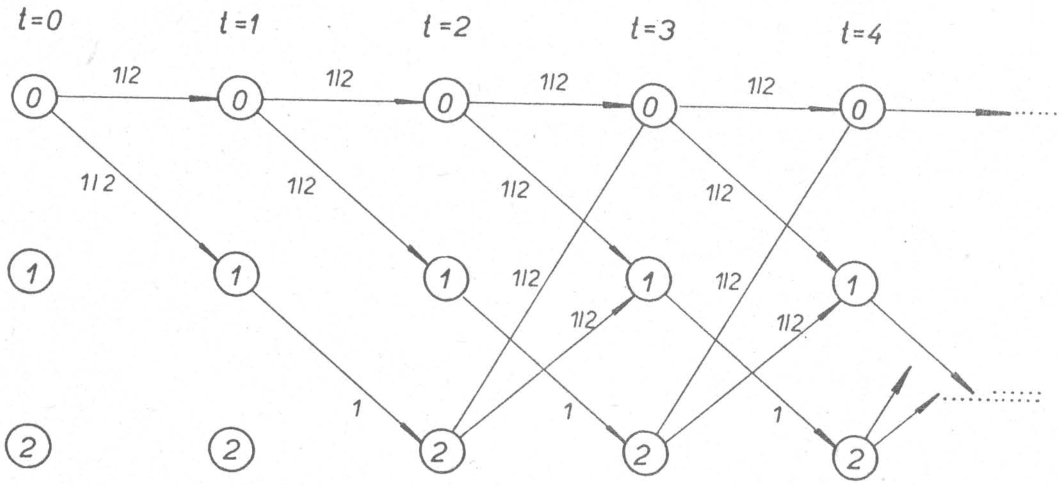
V tomto paragrafu budeme nejprve uvažovat homogenní markovský řetězec $\{X(.,t)\}_{t \in T}$, jehož množina stavů I je konečná, t.j. $I = \{0, 1, \ldots, N\}$. Takový homogenní markovský řetězec je dán pomocí počátečního rozložení $\{\pi_i(0) : i \in I\}$ a maticí pravděpodobností přechodu typu $(N+1) \times (N+1)$, $\mathbb{P} = (p_{ij})$.

Vývoj takového homogenního markovského řetězce v čase si můžeme znázornit pomocí t.zv. stromu. Pro konkrétnost uvažujme homogenní markovský řetězec z příkladu 2.2, jehož počáteční rozložení pravděpodobnosti bude jiné než v příkladu 2.2 a to

$$\pi_0(0) = 1; \qquad \pi_1(0) = \pi_2(0) = 0.$$

Tento homogenní markovský řetězec začíná s pravděpodobností 1 ve stavu 0, a kterého může s pravděpodobností 1/2 setrvat v tomto stavu v následujícím časovém okamžiku t = 1 nebo s pravděpodobností 1/2 může přejít do stavu 1. Ze stavu 1 přechází řetězec s pravděpodobností 1 do stavu 2. Ze stavu 2 může přejít se stejnou pravděpodobností 1/2 do stavu 0 nebo 1. Dále pak probíhá řetězec podle stejných pravidel.

Označme si každý stav kroužkem pro různé časové okamžiky $t = 0,1,2,\dots$. Jednotlivé možné průběhy - realizace - markovského řetězce $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ si můžeme graficky znázornit jako spojnice odpovídajících stavů pro různé časové okamžiky. Jako váhy charakterizující jednotlivé spojnice napíšeme pravděpodobnosti těchto přechodů. Graficky je možné použít buď nerozvinutý tvar, jak je uveden na obr. 1.



OBR. 1

nebo rozvinutý tvar uvedený na obr. 2.

V obou obrázcích jsou nakresleny pouze ty spojnice, které mohou nastat s kladnou pravděpodobností. Absolutní rozložení pravděpodobnosti pro jednotlivé časové okamžiky se dají vypočítat z obou obrázků, když se pro každý možný stav v uvažovaném okamžiku sečtou součiny vah odpovídajících všem průběhům, které v daném okamžiku v daném stavu končí. Tak na příklad v obr. 1 končí v čase t = 4 ve stavu 0 všechny průběhy, které v čase t = 3 byly ve stavu 0 a setrvaly v něm (tato situace nastane s pravděpodobností 1/2) nebo byly v čase t = 3 ve stavu 2 a nastal přechod ze stavu 2 do stavu 0 (tato situace nastane též s pravděpodobností 1/2). Potom

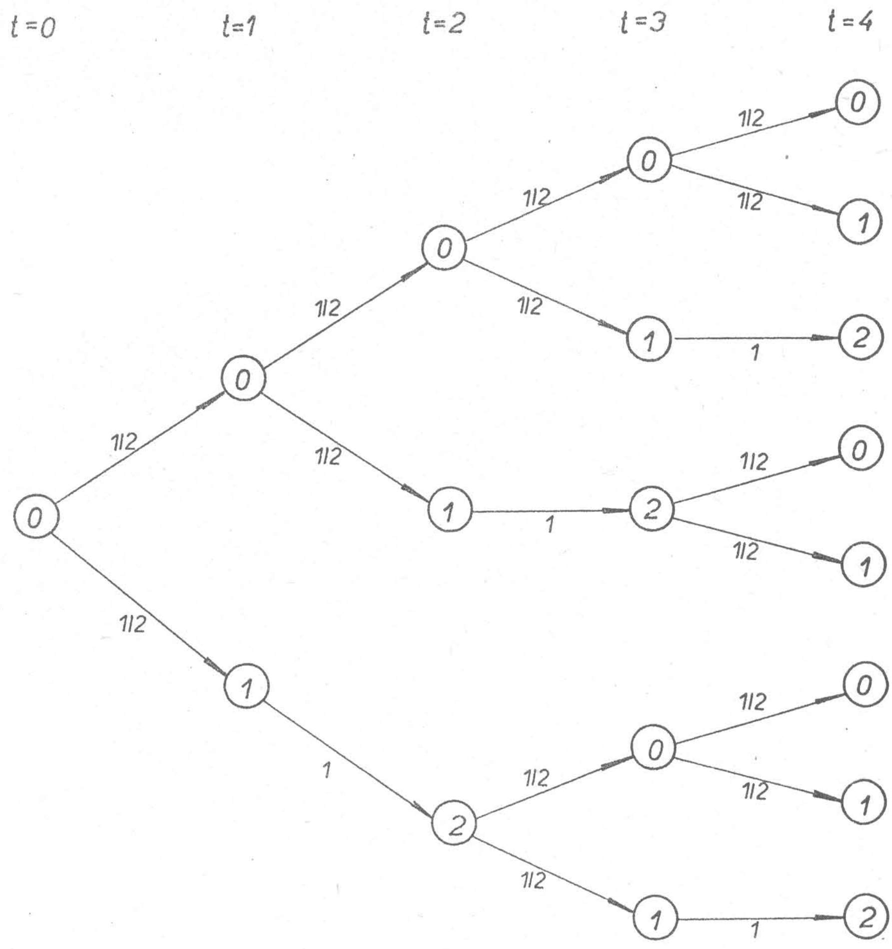
$$P(\{\omega: X(\omega,4) = 0\}) = \frac{1}{2}\left[P(\{\omega: X(\omega,3) = 0\}) + P(\{\omega : X(\omega,3) = 2\})\right] .$$

Ale v čase t = 3 končí ve stavu 2 pouze ty cesty, které v čase t = 2 byly ve stavu 1 a tedy

$$P(\{\omega : X(\omega,3) = 2\}) = P(\{\omega : X(\omega,2) = 1\}).$$

Podobně dostaneme, že

$$P(\{\omega : X(\omega,3) = 0\}) = \frac{1}{2}\left[P(\{\omega : X(\omega,2) = 0\}) + P(\{\omega : X(\omega,2) = 2\})\right] .$$



OBR. 2.

Ale

$$P(\{\omega : X(\omega,2) = 0\}) = \frac{1}{4} \qquad P(\{\omega : X(\omega,2) = 2\}) = \frac{1}{2}$$

$$P(\{\omega : X(\omega,2) = 1\}) = \frac{1}{4}$$

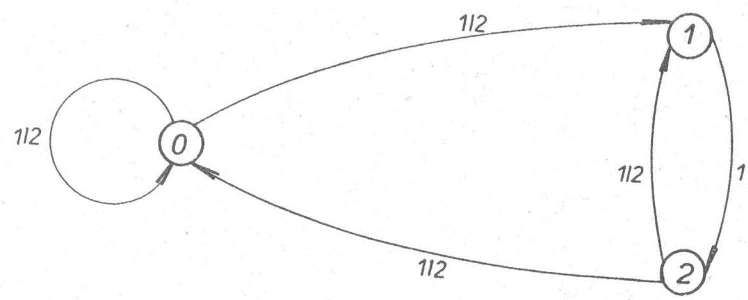
Proto

$$P(\{\omega : X(\omega,4) = 0\}) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}) + \frac{1}{4}\right] = \frac{5}{16} .$$

Z obrázku 2 se stejná pravděpodobnost vypočítá jednodušeji a to

$$P(\{\omega : X(\omega,4) = 0\}) = (\frac{1}{2})^4 + 2(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{5}{16}.$$

Jiné grafické znázornění homogenního markovského řetězce je uvedeno na obr. 3, kde šipkami jsou uvedeny pouze ty přechody, které mohou nastat s kladnou pravděpodobností. V tomto grafickém znázornění je poněkud potlačen časový parametr, ovšem na druhé straně nám umožní určit zda z daného stavu lze se dostat do jiných a otázky tohoto typu, jak uvidíme v dalších paragrafech .



OBR. 3.

Úplně stejně by se daly znázorňovat homogenní markovské řetězce se spočetným množstvím stavů. Pro tento účel však budeme používat dále většinou jen znázorňování podle obr. 3.

2.4. Klasifikace stavů homogenního markovského řetězce

V tomto paragrafu budeme uvažovat homogenní markovský řetězec $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ s množinou stavů I, jehož počáteční rozložení je $\{\pi_i(0): i \in I\}$ a jehož matice pravděpodobností přechodu je $\mathbb{P} = (p_{ij})$.

Řekneme, že stav $j \in I$ je dosažitelný ze stavu $i \in I$, když existuje přirozené číslo n takové, že

$$p_{ij}^{(n)} > 0 , \tag{2.4.1}$$

neboli, když může s kladnou pravděpodobností nastat přechod ze stavu i do j.

Stav $i \in I$ je sousledný se stavem $j \in I$ když stav j je dosažitelný z i a naopak stav i je dosažitelný z j.

Věta 2.3: Jsou-li $i, j, k \in I$ libovolné stavy takové, že j je dosažitelný z i a k je dosažitelný z j, tak k je dosažitelný z i.

Důkaz: Podle předpokladu existují přirozená čísla n a m taková, že $p_{ij}^{(n)} > 0$ a $p_{jk}^{(m)} > 0$. Potom ale podle (2.2.6)

$$p_{ik}^{(n+m)} \geq p_{ij}^{(n)} \; p_{jk}^{(m)} > 0$$

a tedy stav k je dosažitelný ze stavu i. ⊛

Věta 2.4: Když stav i je sousledný se stavem j, tak

(1) j je sousledný se stavem i;

(2) i je sousledný s i;

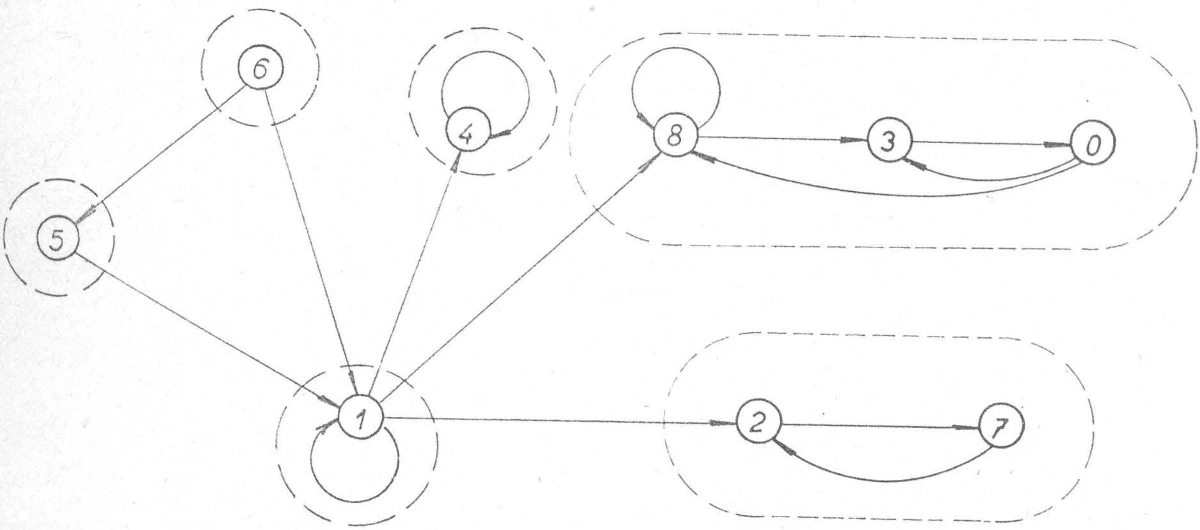
(3) když stav k je sousledný se stavem j, je k sousledný se stavem i.

Důkaz: (1) plyne přímo z předpokladu, že i je sousledný s j. (3) vyplývá z věty 2.3, neboť stav k lze dosáhnout z i a naopak z k lze dosáhnout j a z j lze dosáhnout i. Tvrzení (2) pak vyplývá z (1) a (3). ⊛

Definujme nyní t. zv. třídy stavů následujícím způsobem: Každý stav, který není sousledný s žádným stavem tvoří třídu. Stavy, pro které existuje sousledný stav se rozdělí do množin vzájemně sousledných stavů. Každá taková množina tvoří třídu stavů. Je-li tedy i libovolný stav z I, tak buď sám tvoří třídu, když neexistuje žádný stav s ním sousledný, nebo patří do množiny vytvořené ze všech s ním sousledných stavů.

S použitím věty 2.4. se dá dokázat, že množina všech stavů I se rozdělí na disjunktní systém tříd stavů. Třída stavů, která obsahuje stav $i \in I$ se označuje $C(i)$.

Příklad 2.3: Nechť $\{X(., t)\}_{t \in T}$ je homogenní markovský řetězec, jehož grafické znázornění je uvedeno na obr. 4.



OBR. 4.

Určete pro každý stav všechny z něj dosažitelné stavy, všechny stavy s ním sousledné a ukažte všechny třídy stavů!

Z uvedeného grafického znázornění vyplývá, že ze stavu 0 lze dosáhnout stavy 3, 8, 0 a žádné jiné. V následující tabulce budou ke každému stavu i uvedeny označením + všechny stavy dosažitelné z i a naopak označením - ty stavy, které nejsou dosažitelné z i.

Stavy \ dosažitelné stavy	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	+	-	-	+	-	-	-	-	+
1	+	+	+	+	+	-	-	+	+
2	-	-	+	-	-	-	-	+	-
3	+	-	-	+	-	-	-	-	+
4	-	-	-	-	+	-	-	-	-
5	+	+	+	+	+	-	-	+	+
6	+	+	+	+	+	+	-	+	-
7	-	-	+	-	-	-	-	+	-
8	+	-	-	+	-	-	-	-	+

Tab. 1.

Z obrázku 4. dále dostáváme, že na příklad stav 0 je sousledný se stavem 0, 3 a 8, stav 5 není sousledný s žádným stavem, stav 1 je sousledný sám se sebou a pod. V tabulce 2 budou ke stavu i uvedeny označením + všechny stavy sousledné s i a naopak - ty, které nejsou s i sousledné.

Stav \ sousledné stavy	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	+	-	-	+	-	-	-	-	+
1	-	+	-	-	-	-	-	-	-
2	-	-	+	-	-	-	-	+	-
3	+	-	-	+	-	-	-	-	+
4	-	-	-	-	+	-	-	-	-
5	-	-	-	-	-	-	-	-	-
6	-	-	-	-	-	-	-	-	-
7	-	-	+	-	-	-	-	+	-
8	+	-	-	+	-	-	-	-	+

Tab. 2

Dále dostáváme, že $C(0) = C(3) = C(8) = \{0, 3, 8\}$, $C(1) = \{1\}$, $C(2) = C(7) = \{2, 7\}$, $C(4) = \{4\}$, $C(5) = \{5\}$, $C(6) = \{6\}$ a vidíme, jak vypadají jednotlivé třídy stavů. Tyto třídy stavů jsou vymezeny a označeny čárkovanou čarou na obr. 4.

⊛

Řekneme, že stav $i \in I$ je podstatný, když je sousledný s každým stavem j, který je z něj dosažitelný. Stav, který není podstatný se nazývá nepodstatný.

Platí následující věta.

Věta 2.5: Nechť $i \in I$ je podstatný stav a $j \in I$ je dosažitelný stav ze stavu i. Potom stav j je podstatný.

Důkaz: Nechť $k \in I$ je dosažitelný z j. Potom podle věty 2.3 je k dosažitelný z i. Jelikož i je podstatný, musí být sousledný s každým z něj dosažitelným stavem a tedy i je sousledný s k. Podle věty 2.3 pak je stav j dosažitelný z k a tedy je s ním též sousledný.

⊛

Věta 2.6: Je-li $i \in I$ podstatný stav, je každý stav $j \in C(i)$ též podstatný.

Důkaz této věty vyplývá z definice C(i) a věty 2.5.

Příklad 2.4: Nechť $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je homogenní markovský řetězec z příkladu 2.3. Určete všechny podstatné a nepodstatné jeho stavy!

S použitím tabulky 1 a 2, které udávají ke každému stavu $i \in I$ z něho dosažitelné stavy resp. stavy s ním sousledné, je možné ukázat, že stavy 0, 2, 3, 4, 7, 8 jsou podstatné stavy a stavy 1, 5, 6 jsou nepodstatné stavy. Skutečně, neboť na příklad z 0 lze dosáhnout stavy 0, 3 a 8 a se všemi je stav 0 sousledný. Totéž platí na příklad pro stav 4, ale neplatí na příklad pro stav 1, z kterého jsou mimo jiné dosažitelné stavy 2 a 7, s kterými však 1 není sousledný stav.

⊛

Řekneme, že množina stavů $E \subset I$ je uzavřená, když pro každé $i \in E$ platí

$$\sum_{j \in E} p_{ij} = 1 \qquad (2.4.2)$$

S použitím (2.1.8) odtud dostáváme, že množina všech stavů I je uzavřená množina stavů.

Věta 2.7: Nechť $E \subset I$ je uzavřená množina stavů. Potom pro každé $n \geq 0$ a $i \in E$ je

$$\sum_{j \in E} p_{ij}^{(n)} = 1 \qquad (2.4.3)$$

Důkaz: Důkaz provedeme metodou úplné indukce. Pro n = 0 a n = 1 platí (2.4.3) podle definice $p_{ij}^{(o)}$ a definice uzavřené množiny (2.4.2). Předpokládejme, že (2.4.3) platí pro n. Potom podle (2.2.5) je pro každé $i \in E$

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k \in I} p_{ik}\, p_{kj}^{(n)} = \sum_{k \in E} p_{ik}\, p_{kj}^{(n)}$$

Proto též

$$\sum_{j \in E} p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{j \in E} \sum_{k \in E} p_{ik}\, p_{kj}^{(n)} = \sum_{k \in E} p_{ik} \sum_{j \in E} p_{kj}^{(n)}$$

což podle (2.4.3) je rovno $\sum_{k \in E} p_{ik}$ a jelikož E je uzavřené, tak $\sum_{j \in E} p_{ij}^{(n+1)} = 1$,

což je (2.4.3) pro n + 1.

⊛

Věta 2.8: Množina stavů $E \subset I$ je uzavřená tehdy a jen tehdy, když $p_{ij} = 0$ pro každé $i \in E$ a $j \in I - E$.

Důkaz této věty plyne bezprostředně z definice uzavřené množiny stavů a ze základních vlastností pravděpodobnosti.

Nechť E je libovolná podmnožina množiny všech stavů I. Uzávěrem množiny E, který označíme $\bar{E}$ nazveme takovou množinu stavů, jež splňuje následující požadavky

(1) $\bar{E}$ je uzavřená množina stavů;

(2) každá uzavřená množina stavů obsahující E obsahuje i $\bar{E}$.

Uzávěrem dané množiny E je tedy nejmenší uzavřená množina obsahující E.

Dříve než si na příkladě ukážeme, jak vypadají uzavřené množiny stavů a uzávěr libovolné množiny stavů, dokážeme si následující věty.

Věta 2.9: Jestliže stav $i \in I$ je podstatný, tak

$$\{i\} = C(i) \qquad (2.4.4)$$

Důkaz: Když $i \in I$ je podstatný, tak podle věty 2.6 je každý stav z C(i) též podstatný. Musí tedy platit, že

$$\sum_{j \in C(i)} p_{ij} = \sum_{j \in I} p_{ij} = 1$$

Neboli C(i) je uzavřená množina. Nechť $E \subset C(i)$ je uzavřená množina obsahující stav i taková, že $C(i) - E \neq \emptyset$. Potom musí platit

$$\sum_{j \in E} p_{ij} = 1,$$

ale též podle věty 2.7

$$\sum_{j \in E} p_{ij}^{(n)} = 1 , \tag{2.4.5}$$

pro každé $n \geq 0$. Jelikož $C(i) - E \neq \emptyset$, existuje stav $l \in C(i) - E$. Pro něj však musí existovat $n > 0$ takové, že $p_{il}^{(n)} > 0$. Protože l není prvkem E je pro toto n

$$\sum_{j \in E} p_{ij}^{(n)} < \sum_{j \in E} p_{ij}^{(n)} + p_{il}^{(n)} \leq 1$$

což je spor s (2.4.5). Neexistuje proto žádná uzavřená množina E, která by byla vlastní podmnožinou C(i) a proto platí (2.4.4)

⊛

Věta 2.10: Nechť $i \in I$ je libovolný stav, potom

$$\overline{\{i\}} = \left\{ j : j \in I, \text{ ex. } n \geq 0 \text{ takové, že } p_{ij}^{(n)} > 0 \right\} = A(i), \tag{2.4.6}$$

t.j. uzávěr libovolného stavu i je množina všech stavů dosažitelných ze stavu i.

Důkaz: Dokážeme nejprve, že množina A(i) je uzavřená. Předpokládejme, že A(i) není uzavřená, t.j. existují $j \in A(i)$ a $k \in I - A(i)$ takové, že pro některé n je $p_{ij}^{(n)} > 0$ a $p_{jk} > 0$. Potom však podle (2.2.6)

$$p_{ik}^{(n+1)} \geq p_{ij}^{(n)} \; p_{jk} > 0$$

což je spor. Je proto A(i) uzavřená množina stavů obsahující stav i, neboť $p_{ii}^{(o)}$ podle definice je rovno 1.

Nechť E je libovolná uzavřená množina stavů obsahující stav i taková, že $E \subset A(i)$ a $A(i) - E \neq \emptyset$. Potom pro každé $n \geq 0$ musí dle věty 2.7 platit

$$\sum_{k \in E} p_{ik}^{(n)} = 1 \tag{2.4.7}$$

a současně pro každé $n \geq 0$.

$$\sum_{k \in A(i)} p_{ik}^{(n)} = 1 \tag{2.4.8}$$

Nechť $j \in A(i) - E$, potom existuje $n \geq 0$ takové, že

$$p_{ij}^{(n)} > 0$$

což je spor, protože podle (2.4.7) a (2.4.8) je pro toto n

$$\sum_{k \in A(i) - E} p_{ik}^{(n)} = 0.$$

Nemůže proto žádná taková uzavřená množina E existovat a proto platí (2.4.6).

⊛

Když nějaký stav $i \in I$ je takový, že $\{i\}$ je uzavřená množina stavů, tak i nazýváme absorbční stav.

Platí věta

Věta 2.11: Stav $i \in I$ je absorbční tehdy a jen tehdy, když $p_{ii} = 1$.

Důkaz tohoto tvrzení nebudeme provádět, neboť vyplývá přímo z definice uzavřené množiny stavů a definice absorbčního stavu.

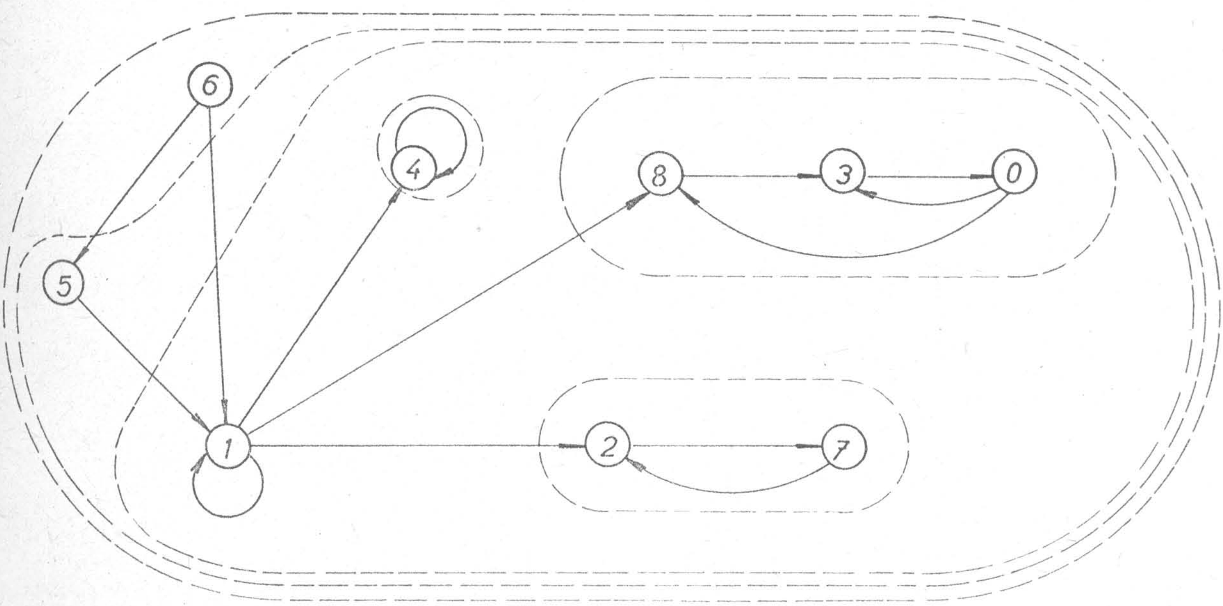
Příklad 2.5: Nechť $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je homogenní markovský řetězec z příkladu 2.3. Určete uzávěry jednotlivých stavů!

S použitím definice uzavřené množiny dostáváme, že uzávěrem stavu 0, t.j. $\{\overline{0}\} = C(0) = \{0, 3, 8\} = \{\overline{3}\} = \{\overline{8}\}$

Dále

$$\{\overline{1}\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 7, 8\}$$
$$\{\overline{2}\} = \{2, 7\} = \{\overline{7}\}$$
$$\{\overline{4}\} = \{4\}$$
$$\{\overline{5}\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$$
$$\{\overline{6}\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} = I.$$

V následujícím obrázku jsou vyznačeny všechny uzávěry odpovídající jednotlivým stavům.



OBR. 5.

Z uvedených vztahů vidíme, že stav 4 je absorbčním stavem. ⊛

Věta 2.12: Nechť $\{X(., t)\}_{t \in T}$ je homogenní markovský řetězec s množinou stavů I. Nechť $E \subset I$ je daná uzavřená množina stavů. Potom matice vytvořená z pravděpodobností přechodů mezi stavy z množiny E tvoří stochastickou matici.

Důkaz: Označme stavy tvořící množinu E symboly $i_1, i_2, \dots, i_M$, když množina E je konečná a jako posloupnost $i_1, i_2, \dots$ když E je spočetná. Nechť $\mathbb{P}$ je matice obsahující pouze pravděpodobnosti $p_{i_j i_k}$. Potom podle definice uzavřené množiny stavů musí platit pro každé $i_j \in E$

$$\sum_{i_k \in E} p_{i_j i_k} = 1;$$

neboli $\mathbb{P}$ je stochastická matice.

(*)

Jestliže stav $i \in I$ je sousledný sám se sebou, tak největší společný dělitel těch přirozených čísel $n \geq 1$, pro něž $p_{ii}^{(n)} > 0$ se nazývá periodou stavu i a označuje d_i. Stav $i \in I$ se potom nazývá periodický stav s periodou d_i.

Příklad 2.6: Ukažte, že pro homogenní markovský řetězec $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ z příkladu 2.3 je stav 2 periodický s periodou 2!

Jelikož

$$p_{27} = p_{72} = 1,$$

tak podle (2.2.5) je $p_{22} = 0$, $p_{22}^{(2)} = 1$, $p_{22}^{(3)} = 0$, $p_{22}^{(4)} = 1$ a obecně

$$p_{22}^{(2k)} = 1$$

a

$$p_{22}^{(2k+1)} = 0$$

pro $k = 0, 1, 2, \ldots$. Vidíme tedy, že perioda stavu 2 je největší společný dělitel čísel 2, 4, 6, ... neboli perioda stavu 2 je rovna 2.

Pro stav 7 podobně dostaneme, že je periodický též s periodou 2. (*)

Věta 2.13: Dva sousledné stavy i a $j \in I$ mají stejné periody.

Důkaz: Podle definice souslednosti dvou stavů plyne existence takových přirozených čísel n a m, že

$$p_{ij}^{(n)} > 0 \quad \text{a} \quad p_{ji}^{(m)} > 0.$$

Nechť r je takové, že $p_{ii}^{(r)} > 0$. Potom z (2.2.6) plyne

$$p_{jj}^{(n+m+r)} \geq p_{ji}^{(m)}\, p_{ii}^{(r)}\, p_{ij}^{(n)} > 0.$$

Vzhledem k tomu, že též $p_{ii}^{(2r)} > 0$, tak podobně

$$p_{jj}^{(n+m+2r)} > 0.$$

Musí tedy perioda stavu j, t.j. d_j být dělitelem jak $(n+m+r)$, tak též $(n+m+2r)$ a tedy d_j musí být dělitelem r. Při tom ovšem r je libovolný násobek periody d_i stavu i a proto d_j musí být dělitelem d_i.

Provedeme-li tutéž úvahu symetricky pro druhý stav dostaneme, že d_i musí být dělitelem d_j.

Odtud však už dostáváme tvrzení věty, neboť potom musí být $d_i = d_j$. (*)

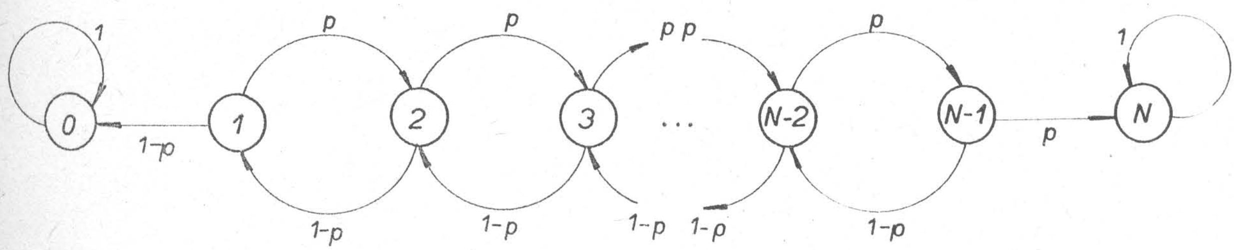
V závěru tohoto paragrafu si uvedeme ještě jeden příklad a to t. zv. náhodnou procházku s pohlcujícími mezemi.

Příklad 2.7: Nechť $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je homogenní markovský řetězec s množinou stavů $I = \{0, 1, \ldots, N\}$, jehož matice pravděpodobností přechodu je dána pomocí $\mathbb{P} = (p_{ij})$, kde

$$
\begin{array}{lllr}
p_{oo} = 1 & p_{oj} = 0 \text{ pro } j = 1, 2, \dots, N & & \\
p_{ij} = p & \text{pro } j = i + 1 & & \\
\quad = 1-p & \text{pro } j = i - 1 & i = 1,2,\dots,N-1 & (2.4.9) \\
\quad = 0 & \text{pro } j \neq i+1,\ i-1 & & \\
p_{NN} = 1 & p_{Nj} = 0 \text{ pro } j = 0,1,\dots,N-1. & &
\end{array}
$$

Proveďte rozbor stavů tohoto markovského řetězce!

Nebudeme zde podrobně provádět rozbor uvažovaného náhodného procesu a uvedeme jen závěry. Geometricky je možné tento markovský řetězec znázornit tak, jak je uvedeno na obr. 6.



OBR. 6.

Stavy tohoto procesu lze rozdělit na tři třídy a to $\{0\}$, $\{1,2,\dots,N-1\}$ a $\{N\}$. Stavy 1, 2, ..., N-1 jsou nepodstatné, stavy 0 a N podstatné; existují jen tři uzavřené množiny a to množina všech stavů I a $\{0\}$ a $\{N\}$. Při tom stavy 0 a N jsou absorbční stavy. Stavy 1, 2, ..., N-1 jsou zřejmě periodické s periodou 2.

(*)

2.5. Pravděpodobnosti prvního dosažení stavu j ze stavu i

V další části této kapitoly se budeme zabývati otázkou určení pravděpodobnosti prvého dosažení stavu j ze stavu i pro homogenní markovský řetězec $\{X(\cdot,t)\}_{t\in T}$. Předpokládejme, že v čase t byl náhodný proces $\{X(\cdot,t)\}_{t\in T}$ ve stavu i a hledejme pravděpodobnost, že z tohoto stavu i prvně dosáhne stav j právě po n krocích. Označme tuto pravděpodobnost $f_{ij}^{(n)}$. Máme tedy

$$
f_{ij}^{(n)} = P(\{\omega : X(\omega,t+k) \neq j,\ 0<k<n-1,\ X(\omega, t+n) = j\} / \{\omega : X(\omega,t) = i\}). \qquad (2.5.1)
$$

Tato pravděpodobnost pokud existuje nezávisí na t.

Označme dále

$$
f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}, \qquad (2.5.2)
$$

t.j. f_{ij} je pravděpodobnost, že homogenní markovský řetězec vycházející ze stavu i vůbec někdy dosáhne stav j.

Označme si pro fixované $t = 0, 1, 2, \ldots$ pro každé $j \in I$ symbolem A_k $k = 1,2, \ldots$ náhodný jev

$$A_k = \{\omega : X(\omega, t+k) = j\}. \qquad (2.5.3)$$

Potom zřejmě opačný jev $\bar{A}_k$ je roven $\{\omega : X(\omega, t+k) \neq j\}$ a

$$\Omega = A_1 \cup (\bar{A}_1 \cap A_2) \cup (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) \cup \ldots \cup (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_{k-1} \cap A_k) \cup$$

$$\cup (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_k), \qquad (2.5.4)$$

jak se dá lehce dokázat. Dostáváme proto

$$A_k = A_k \cap \Omega = (A_1 \cap A_k) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_k) \cup \ldots \cup (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_{k-1} \cap A_k),$$

při čemž toto sjednocení je sjednocením disjunktních množin. Potom ale

$$P(A_k / \{\omega : X(\omega,t)=i\}) = P(A_1 \cap A_k / \{\omega : X(\omega,t) = i\}) + \ldots +$$

$$+ \ldots + P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_{k-1} \cap A_k / \{\omega : X(\omega,t) = i\}). \qquad (2.5.5)$$

Jelikož

$$P(A_k / \{\omega : X(\omega,t) = i\}) = p_{ij}^{(k)} \qquad (2.5.6)$$

a pro každé $l < k$

$$P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_{l-1} \cap A_l \cap A_k / \{\omega : X(\omega,t) = i\}) =$$

$$= f_{ij}^{(l)} \, p_{jj}^{(k-l)}, \qquad (2.5.7)$$

tak celkově dostáváme z (2.5.5)

$$p_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^{k} f_{ij}^{(l)} \, p_{jj}^{(k-l)} \qquad (2.5.8)$$

neboli

$$f_{ij}^{(k)} = p_{ij}^{(k)} - \sum_{l=1}^{k-1} f_{ij}^{(l)} \, p_{jj}^{(k-l)}. \qquad (2.5.9)$$

Ve speciálním případě, když $j = i$ máme

$$f_{ii}^{(k)} = p_{ii}^{(k)} - \sum_{l=1}^{k-1} f_{ii}^{(l)} \, p_{ii}^{(k-l)}. \qquad (2.5.10)$$

Příklad 2.8: Uvažujme homogenní markovský řetězec $\{X(\cdot,t)\}_{t \in T}$ z příkladu 2.2. (Tento homogenní markovský řetězec odpovídá stavům 8, 3, 0 z příkladu 2.3, kde všechny nenulové pravděpodobnosti přechodu jsou 1/2 s výjimkou pravděpodobnosti přechodu p_{30}, která je rovna 1). Určete všechny pravděpodobnosti typu

$$f_{ij}^{(k)} \quad \text{a} \quad f_{ij}$$

pro $i, j \in I$ a $k = 1, 2, \ldots$.

Postupně dostáváme

$$f_{00}^{(1)} = p_{00} = 0$$

$$f_{00}^{(2)} = p_{03}p_{30} = \frac{1}{2} = p_{00}^{(2)}$$

$$f_{00}^{(3)} = (\tfrac{1}{2})^2 = p_{00}^{(3)} - (f_{00}^{(1)}\, p_{00}^{(2)} + f_{00}^{(2)}\, p_{00}^{(1)})$$

a obecně

$$f_{00}^{(k)} = (\tfrac{1}{2})^{k-1} \qquad k \geq 2$$

Úplně stejně se dokáže, že

$$f_{33}^{(k)} = 0 \quad \text{pro } k = 1$$
$$= (\tfrac{1}{2})^{k-1} \quad \text{pro } k \geq 2$$

$$f_{88}^{(k)} = 0 \quad \text{pro } k \text{ sudé}$$
$$= (\tfrac{1}{2})^{\frac{k+1}{2}} \quad \text{pro } k \text{ liché}$$

$$f_{03}^{(k)} = (\tfrac{1}{2})^{k} \qquad f_{08}^{(k)} = 0 \quad \text{pro } k \text{ sudé}$$
$$= (\tfrac{1}{2})^{\frac{k+1}{2}} \quad \text{pro } k \text{ liché}$$

$$f_{30}^{(k)} = 1 \quad \text{pro } k = 1 \qquad f_{38}^{(k)} = 0 \text{ pro } k \text{ liché}$$
$$= 0 \quad \text{pro } k \neq 1 \qquad = (\tfrac{1}{2})^{\frac{1}{2}} \text{ pro } k \text{ sudé}$$

$$f_{80}^{(k)} = 0 \quad \text{pro } k = 1 \qquad f_{83}^{(k)} = (\tfrac{1}{2})^{k}.$$
$$= (\tfrac{1}{2})^{k-1} \quad \text{pro } k \geq 2$$

Dále dostaneme, že pro všechna i a $j \in I$ je

$$f_{ij} = 1.$$

$\circledast$

Sečteme-li nyní vztah (2.5.8) pro $k = 1,2,\ldots,M$, tak dostáváme

$$\sum_{k=1}^{M} p_{ij}^{(k)} = \sum_{k=1}^{M} \sum_{l=1}^{k} f_{ij}^{(l)}\, p_{jj}^{(k-l)} \tag{2.5.11}$$

a po označení $k-l = u$ máme

$$\sum_{k=1}^{M} p_{ij}^{(k)} = \sum_{k=1}^{M} \sum_{u=0}^{k-1} f_{ij}^{(k-u)}\, p_{jj}^{(u)} \tag{2.5.12}$$

Přehodíme-li pořadí sčítání na pravé straně této rovnice a uvědomíme-li si, že $0 \leq u \leq k-1$ a $1 \leq k \leq M$, tak je $0 \leq u \leq M-1$ a $u+1 \leq k \leq M$. Máme proto

$$\sum_{k=1}^{M} p_{ij}^{(k)} = \sum_{u=0}^{M-1} p_{jj}^{(u)} \sum_{k=u+1}^{M} f_{ij}^{(k-u)} =$$

$$= \sum_{u=0}^{M-1} p_{jj}^{(u)} \sum_{k=1}^{M-u} f_{ij}^{(k)} \qquad (2.5.13)$$

Vyslovíme si nyní a dokážeme jeden tvar t. zv. Abelovy věty, která je velmi důležitá nejen v teorii náhodných procesů, ale v celé matematice.

Věta 2.14: Nechť a_n $n = 0, 1, 2, \ldots$ je posloupnost nezáporných reálných čísel, které vesměs nejsou rovny nule, pro kterou

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{\sum_{k=0}^{n} a_k} = 0. \qquad (2.5.14)$$

Potom pro každou posloupnost reálných čísel b_n $(n = 1,2,\ldots)$, které mají konečnou nebo nekonečnou limitu platí

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}}{\sum_{k=0}^{n} a_k} = \lim_{n \to \infty} b_n. \qquad (2.5.15)$$

Důkaz: Pro libovolné $N > 0$ z předpokladu (2.5.14) plyne, že

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=n-N+1}^{n} a_k}{\sum_{k=0}^{n} a_k} = 0. \qquad (2.5.16)$$

Předpokládejme nejprve, že $\lim_{n \to \infty} b_n = b < \infty$. Potom pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje index $N(\varepsilon)$ takový, že pro $n > N(\varepsilon)$ je

$$|b_n - b| < \varepsilon .$$

Proto existuje takové reálné číslo B, že pro všechna n $|b_n - b| \leq B$. Dále pro $n > N(\varepsilon)$ máme

$$\left| \sum_{k=0}^{n} a_k (b_{n-k} - b) \right| \leq \sum_{k=0}^{n-N(\varepsilon)} a_k . \varepsilon + B \sum_{k=n-N(\varepsilon)+1}^{n} a_k . \qquad (2.5.17)$$

Odtud potom dostáváme, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\sum_{k=0}^{n} a_k(b_{n-k} - b)\right|}{\sum_{k=0}^{n} a_k} \leq \varepsilon$$

podle (2.5.16). Protože $\varepsilon > 0$ je libovolné, tak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}}{\sum_{k=0}^{n} a_k} = b.$$

Je-li $b = +\infty$, tak pro každé $M > 0$ existuje $N(M)$ takové, že $b_n \geq M$ pro $n \geq N(M)$. Potom

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n-N(M)} a_k\, b_{n-k} + \sum_{k=n-N(M)+1}^{n} a_k\, b_{n-k} \geq$$

$$\geq M \sum_{k=0}^{n-N(M)} a_k + \sum_{k=n-N(M)+1}^{n} a_k \cdot \min_{0<l<N(M)} b_l$$

a

$$\frac{\sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}}{\sum_{k=0}^{n} a_k} \geq M \frac{\sum_{k=0}^{n-N(M)} a_k}{\sum_{k=0}^{n} a_k} + \min_{0\leq l\leq N(M)} b_l \frac{\sum_{k=n-N(M)+1}^{n} a_k}{\sum_{k=0}^{n} a_k}.$$

Použijeme-li opět (2.5.16), tak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}}{\sum_{k=0}^{n} a_k} \geq M.$$

Ale M je libovolné, proto i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}}{\sum_{k=0}^{n} a_k} = \infty = \lim_{n\to\infty} b_n$$

*

Předpoklady věty 2.14 jsou splněny, když na příklad $\sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty$ nebo když $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty$ a existuje konstanta A taková, že $a_k \leq A$ pro každé k.

Použijeme nyní větu 2.14 na vztah (2.5.13). Jelikož $\sum_{u=0}^{\infty} p_{jj}^{(u)}$ je buď konečná nebo nekonečná, ale vždy $p_{jj}^{(u)} \leq 1$, tak podle výše uvedené poznámky jsou splněny podmínky věty 2.14 položíme-li

$$n = M - 1 , \quad a_u = p_{jj}^{(u)} , \quad b_{n-u} = \sum_{k=0}^{n-u} f_{ij}^{(k+1)}$$

Potom podle věty 2.14

$$\lim_{M\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{M} p_{ij}^{(k)}}{\sum_{u=0}^{M-1} p_{jj}^{(u)}} = \lim_{M\to\infty} \frac{\sum_{u=0}^{M-1} p_{jj}^{(u)} \sum_{k=1}^{M-u} f_{ij}^{(k)}}{\sum_{u=0}^{M-1} p_{jj}^{(u)}} = \lim_{M\to\infty} \sum_{k=0}^{M} f_{ij}^{(k+1)} \tag{2.5.18}$$

neboli

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} p_{ij}^{(k)}}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} p_{jj}^{(k)}} \tag{2.5.19}$$

a tedy též

$$f_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} p_{ij}^{(k)}}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} p_{jj}^{(k)}} \tag{2.5.20}$$

2.6. Trvalé a přechodné stavy

V tomto paragrafu provedeme další klasifikaci stavů homogenního markovského procesu, kterou v následujícím paragrafu budeme využívat pro limitní vlastnosti pravděpodobností přechodu. Budou uvedeny pouze obecné věty pro jednotlivé typy stavů a jejich charakterizace.

Řekneme, že stav $i \in I$ je trvalý, když

$$f_{ii} = 1 , \tag{2.6.1}$$

t.j. když s pravděpodobností 1 se homogenní markovský řetězec vycházející ze stavu i do stavu i opět vrátí. Stav $i \in I$ se nazývá přechodný, když

$$f_{ii} < 1 \tag{2.6.2}$$

Příklad 2.9: Pro homogenní markovský řetězec $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ z příkladu 2.2 uvažovaný též v příkladu 2.8 dokažte, že všechny stavy jsou trvalé.

Tvrzení uvedené v tomto příkladu plyne bezprostředně z výsledků příkladu 2.8, kde bylo dokázáno, že pro uvažovaný proces $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ platí $f_{ij} = 1$ pro každé $i, j \in I$ a tedy též $f_{ii} = 1$ pro každé $i \in I$. Jsou tedy dle (2.6.1) všechny stavy trvalé.

⊛

Nechť $i \in I$ je trvalý stav homogenního markovského řetězce $\{X(.,t)\}_{t \in T}$. Označme $\xi_i(.)$ náhodnou proměnnou, která je definována jako počet kroků do prvního návratu do stavu i, když na počátku pro t = 0 byl náhodný proces $\{X(.,t)\}_{t\in T}$ ve stavu i, t.j.

$$\xi_i(.) = k \quad \text{když} \quad X(.,0) = i, \quad X(.,t) \neq i \text{ pro } t = 1,2,\ldots,k-1$$
$$\text{a} \quad X(.,k) = i. \tag{2.6.3}$$

Potom zřejmě

$$P(\{\omega : \xi_i(\omega) = k\}) = f_{ii}^{(k)}. \tag{2.6.4}$$

Jestliže střední hodnota náhodné proměnné $\xi_i(.)$ je konečná, nazveme trvalý stav i stavem trvalým nenulovým a je-li tato střední hodnota nekonečná, tak stav i nazýváme trvalým nulovým.

Trvalý stav $i \in I$ je tedy trvalým nenulovým, když

$$E[\xi_i(.)] = \sum_{k=1}^{\infty} k f_{ii}^{(k)} < \infty \tag{2.6.5}$$

a trvalým nulovým, když

$$E[\xi_i(.)] = \sum_{k=1}^{\infty} k f_{ii}^{(k)} = \infty . \tag{2.6.6}$$

Nenulový trvalý stav, který není periodický se nazývá ergodický.

Věta 2.15: Každý trvalý stav homogenního markovského řetězce $\{X(.,t)\}_{t\in T}$ je podstatný.

Důkaz: Když stav $i \in I$ je trvalý, tak $f_{ii} = 1$. Předpokládejme, že není podstatný. Potom existuje stav $j \in I$ a nezáporné celé číslo n takové, že $p_{ij}^{(n)} > 0$ a pro každé nezáporné celé číslo m je $p_{ji}^{(m)} = 0$. Nechť n_0 je nejmenších z těch n, pro něž $p_{ij}^{(n)} > 0$, t.j.

$$n_0 = \min\{n : p_{ij}^{(n)} > 0\}.$$

Nechť $\xi_i(.)$ je náhodná proměnná definovaná vztahem (2,6,3). Potom

$$f_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} P(\{\omega : \xi_i(\omega) = n\}) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} P(\{\omega : \xi_i(\omega) \leq k\}) = \tag{2.6.7}$$

$$= 1 - \lim_{k\to\infty} P(\{\omega : \xi_i(\omega) > k\})$$

Podle předpokladu však s kladnou pravděpodobností přejde systém po n_0 krocích ze stavu i do stavu j, odkud však je už nikdy nemůže vrátit. Potom tedy pro každé $k > n_0$ musí platit

$$P(\{\omega : \xi_i(\omega) > k\}) \geq p_{ij}^{(n_0)} > 0$$

a proto též

$$\lim_{k\to\infty} P(\{\omega : \xi_i(\omega) > k\}) \geq p_{ij}^{(n_o)} > 0. \qquad (2,6.8)$$

Dosazením do (2.6.7) dostáváme

$$f_{ii} \leq 1 - p_{ij}^{(n_o)} < 1,$$

což je spor s předpokladem, že stav i je trvalý. Je proto stav i podstatný.

(*)

V následujícím příkladu bude ukázáno, že pro homogenní markovský řetězec $\{X(.,t)\}_{t\in T}$ může existovat podstatný stav, který však není trvalý.

Příklad 2.10. Nechť $\{X(.,t)\}_{t\in T}$ je homogenní markovský řetězec s množinou stavů $I = \{0, 1, 2, \dots\}$ a s maticí pravděpodobností přechodu $\mathbb{P} = (p_{ij})$, kde

$$\begin{aligned} p_{ij} &= \alpha_i && \text{pro } j = i + 1 \\ &= 1-\alpha_i && \text{pro } j = 0 \qquad i = 0, 1, 2, \dots \\ &= 0 && \text{pro } j\neq 0,\ j\neq i+1 \end{aligned} \qquad (2.6.9)$$

a posloupnost kladných čísel $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ je taková, že

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} \alpha_k = \alpha > 0 \qquad (2.6.10)$$

Taková posloupnost kladných čísel existuje, jak je známo z matematické analýzy.

Dokažte, že stav 0 je podstatný, ale ne trvalý!

Každý stav je dosažitelný ze stavu 0, neboť pro každé $i \in I$ existuje $n = i$ takové, že $p_{oi}^{(n)} > 0$, neboť $p_{oi}^{(n)} = \alpha_o\alpha_1 \cdots \alpha_{i-1} > 0$ a z každého stavu $i \in I$ je dosažitelný stav 0, neboť $p_{io} = 1 - \alpha_i > 0$.

Potom zřejmě pro všechna k = 2, 3, ...

$$f_{oo}^{(k)} = \alpha_o\alpha_1 \dots \alpha_{k-2}(1 - \alpha_{k-1}).$$

a

$$f_{oo} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{oo}^{(k)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_o\alpha_1 \cdots \alpha_{k-2}(1 - \alpha_{k-1}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\alpha_o - \alpha_o\alpha_1 \cdots \alpha_{k-1}\right] = \alpha_o - \alpha < \alpha_o < 1$$

a tedy stav 0 je přechodný stav.

(*)

Věta 2.16: Stav $j \in I$ lze dosáhnout ze stavu $i \in I$ tehdy a jen tehdy, když

$$f_{ij} > 0. \qquad (2.6.11)$$

Důkaz: Když $f_{ij} > 0$, tak existuje $n \geq 1$ takové, že $f_{ij}^{(n)} > 0$. Vzhledem k (2.5.9) je

$$f_{ij}^{(n)} \leq p_{ij}^{(n)}$$

a proto při platnosti (2.6.11) je možno dosáhnout ze stavu i stav j.

Nechť naopak stav j lze dosáhnout ze stavu i, t.j. existuje n takové, že

$$p_{ij}^{(n)} > 0.$$

Nechť $n_o = \min \left\{ n: p_{ij}^{(n)} > 0 \right\}$. Potom ale

$$f_{ij} \geq f_{ij}^{(n_o)} = p_{ij}^{(n_o)} > 0$$

a tedy platí (2.6.11).

⊛

Věta 2.17: Nechť $i \in I$ je trvalý stav a nechť $j \in I$ lze dosáhnout z i. Potom i a j jsou sousledné stavy.

Důkaz: Musíme dokázat, že ze stavu $j \neq i$ lze dosáhnout stav i. Nechť n_o je takové nejmenší přirozené číslo, že

$$p_{ij}^{(n_o)} > 0 \tag{2,6.12}$$

a předpokládejme, že ze stavu j nelze dosáhnout stav i.
Potom

$$\begin{aligned} 1 - f_{ii} &= P\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \left\{ \omega : X(\omega, t+m) \neq i \right\} / \left\{ \omega : X(\omega, t) = i \right\}\right) \geq \\ &\geq P\left(\left\{ \omega : X(\omega, t+n_o) = j \right\} / \left\{ \omega : X(\omega, t) = i \right\}\right) - \\ &- P\left(\left\{ \omega : X(\omega, t+n_o) = j \right\} \cap \bigcup_{m=1}^{\infty} \left\{ \omega : X(\omega, t+m) = i \right\} / \left\{ \omega : X(\omega, t) = i \right\}\right). \end{aligned} \tag{2.6.13}$$

Pro každé $m < n_o$ je podle (2.6.12)

$$P\left(\left\{ \omega : X(\omega, t+n_o) = j \right\} \cap \left\{ \omega : X(\omega, t+m) = i \right\} / \left\{ \omega : X(\omega, t) = i \right\}\right) =$$

$$= p_{ii}^{(m)} \cdot p_{ij}^{(n_o-m)} = 0.$$

Pro $m > n_o$ je podle předpokladu, že stav i nelze dosáhnout z j

$$P\left(\left\{ \omega : X(\omega, t+n_o) = j \right\} \cap \left\{ \omega : X(\omega, t+m) = i \right\} / \left\{ \omega : X(\omega, t) = i \right\}\right) =$$

$$= p_{ij}^{(n_o)} \cdot p_{ji}^{(m-n_o)} = 0.$$

Pro $m = n_o$ jsou množiny $\left\{ \omega : X(\omega, t+n_o) = j \right\}$ a $\left\{ \omega : X(\omega, t+n_o) = i \right\}$ disjunktní a tedy též

$$P\left(\left\{ \omega : X(\omega, t+n_o) = j \right\} \cap \left\{ \omega : X(\omega, t+n_o) = i \right\} / \left\{ \omega : X(\omega, t) = i \right\}\right) = 0.$$

Celkem tedy dostáváme ze vztahu (2.6.13)

$$1 - f_{ii} \geq p_{ij}^{(n_o)} > 0$$

neboli

$$f_{ii} < 1$$

což je spor, protože i je trvalý stav. Je tedy stav i dosažitelný ze stavu j a proto stavy i a j jsou sousledné.

(*)

Ukážeme si nyní, jak lze použít vztah (2.5.20) k charakterizaci typu stavu homogenního markovského řetězce. Uvedeme si nejprve vztah (2,5.20) ve speciálním tvaru pro j = i. Máme pak

$$f_{ii} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}^{(k)}}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}^{(k)}} \tag{2.6.14}$$

Věta 2.18: Stav $i \in I$ je přechodný tehdy a jen tehdy, když

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}^{(k)} < \infty . \tag{2.6.15}$$

Důkaz: Je-li stav i přechodný, tak podle (2.6.2) je

$$f_{ii} < 1$$

a tedy dle (2.6.14)

$$\frac{\sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}^{(k)}}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}^{(k)}} < 1. \tag{2.6.16}$$

Proto musí být

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}^{(k)} < \infty ,$$

neboť v opačném případě by byl podíl (2.6.16) roven 1, což vede ke sporu.

Když naopak platí (2.6.15), tak

$$f_{ii} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}^{(k)}}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}^{(k)}} < 1$$

a tedy stav i je přechodný.

(*)

Věta 2.19: Stav $i \in I$ je trvalý tehdy a jen tehdy, když

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}^{(k)} = \infty \tag{2.6.17}$$

Důkaz této věty bezprostředně vyplývá z věty 2.18.

Věta 2.20: Nechť $i \in I$ je přechodný stav. Potom pro každý stav $j \in I$ je

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{ji}^{(k)} < \infty \, . \tag{2.6.18}$$

Důkaz: Podle (2.5.20) je pro každé i a $j \in I$

$$f_{ji} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} p_{ji}^{(k)}}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}^{(k)}}$$

Ale podle předpokladu i je přechodný stav a proto dle věty 2.18 je

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}^{(k)} < \infty \, .$$

Proto musí být

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{ji}^{(k)} \leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}^{(k)} < \infty ,$$

neboť f_{ji} nemůže, jako pravděpodobnost, překročit 1. ⊛

Věta 2.21: Nechť $i \in I$ je trvalý stav. Potom pro každý stav $j \in I$, z něhož lze dosáhnout stav i platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{ji}^{(k)} = \infty \tag{2.6.19}$$

a pro každý stav $j \in I$, z něhož nelze dosáhnout stav i platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{ji}^{(k)} = 0. \tag{2.6.20}$$

Důkaz: Když stav j je takový, že z něho lze dosáhnout trvalý stav i, tak podle (2.5.20) a věty 2.16

$$f_{ji} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} p_{ji}^{(k)}}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}^{(k)}} > 0. \tag{2.6.21}$$

Ale $\sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}^{(k)} = \infty$, neboť stav i je trvalý, což plyne z věty 2.19.

Proto musí být též

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{ji}^{(k)} = \infty$$

neboť v opačném případě by ve vztahu (2.6.21) platilo $f_{ji} = 0$, což je spor.

Když ze stavu $j \in I$ nelze dosáhnout stav i, tak pro každé k je

$$p_{ji}^{(k)} = 0$$

a tedy triviálně platí (2.6.20). ⊛

Věta 2.22: Nechť $i \in I$ je trvalý stav a nechť stav $j \in I$ lze dosáhnout z i. Potom j je trvalý stav.

Důkaz: Podle věty 2.17 existují přirozená čísla n a m taková, že

$$p_{ij}^{(n)} = \alpha > 0 \quad \text{a} \quad p_{ji}^{(m)} = \beta > 0.$$

Potom pro každé přirozené číslo k podle (2.2.6)

$$p_{jj}^{(k+n+m)} \geq p_{ji}^{(m)} \; p_{ii}^{(k)} \; p_{ij}^{(n)} = \alpha\beta p_{ii}^{(k)} ,$$

a tedy, vzhledem k tomu, že stav i je trvalý máme

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{jj}^{(k)} \geq \sum_{k=1}^{\infty} p_{jj}^{(k+n+m)} \geq \alpha\beta \sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}^{(k)} = \infty , \qquad (2.6.22)$$

t.j. stav j je podle věty 2.19 též trvalý. ⊛

Z právě dokázané věty vyplývá spolu s větou 2.17, že všechny stavy patřící do třídy C(i) odpovídající trvalému stavu i jsou všechny trvalé.

Následující dva příklady nám ukazují, že periodický stav může být jak trvalý, tak i přechodný a tedy není možné vyslovit obecnou větu, která by porovnávala oba tyto pojmy.

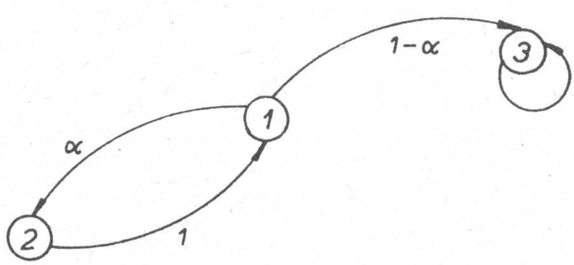
Příklad 2.11: Nechť $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je homogenní markovský řetězec uvažovaný v příkladu 2.6. Ukažte, že stav 2, který je periodický s periodou 2 je trvalým stavem!

Podle řešení příkladu 2.6 dostáváme, že $p_{22}^{(2k)} = 1$ a $p_{22}^{(2k+1)} = 0$. Potom též

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{22}^{(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} p_{22}^{(2k)} = \infty$$

a tedy dle věty 2.19 stav 2 je trvalý. ⊛

Příklad 2.12: Nechť $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je homogenní markovský řetězec, jehož geometrické znázornění je na obr. 7, kde $0 < \alpha < 1$



OBR. 7.

je pravděpodobnost přechodu ze stavu 1 do stavu 2. Dokažte, že stav 1 je periodický s periodou 2 a přitom je přechodný!

Z obr. 7 ihned plyne, že $p_{11}^{(2k)} = \alpha^k$ a $p_{11}^{(2k+1)} = 0$ pro všechna k = 0, 1, ...

Je tedy stav 1 periodický s periodou 2.

Dále však

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{11}^{(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} p_{11}^{(2k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k = \frac{\alpha}{1-\alpha} < \infty$$

a tedy dle věty 2.18 je stav 1 přechodný. ⊛

V další části tohoto paragrafu si uvedeme některá tvrzení týkající se trvalých stavů nulových a nenulových. Nejprve si uvedeme příklady na nulové a nenulové stavy.

Příklad 2.13: Nechť $\{X(.,t)\}_{t\in T}$ je homogenní markovský řetězec z příkladu 2.2. Dokažte, že všechny stavy jsou trvalé nenulové!

Podle výsledků z příkladu 2.9 jsou všechny stavy trvalé. Podle příkladu 2.8 dostáváme

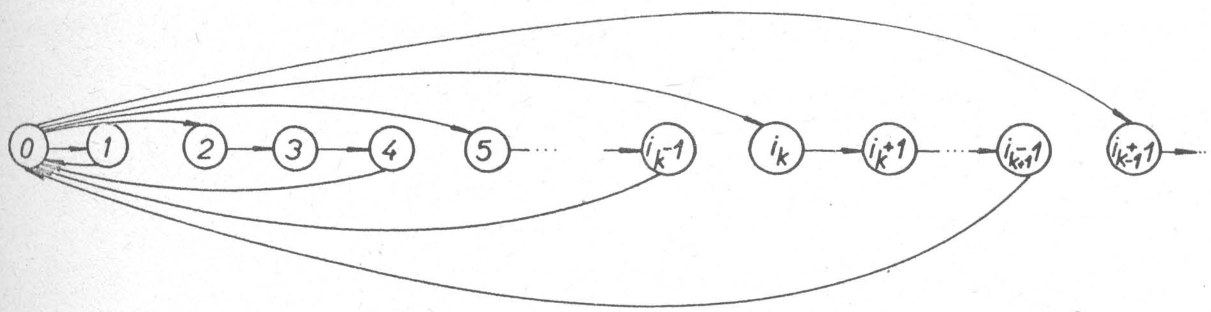
$$\sum_{k=1}^{\infty} k\, f_{00}^{(k)} = \sum_{k=2}^{\infty} k \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k-1} = 3$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\, f_{33}^{(k)} = \sum_{k=2}^{\infty} k \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k-1} = 3$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\, f_{88}^{(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1) \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k} = 3$$

a tedy všechny stavy jsou nenulové. ⊛

Příklad 2.14: Nechť $\{X(.,t)\}_{t\in T}$ je homogenní markovský řetězec s množinou stavů $I=\{0,1,2,\dots\}$, jehož geometrické znázornění je na obr. 8.



OBR. 8.

Přitom
$$i_1 = 0$$
$$i_k = i_{k-1} + 2^{k-1} - 1 \qquad k = 2,3,\dots$$

a
$$p_{0i_k} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^k \qquad p_{i_k-1\,0} = 1$$

$$p_{i\,i+1} = 1 \quad \text{když pro} \quad i_k \le i < i_{k+1} - 1$$

Potom stav 0 je trvalý nulový, neboť
$$f_{00}^{(2^k)} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^k \qquad f_{00}^{(k)} = 0 \ \text{ pro ostatní } k$$

a tedy
$$f_{00} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{00}^{(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{00}^{(2^k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^k = 1$$

Přitom
$$\sum_{k=1}^{\infty} k f_{00}^{(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \left(\tfrac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty .$$
(*)

Dříve než přistoupíme k důkazům některých tvrzení, zavedeme si následující označení. Pro každé $k = 0,1,2,\ldots$ a libovolné dva stavy $i,j \in I$ označme
$$r_k(i,j) = \sum_{l=k+1}^{\infty} f_{ij}^{(l)} \tag{2.6.23}$$
Potom zřejmě
$$\sum_{k=0}^{\infty} r_k(i,j) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} r_k(i,j) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} k\, f_{ij}^{(k)} + n \sum_{k=n+1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} \right], \tag{2.6.24}$$
a
$$r_k(i,j) \leq 1 \text{ pro každé } k \text{ a } i,j \in I. \tag{2.6.25}$$
Speciálně pro $i = j$ dostáváme
$$\sum_{k=0}^{\infty} r_k(i,i) = \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} k\, f_{ii}^{(k)} + n \sum_{k=n+1}^{\infty} f_{ii}^{(k)} \right]. \tag{2.6.26}$$
Jestliže nyní i je trvalý stav, tak v případě, že je trvalý nenulový, tak řada
$$\sum_{k=0}^{\infty} r_k(i,i) < \infty \quad \text{a} \quad \sum_{k=0}^{\infty} r_k(i,i) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, f_{ii}^{(k)} \tag{2.6.27}$$
a když je trvalý nenulový, tak
$$\sum_{k=0}^{\infty} r_k(i,i) = \infty \tag{2.6.28}$$
a přitom vždy platí (2.6.25).

Věta 2.23: Nechť $i \in I$ je trvalý stav nenulový, neperiodický. Potom
$$\lim_{k\to\infty} p_{ii}^{(k)} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} k\, f_{ii}^{(k)}} \tag{2.6.29}$$
Důkaz: Podle označení (2.6.23) je pro každé $l \geq 1$
$$r_l(i,i) - r_{l-1}(i,i) = - f_{ii}^{(l)}$$
a tedy podle (2.5.8) pro každé $k \geq 1$
$$p_{ii}^{(k)} = - \sum_{l=1}^{k} (r_l(i,i) - r_{l-1}(i,i)\, p_{ii}^{(k-l)}$$

neboli

$$\sum_{l=0}^{k} r_l(i,i)p_{ii}^{(k-l)} = \sum_{l=1}^{k} r_{l-1}(i,i)p_{ii}^{(k-l)} = \sum_{l=0}^{k-1} r_l(i,i)p_{ii}^{(k-1-l)}$$

Odkud vidíme, že pro každé $k \geq 1$ součet

$$\sum_{l=0}^{k} r_l(i,i)\, p_{ii}^{(k-l)}$$

je konstantní a nezávisí na k. Jelikož podle předpokladu je stav i trvalý, tak

$$1 = f_{ii} = \sum_{k=1} f_{ii}^{(k)} = r_o(i,i)$$

a tedy pro každé $k \geq 1$ je

$$\sum_{l=0}^{k} r_l(i,i)\, p_{ii}^{(k-l)} = 1 \qquad (2.6.30)$$

Navíc však je stav i nenulový a proto dle (2.6.27) platí, že jsou splněny předpoklady věty 2.14 a tedy vzhledem k předpokladu, že stav i není periodický $\lim_{k\to\infty} p_{ii}^{(k)}$ existuje a

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sum_{l=0}^{k} r_l(i,i)\, p_{ii}^{(k-l)}}{\sum_{l=0}^{k} r_l(i,i)} = \lim_{k\to\infty} p_{ii}^{(k)} \qquad (2.6.31)$$

Ale podle (2.6.27) a (2.6.30) máme odtud

$$\lim_{k\to\infty} p_{ii}^{(k)} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} k f_{ii}^{(k)}} \qquad (*)$$

Věta 2.24: Stav $i \in I$ je trvalý nulový tehdy a jen tehdy, když

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}^{(k)} = \infty \qquad a \qquad p_{ii}^{(k)} \to 0 \quad \text{pro } k \to \infty \qquad (2.6.32)$$

Důkaz: Nechť $i \in I$ je trvalý stav nulový, potom podle věty 2.19 $\sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}^{(k)} = \infty$.
Jelikož podle předpokladu je i nulový, tak dle (2.6.28) a (2.6.5) platí, že jsou splněny předpoklady věty 2.14. Podobně jako při odvození vztahu (2.6.31) dostáváme, že existuje $\lim_{k\to\infty} p_{ii}^{(k)}$, která je rovna

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sum_{l=0}^{k} r_l(i,i)\, p_{ii}^{(k-l)}}{\sum_{l=0}^{k} r_l(i,i)} = \frac{1}{\lim_{k\to\infty} \sum_{l=1}^{k} l f_{ii}^{(l)}} = 0, \qquad (2.6.33)$$

neboť stav i je nulový.

Nechť naopak platí podmínky věty, t.j. (2.6.32). Potom stav i je dle věty 2.19 trvalý a musí platit

$$\frac{1}{\lim\limits_{k\to 0} \sum\limits_{l=1}^{k} l f_{ii}^{(l)}} = 0$$

neboli stav i musí být nulový.

Věta 2.25. Nechť stav $i \in I$ je trvalý, nenulový a periodický s periodou d_i. Potom

$$\lim_{k\to\infty} p_{ii}^{(kd_i)} = \frac{d_i}{\sum\limits_{l=1}^{\infty} l f_{ii}^{(l)}} \qquad (2.6.34)$$

Důkaz: Nechť $i \in I$ je trvalý stav s periodou d_i. Potom existuje $\lim\limits_{k\to\infty} p_{ii}^{(kd_i)}$, kterou označíme λ a musí být $\lambda > 0$. Podle důkazu věty 2.23, který ze začátku můžeme aplikovat i v tomto případě dostaneme, že

$$\lambda = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} r_{kd_i}(i,i)},$$

neboť řada ve jmenovateli konverguje podle předpokladu, že stav i je trvalý nenulový.

Ale vzhledem k tomu, že stav i je periodický, tak $f_{ii}^{(k)} = 0$ pro k, které není násobkem periody d_i. Potom též

$$r_{kd_i}^{(i,i)} = \sum_{l=kd_i+1} f_{ii}^{(l)} = \sum_{l=1}^{\infty} f_{ii}^{(k+l)d_i}$$

a

$$\sum_{l=kd_i}^{(k+1)d_i-1} r_j(i,i) = d_i \sum_{l=1}^{\infty} f_{ii}^{(k+l)d_i}.$$

Odtud potom dostáváme

$$r_{kd_i}(i,i) = \frac{1}{d_i} \sum_{l=kd_i}^{(k+1)d_i-1} r_l(i,i)$$

neboli

$$\sum_{k=0}^{\infty} r_{kd_i}(i,i) = \frac{1}{d_i} \sum_{l=0}^{\infty} r_l(i,i).$$

Celkově tedy máme

$$\lim_{k\to\infty} p_{ii}^{(kd_i)} = \lambda = \lim_{k\to\infty} \frac{\sum\limits_{l=0}^{k} r_{ld_i}(i,i) p_{ii}^{(k-l)d_i}}{\sum\limits_{l=0}^{k} r_{ld_i}(i,i)} = \frac{1}{\frac{1}{d_i}\sum\limits_{l=0}^{\infty} r_l(i,i)} =$$

$$= \frac{d_i}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\, f_{ii}^{(k)}}$$

(*)

Věta 2.26. Nechť stav $i \in I$ je trvalý neperiodický. Potom pro každé $j \in I$ je

$$\lim_{k\to\infty} p_{ji}^{(k)} = f_{ji} \lim_{k\to\infty} p_{ii}^{(k)} .$$

Důkaz: Když ze stavu j nelze dosáhnout stav i, tak pro každé k je $p_{ji}^{(k)} = 0$ a také $f_{ji} = 0$ podle věty 2.16 a tedy tvrzení triviálně platí. Když $j=i$ a platí $f_{ii} = 1$, není co dokazovat. Když $j \neq i$ a ze stavu j lze dosáhnout stav i tak $f_{ji} = 1$. Pro každé $k \geqslant 1$ platí dle (2.5.8)

$$p_{ji}^{(k)} = \sum_{l=1}^{k} f_{ji}^{(l)}\, p_{ii}^{(k-l)} . \qquad (2.6.35)$$

Vzhledem k tomu, že $f_{ji} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_{ji}^{(k)} = 1$, tak

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f_{ji}^{(k)}}{\sum\limits_{l=1}^{k} f_{ji}^{(l)}} = 0$$

a tedy podle věty 2.14, kterou můžeme použít uvědomíme-li si, že $f_{ji}^{(o)} = 0$ a stav i je neperiodický, máme s použitím (2.6.35)

$$\lim_{k\to\infty} p_{ji}^{(k)} = \lim_{k\to\infty} \frac{p_{ji}^{(k)}}{\sum\limits_{l=0}^{k} f_{ji}^{(l)}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sum\limits_{l=0}^{k} f_{ji}^{(l)}\, p_{ii}^{(k-l)}}{\sum\limits_{l=0}^{k} f_{ji}^{(l)}} = \lim_{k\to\infty} p_{ii}^{(k)} .$$

(*)

Věta 2.27. Nechť $i \in I$ je trvalý stav nulový a nechť stav $j \in I$ lze dosáhnout z i. Potom j je trvalý stav nulový.

Důkaz: Podle věty 2.22 je stav j trvalý a podle věty 2.17 existují přirozená čísla n a m taková, že

$$p_{ij}^{(m)} > 0 \qquad p_{ji}^{(n)} > 0 ,$$

a tedy pro každé přirozené číslo k podle (2.2.6)

$$p_{ii}^{(k+n+m)} \geq p_{ij}^{(m)}\, p_{jj}^{(k)}\, p_{ji}^{(n)} \geq 0 \tag{2.6.36}$$

Vzhledem k tomu, že stav i je trvalý, nulový, tak podle věty 2.24 $\lim\limits_{k\to\infty} p_{ii}^{(k)} = 0$ a tedy z (2.6.36)

$$0 = \lim_{k\to\infty} p_{ii}^{(k+n+m)} \geq p_{ij}^{(m)}\, p_{ji}^{(n)} \lim_{k\to\infty} p_{jj}^{(k)} \geq 0$$

neboli podle téže věty je stav j trvalý nulový.

⊛

Věta 2.28. Pro každý homogenní markovský řetězec existuje pro každé $i \in I$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_{ii}^{(k)} \tag{2.6.37}$$

Důkaz: Když stav $i \in I$ je přechodný, tak dle (2.6.15) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_{ii}^{(k)} < \infty$ a tedy limita (2.6.37) je rovna 0.

Když stav $i \in I$ je trvalý nulový, tak podle (2.6.32) $\lim\limits_{k\to\infty} p_{ii}^{(k)} = 0$ a tedy dle známé věty z matematiky též

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_{ii}^{(k)} = 0.$$

Když stav $i \in I$ je trvalý nenulový neperiodický, tak podle (2,6,29)

$$\lim_{k\to\infty} p_{ii}^{(k)} = \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\, f_{ii}^{(k)}}$$

a tedy též

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_{ii}^{(k)} = \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\, f_{ii}^{(k)}}$$

Když stav $i \in I$ je trvalý nenulový periodický, tak podle (2.6.34)

$$\lim_{k\to\infty} p_{ii}^{(kd_i)} = \frac{d_i}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\, f_{ii}^{(k)}}$$

a tedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_{ii}^{(k)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nd_i} \sum_{k=1}^{n} p_{ii}^{(kd_i)} =$$

$$= \frac{1}{d_i} \lim_{k\to\infty} p_{ii}^{(kd_i)} = \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\, f_{ii}^{(k)}}$$

⊛

V závěru tohoto paragrafu si uvedeme přehlednou tabulku, která shrnuje některé výsledky uvedené ve větách tohoto paragrafu.

	PŘECHODNÝ STAV	TRVALÝ STAV			
		NENULOVÝ		NULOVÝ	
		PERIODICKÝ	NEPERIODICKÝ	PERIODICKÝ	NEPERIODICKÝ
$\sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}^{(k)}$	$< \infty$	∞	∞	∞	∞
$\lim_{k \to \infty} p_{ii}^{(k)}$	0	$d_i \mu_i^{-1}$	μ_i^{-1}	0	0

kde $\mu_i = \sum_{k=1}^{\infty} k f_{ii}^{(k)}$.

2.7. Nerozložitelné markovské řetězce

V tomto paragrafu se budeme zabývat otázkami aplikací výsledků paragrafu 2,6. na markovské řetězce a to s konečným nebo spočetným počtem stavů.

Nechť $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je homogenní markovský řetězec s množinou stavů I. Řekneme, že $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je nerozložitelný, když v něm neexistuje žádná jiná uzavřená množina stavů kromě množiny všech stavů I.

Příkladem nerozložitelného homogenního markovského řetězce je na příklad příklad 2.2, zatímco v příkladu 2.3 uvažovaný homogenní markovský řetězec není nerozložitelný.

Věta 2.29: Homogenní markovský řetězec $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je nerozložitelný tehdy a jen tehdy, když každý jeho stav může být dosažen z libovolného jiného stavu.

Důkaz: Nechť i,j jsou libovolné dva stavy z I. Podle předpokladu nerozložitelnosti a podle věty 2.10 $j \in \overline{\{i\}}$ a tedy existuje $n \geq 0$ takové, že

$$p_{ij}^{(n)} > 0. \tag{2.6.37}$$

Nechť naopak pro každé $i,j \in I$ existuje $n \geq 0$ takové, že $p_{ij}^{(n)} > 0$. Předpokládejme, že $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ není nerozložitelný. Pak existuje neprázdná uzavřená množina E a stavy i, j takové, že

$$\overline{\{i\}} \subset E, \qquad j \in I - E$$

a

$$p_{ij}^{(n)} = 0 \text{ pro každé } n \geq 0.$$

Dostali jsme tak spor, protože platí (2.6.37) pro každé $n \geq 0$. ⊛

Věta 2.30. V nerozložitelném markovském řetězci $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ s množinou stavů I jsou všechny stavy stejného typu: buď jsou všechny přechodné, trvalé nulové nebo trvalé nenulové. V každém případě mají stejnou periodu a všechny dvojice stavů jsou sousledné.

Důkaz: Nechť existuje stav $i \in I$, který je přechodný a nechť stav $j \in I$ je trvalý a je dosažitelný z i. Potom ale podle věty 2.29 je stav i dosažitelný ze stavu j a tedy podle věty 2.22 je také stav i trvalý, což je spor a musí být stav j, dosažitelný ze stavu i, též přechodný.

Když existuje stav $i \in I$, který je trvalý nulový, tak každý stav j dosažitelný z i je podle věty 2.27 též trvalý nulový. Proto, podle věty 2.29 všechny stavy jsou trvalé nulové.

Když existuje stav $i \in I$, který je trvalý nenulový, tak všechny ostatní stavy musí být též trvalé nenulové, poněvadž v opačném případě bychom došli ke sporu.

To, že každé dvojice stavů jsou stavy sousledné plyne z věty 2.29 a případná stejná perioda pak z věty 2.13. (*)

Věta 2.31: Markovský řetězec $\{X(\cdot,t)\}_{t \in T}$ s konečným počtem stavů nemůže obsahovat jen přechodné stavy a neobsahuje žádný trvalý stav nulový.

Důkaz: Předpokládejme, že všechny stavy konečného markovského řetězce s množinou stavů $I = \{0, 1, \ldots, N\}$ jsou přechodné. Potom pro každé $i,j \in I$ musí podle věty 2.20

$$\lim_{n \to \infty} p_{ji}^{(n)} = 0$$

a tedy též

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i \in I} p_{ji}^{(n)} = 0 .$$

což vede ke sporu, protože $\sum_{i \in I} p_{ji}^{(n)} = 1$ pro každé n.

Nemůže proto markovský řetězec obsahovat jen přechodné stavy.

Předpokládejme nyní, že stav $i \in I$ je trvalý nulový. Potom každý stav j dosažitelný z i musí dle věty 2.27 též trvalý nulový. Ale podle věty 2.26

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{j \in I} p_{ij}^{(n)} = 0$$

což opět vede ke sporu, protože

$$\sum_{j \in I} p_{ij}^{(n)} = 1 \quad \text{pro každé } n.$$

Nemůže tedy existovat žádný trvalý nulový stav. (*)

Jako důsledek této věty lze dokázat pro nerozložitelné markovské homogenní řetězce následující větu.

Věta 2.32: Nerozložitelný markovský řetězec s konečným počtem stavů má všechny stavy trvalé nenulové.

Důkaz: Podle věty 2.31 musí existovat alespoň jeden trvalý stav, který podle téže věty musí být nenulový. Potom ale podle věty 2.30 jsou všechny stavy trvalé nenulové. (*)

Ve speciálním případě, když uvažovaný markovský řetězec je neperiodický, platí následující tvrzení.

Věta 2.33: Nerozložitelný, neperiodický markovský řetězec s konečným počtem stavů má všechny stavy ergodické.

Důkaz: Důkaz tohoto tvrzení vyplývá bezprostředně z věty 2.32 a z věty 2.30 neboť v uvažovaném případě jsou všechny stavy trvalé nenulové a neperiodické, tedy ergodické. (*)

Když jsme dokázali, jakého typu mohou být stavy konečného homogenního markovského řetězce, můžeme dokázat následující větu týkající se limitních pravděpodobností přechodu pro počet kroků jdoucí k nekonečnu a jejich výpočtu.

Věta 2.34: Nechť $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je nerozložitelný homogenní řetězec s konečným počtem stavů $I = \{0, 1, \ldots, N\}$, který je neperiodický a jehož matice pravděpodobností přechodu je dána pomocí $\mathbb{P} = (p_{ij})$. Potom existují čísla $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_N$ taková, že pro každé $i \in I$

$$\pi_i = \lim_{n \to \infty} p_{ji}^{(n)} \qquad j = 0,1,\ldots,N \tag{2.7.1}$$

a jsou jediným řešením systému lineárních rovnic

$$\pi_i = \sum_{k \in I} \pi_k \, p_{ki} \qquad i \in I \tag{2.7.2}$$

s vlastností

$$\sum_{i \in I} \pi_i = 1 \tag{2.7.3}$$

Důkaz: Podle věty 2.33 jsou všechny stavy uvažovaného markovského řetězce ergodické a proto podle vět 2.29 a 2.26 existují limity

$$\lim_{n \to \infty} p_{ji}^{(n)} = \lim_{n \to \infty} p_{ii}^{(n)}$$

pro všechna i a $j \in I$. Označme tyto limity

$$\pi_i = \lim_{n \to \infty} p_{ji}^{(n)} \qquad i \in I$$

Potom podle (2.2.5)

$$p_{ji}^{(n+1)} = \sum_{k \in I} p_{jk}^{(n)} \, p_{ki}$$

a tedy též

$$\pi_i = \lim_{n \to \infty} p_{ji}^{(n+1)} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k \in I} p_{jk}^{(n)} \, p_{ki} = \sum_{k \in I} \pi_k \, p_{ki} ,$$

t.j. $\{\pi_i : i \in I\}$ je řešením systému rovnic (2.7.2) s vlastností $\sum_{i \in I} \pi_i = 1$, neboť

$$\sum_{i \in I} \pi_i = \lim_{n \to \infty} \sum_{i \in I} p_{ji}^{(n)} = 1.$$

Jestliže nyní $\{u_i : i \in I\}$ je jiné řešení systému (2.7.2) splňující (2.7.3), t.j.

$$u_i = \sum_{k \in I} u_k \, p_{ki} \qquad i \in I$$

a
$$\sum_{i \in I} u_i = 1,$$
tak též
$$u_j = \sum_{i \in I} u_i p_{ij} = \sum_{i \in I} \sum_{k \in I} u_k p_{ki} p_{ij} =$$
$$= \sum_{k \in I} u_k \sum_{i \in I} p_{ki} p_{ij} = \sum_{k \in I} u_k p_{kj}^{(2)}$$
a obecně
$$u_j = \sum_{k \in I} u_k p_{ij}^{(n)}$$
pro každé $n \geq 1$. Potom však též
$$u_j = \lim_{n \to \infty} \sum_{k \in I} u_k p_{kj}^{(n)} = \pi_j \sum_{k \in I} u_k = \pi_j$$
a tedy $\pi_o, \pi_1, \ldots, \pi_N$ je jediným řešením systému rovnic (2.7.2) splňující podmínku (2.7.3).

⊛

Příklad 2.15. Nechť $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je homogenní markovský řetězec uvažovaný v příkladě 2.2. Určete všechny
$$\lim_{n \to \infty} p_{ji}^{(n)}!$$
Uvažovaný řetězec je neperiodický a podle příkladu 2.9 jsou všechny stavy trvalé a dle příkladu 2.13 nenulové. Podle věty 2,34 tedy existují limity
$$\pi_i = \lim_{n \to \infty} p_{ji}^{(n)} \qquad j \in I \text{ pro } i \in I,$$
které jsou jediným řešením systému rovnic 2.7.2 s vlastností 2.7.3. Podle matice pravděpodobností přechodu je systém 2.7.2 dán pomocí
$$\pi_o = \tfrac{1}{2} \pi_o + \tfrac{1}{2} \pi_2$$
$$\pi_1 = \tfrac{1}{2} \pi_o + \tfrac{1}{2} \pi_2$$
$$\pi_2 = \pi_1$$
Řešením tohoto systému rovnic dostáváme $\pi_o = \pi_1 = \pi_2$ a vzhledem k tomu, že musí být splněno 2.7.3, tak
$$\pi_o = \pi_1 = \pi_2 = \tfrac{1}{3} .$$
⊛

Příklad 2.16. Nechť $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je homogenní markovský řetězec se spočetnou množinou stavů $I = \{0, 1, 2, \ldots\}$ daný pomocí matice pravděpodobností přechodu $\mathbb{P} = (p_{ij})$, kde
$$\left.\begin{aligned} p_{ij} &= p && \text{pro } j = i + 1 \\ &= 1-p && \text{pro } j = 0 \\ &= 0 && \text{pro } j \neq 0,\ i + 1 \end{aligned}\right\} \qquad i = 0,1,2,\ldots$$

Určete typy jednotlivých stavů a určete

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} \quad \text{pro každé } i, j \in I.$$

Dá se ukázat, že se jedná o nerozložitelný homogenní markovský řetězec a tedy dle věty 2.30 jsou všechny stavy stejného typu. Jelikož

$$f_{00}^{(1)} = 0$$

$$f_{00}^{(k)} = p^{k-1}(1-p) \quad \text{pro} \quad k \geq 2$$

tak

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{00}^{(k)} = \sum_{k=2}^{\infty} p^{k-1}(1-p) = p$$

neboli stav 0 je přechodný a tedy všechny stavy jsou přechodné. Potom však podle věty 2.20 pro každé $j \in I$ a $i \in I$

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = 0.$$

(*)

2.8. Stacionární markovské řetězce

Budeme se nyní zabývat otázkami určení absolutního rozložení pravděpodobnosti $\{\pi_i(1): i \in I\}$ v čase $t \in T$, pro homogenní markovský řetězec $\{X(.,t)\}_{t \in T}$.

S použitím věty o úplné pravděpodobnosti lze dokázat, že pro každé $i \in I$ a $t,s \in T$ $(s < t)$ platí

$$\pi_i(t) = \sum_{k \in I} \pi_k(s)\, p_{kj}^{(t-s)}. \tag{2.8.1}$$

Řekneme, že homogenní markovský řetězec $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je stacionární, když absolutní rozložení pravděpodobnosti pro libovolné dva časové okamžiky jsou stejná, t.j. když pro každé $t, s \in T$ a $i \in I$

$$\pi_i(t+s) = \pi_i(t) \tag{2.8.2}$$

Jestliže $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je stacionární, homogenní markovský řetězec, tak existuje rozložení pravděpodobnosti $\{\pi_i : i \in I\}$ takové, že pro každé $i \in I$ a každé $t \in T$ je

$$\pi_i(t) = \pi_i$$

a přitom toto rozložení pravděpodobnosti splňuje pro každé $i \in I$ rovnici

$$\pi_i = \sum_{k \in I} \pi_k\, p_{ki} \tag{2.8.3}$$

Věta 2.35: Jestliže počáteční rozložení pravděpodobnosti $\{\pi_i(0): i \in I\}$ homogenního markovského řetězce $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ splňuje podmínky

$$\pi_i(0) = \sum_{k \in I} \pi_k(0)\, p_{ki} \qquad i \in I, \tag{2.8.4}$$

tak $\{X(\cdot,t)\}_{t\in T}$ je stacionární markovský řetězec.

Důkaz: Podle (2.8.1) máme pro každé $i \in I$

$$\pi_i(1) = \sum_{k\in I} \pi_k(0)\, p_{ki},$$

což však podle (2.8.4) je rovno $\pi_i(0)$. Předpokládejme, že pro dané $t \in T$ a každé $i \in I$ platí

$$\pi_i(t) = \pi_i(0).$$

Potom dle (2.8.1) a (2.8.4) máme

$$\pi_i(t+1) = \sum_{k\in I} \pi_k(t)\, p_{ki} = \sum_{k\in I} \pi_k(0)\, p_{ki} = \pi_i(0).$$

a tedy pro každé $t \in T$ a $i \in I$ platí

$$\pi_i(t) = \pi_i(0)$$

neboli $\{X(\cdot,t)\}_{t\in T}$ je stacionární markovský řetězec.

(*)

Z věty 2.34 vyplývá, že limitní rozložení pravděpodobnosti je jediným absolutním rozložením pravděpodobnosti, které zaručuje stacionaritu uvažovaného homogenního markovského řetězce.

2.9 Příklady

V tomto paragrafu si uvedeme dva příklady, z nichž první má za úkol v jednoduchém případu ukázat jak vlastnosti markovského řetězce závisejí od pravděpodobností přechodu a druhý příklad je zjednodušeným modelem difusních procesů.

Příklad 2.17: Nechť $\{X(\cdot,t)\}_{t\in T}$ je homogenní markovský řetězec s dvěma stavy, t.j. $I = \{0, 1,\}$, jehož počáteční rozložení je dáno pomocí

$$\pi_0(0) = 1 - \pi \qquad \pi_1(0) = \pi$$

a jehož matice pravděpodobností přechodu je

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix},$$

kde $0 \leqslant p,q \leqslant 1$.

Uvažujme nejprve případ

(a) $\qquad p = q = 1.$

Potom oba stavy jsou absorbční, t.j. trvalé nenulové a platí

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} p_{ji}^{(n)} = 0 \qquad j \neq i$$

$i = 0,1$. Odpovídající markovský řetězec není nerozložitelný, ale je stacionární, neboť pro každé n a m platí

$$\pi_0(n+m) = \pi_0(n)\, p_{00}^{(m)} + \pi_1(n) p_{10}^{(m)} = \pi_0(n)$$

a

$$\pi_1(n+m) = \pi_o(n)\, p_{o1}^{(m)} + \pi_1(n) p_{11}^{(m)} = \pi_1(n).$$

(β) $\quad p = 1, \quad q = 0$

Potom stav 0 je absorbční a stav 1 přechodný. Pokud $\pi < 1$ není odpovídající markovský řetězec stacionární.

(γ) $\quad p = 0, \; q = 1$

Tento případ je podobný případu (β), kde stavy 0 a 1 mají vyměněnou úlohu.

(δ) $\quad p = q = 0$

Potom stavy 0 a 1 jsou oba periodické s periodou 2 a

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(2n)} = 1 \qquad \lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(2n+1)} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(2n)} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(2n+1)} = 1 \quad \text{pokud } j \neq i.$$

(ε) $\quad 0 < p < 1, \quad 0 < q < 1$

Oba stavy jsou trvalé, nenulové, neperiodické a tedy ergodické. Podle věty 2.34, neboť se jedná o nerozložitelný konečný řetězec, existují čísla π_o a π_1 taková, že

$$\pi_o = \lim_{n\to\infty} p_{oo}^{(n)} \qquad \pi_1 = \lim_{n\to\infty} p_{11}^{(n)},$$

která jsou jediným řešením systému rovnic

$$\pi_o = p\,\pi_o + (1-q)\,\pi_1$$

$$\pi_1 = (1-p)\,\pi_o + q\,\pi_1$$

Tyto rovnice jsou lineárně závislé (jsou identické) a tedy existuje nekonečně mnoho řešení, ale jen jedno je takové, že $\pi_o + \pi_1 = 1$. Toto řešení je potom dáno vztahy

$$\pi_o = \frac{1-q}{2-p-q} \qquad \pi_1 = \frac{1-p}{2-p-q}$$

Dvojice $\{\pi_o, \pi_1\}$ je také jediným možným rozložením, které by zaručovalo stacionaritu uvažovaného markovského řetězce a tedy kdyby

$$1 - \pi = \pi_o \qquad \pi = \pi_1,$$

tak markovský řetězec je stacionární. ⊛

Příklad 2.18: Uvažujme dvě osudí obsahující každé N koulí a předpokládejme, že celkový počet koulí v obou osudích, které jsou bílé je N a ostatní jsou černé. Řekneme, že osudí 1. je ve stavu $i \in I = \{0, 1, \dots, N\}$, když obsahuje i bílých koulí. Potom obsahuje N - i černých koulí a u druhého osudí je tomu opačně. Náhodný pokus, který budeme uvažovat, spočívá v tom, že se postupně bude nezávisle vytahovat z obou osudí současně jedna koule a vloží se do druhé.

Nechť $\{X(.,t)\}_{t\in T}$ je náhodný proces, který vyjadřuje stav 1. osudí. Potom zřejmě $\{X(.,t)\}_{t\in T}$ je markovský řetězec homogenní s maticí pravděpodobností přechodu

$$p_{01} = 1$$

$$p_{ij} = \frac{(N-i)^2}{N^2} \quad \text{když } j = i+1$$

$$= \frac{i^2}{N^2} \quad \text{když } j = i-1 \qquad i=1,2,\dots,N-1$$

$$= \frac{2i(N-i)}{N^2} \quad \text{když } j = i \tag{2.9.1}$$

$$p_{NN-1} = 1.$$

Všechny stavy jsou neperiodické a markovský řetězec je nerozložitelný a proto dle věty 2.34 existují

$$\lim_{n\to\infty} p_{ji}^{(n)} = \pi_i \qquad i = 0,1,\dots,N \tag{2.9.2}$$

a čísla $\pi_i, \pi_1, \dots, \pi_N$ tvoří rozložení pravděpodobnosti a vyhovují systému lineárních rovnic (2.7.2)

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= \pi_1 \frac{1}{N^2} \\
\pi_1 &= \pi_0 + \pi_1 \frac{2(N-1)}{N^2} + \pi_2 \frac{4}{N^2} \\
\pi_2 &= \pi_1 \frac{(N-1)^2}{N^2} + \pi_2 \frac{4(N-2)}{N^2} + \pi_3 \frac{9}{N^2} \\
&\vdots \\
\pi_{N-1} &= \pi_{N-2} \frac{4}{N^2} + \pi_{N-1} \frac{2(N-1)}{N^2} + \pi_N \\
\pi_N &= \pi_{N-1} \frac{1}{N^2}.
\end{aligned} \tag{2.9.3}$$

Řešením tohoto systému lineárních rovnic postupně dostáváme

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= \pi_0 \\
\pi_1 &= N^2 \pi_0 \\
\pi_2 &= \binom{N}{2}^2 \pi_0 \\
\pi_3 &= \binom{N}{3}^2 \pi_0 \\
&\vdots \\
\pi_N &= \binom{N}{N}^2 \pi_0.
\end{aligned} \tag{2.9.4}$$

Velikost π_0 určíme z podmínky, aby

$$\sum_{i=0}^{N} \pi_i = 1.$$

Ale

$$\sum_{i=0}^{N} \pi_i = \pi_0 \left[\binom{N}{0}^2 + \binom{N}{1}^2 + \dots + \binom{N}{N}^2 \right] = \pi_0 \binom{2N}{N}$$

a tedy stačí položit

$$\pi_0 = \frac{1}{\binom{2N}{N}}.$$

Potom pro každé $i = 0,1,2,\dots,N$ je

$$\pi_i = \frac{\binom{N}{i}^2}{\binom{2N}{N}} \tag{2.9.5}$$

⊛

2.10. Zákon velkých čísel

Nechť $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je nerozložitelný, neperiodický, markovský řetězec s konečným počtem stavů, který je stacionární. Potom podle věty 2.33 všechny jeho stavy jsou ergodické. Nechť $i \in I$ je libovolný stav a nechť $g_i(.)$ je zobrazení množiny I do reálných čísel definované následujícím způsobem

$$\begin{aligned} g_i(j) &= 1 \qquad \text{když } j = i \\ &= 0 \qquad \text{když } j \neq i. \end{aligned} \tag{2.10.1}$$

Nechť $\{X_n(.)\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost náhodných proměnných definovaných vztahem

$$X_n(.) = g_i(X(.,n)). \tag{2.10.2}$$

Střední hodnota náhodné proměnné $X_n(.)$ je dána pomocí

$$E\left[X_n(.)\right] = E\left[g_i(X(.,n))\right] = \pi_i$$

a rozptyl náhodné proměnné $X_n(.)$ je dán pomocí

$$D\left[X_n(.)\right] = E\left[X_n^2(.)\right] - \pi_i^2 = \pi_i(1-\pi_i)$$

Dále z vlastností středních hodnot

$$E\left[\sum_{k=0}^{n-1} X_k(.)\right] = n\,\pi_i$$

a

$$D\left[\sum_{k=0}^{n-1} X_k(.)\right] = E\left[\left(\sum_{k=0}^{n-1} (X_k(.) - \pi_i)\right)^2\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} E\left[(X_k(.)-\pi_i)^2\right] + 2\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{l=k+1}^{n-1} E\left[(X_k(.)-\pi_i)(X_l(.)-\pi_i)\right].$$

Ale pro $l > k$ je

$$E\left[(X_k(.) - \pi_i)(X_l(.) - \pi_i)\right] = E\left[X_k(.)X_l(.)\right] - \pi_i^2 =$$

$$= P(\{\omega : X(\omega,k) = i,\ X(\omega,l) = i\}) - \pi_i^2 =$$

$$= \pi_i\, p_{ii}^{(l-k)} - \pi_i^2$$

Proto

$$D\left[\sum_{k=0}^{n-1} X_k(.)\right] = n\,\pi_i(1-\pi_i) + 2\pi_i \sum_{k=1}^{n-1} k\, p_{ii}^{(n-k)} - \pi_i^2\, n(n-1)$$

a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} D\left[\sum_{k=0}^{n-1} X_k(.)\right] = 2\pi_i \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k\, p_{ii}^{(n-k)} - \pi_i^2 .$$

Ale

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k\, p_{ii}^{(n-k)} = \frac{1}{n^2}\left[\sum_{k=1}^{n} k\, p_{ii}^{(n-k)} - n\right] =$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k\, p_{ii}^{(n-k)} - \frac{1}{n} .$$

Jelikož

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} k} = 0$$

tak podle věty 2.14

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k\, p_{ii}^{(n-k)}}{\sum_{k=1}^{n} k} = \lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)}$$

a tedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} D\left[\sum_{k=0}^{n-1} X_k(.)\right] = 2\pi_i \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k}{n^2} \frac{\sum_{k=1}^{n} k\, p_{ii}^{(n-k)} - n}{\sum_{k=1}^{n} k} - \pi_i^2 =$$

$$= 2\pi_i^2 \cdot \frac{1}{2} - \pi_i^2 = 0.$$

Podle zákona velkých čísel - Markovova věta - odtud vyplývá, že posloupnost náhodných proměnných

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X_k(.) \qquad n = 1,2,\ldots \tag{2.10.3}$$

konverguje podle pravděpodobnosti ke střední hodnotě, t.j. k π_i. Jelikož $\sum_{k=0}^{n-1} X_k(.)$ je počet kolikrát se od počátku vyskytl stav i, tak relativní četnost výskytu stavu i konverguje podle pravděpodobnosti k pravděpodobnosti π_i, která je rovna

$$P(\{\omega : X(\omega, t) = i\})$$

pro každé $t \in T$.

Nechť nyní g(.) je libovolná funkce definovaná na množině stavů I a zkoumejme náhodné proměnné

$$Y_n(.) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g(X(.,k)). \tag{2.10.4}$$

Potom v prvních n časových okamžicích se stav $i \in I$ vyskytl $\nu_i(.,n)$ krát ($\sum_{i \in I} \nu_i(n) = n$) a tedy

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g(X(.,k)) = \frac{1}{n} \sum_{i \in I} \nu_i(.,n) g(i). \tag{2.10.5}$$

Vzhledem ke konečnosti množiny stavů I a vzhledem k tomu, že

$$\frac{1}{n} \nu_i(.,n) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g_i(X(.,k))$$

konverguje podle pravděpodobnosti k π_i, tak

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g(X(.,k))$$

konverguje pro $n \to \infty$ podle pravděpodobnosti k

$$\sum_{i \in I} \pi_i \, g(i) \tag{2.10.6}$$

což však je podle definice střední hodnota náhodné proměnné $g(X(.,t))$

$$E\left[g(X(.,t))\right]. \tag{2.10.7}$$

Kapitola III - Náhodné procesy se spojitým časem

3.1. Markovský proces

V kapitole II jsme se zabývali náhodnými procesy pro které množina parametrů T byla množinou všech nezáporných celých čísel a množina stavů I byla konečná resp. spočetná. V této kapitole ukážeme, že většinu výsledků lze převést i na případ, když T je množina všech nezáporných reálných čísel, t.j. na nespočetnou množinu $T = \langle 0, \infty)$.

V této kapitole budeme uvažovat náhodné procesy $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ pro něž $T = \langle 0, \infty)$ a I je buď tvaru $I = \{0, 1, 2, \ldots, N\}$ nebo tvaru $I = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Řekneme, že náhodný proces $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je markovský náhodný proces s množinou stavů I, když $T = \langle 0, \infty)$ a platí:

(1) pro každé $i \in I$ existuje $t \in T$ takové, že

$$P(\{\omega : X(\omega, t) = i\}) > 0; \qquad (3.1.1)$$

(2) pro každé n přirozené a každou n-tici parametrů $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ z T a každou n-tici stavů $i_1, i_2, \ldots, i_n$ podmíněná pravděpodobnost

$$P(\{\omega : X(\omega, t_n) = i_n\} / \bigcap_{j=1}^{n-1} \{\omega : X(\omega, t_j) = i_j\}) \qquad (3.1.2)$$

pokud existuje je rovna podmíněné pravděpodobnosti

$$P(\{\omega : X(\omega, t_n) = i_n\} / \{\omega : X(\omega, t_{n-1}) = i_{n-1}\}). \qquad (3.1.3)$$

Vlastnost (2) se podobně jako v paragrafu 3.1 nazývá markovskou vlastností a vidíme, že definice markovského řetězce a markovského procesu se jedině liší v množině používaných parametrů T. Vlastnost (2) je vyslovena nyní poněkud odlišněji než v paragrafu 3.1, avšak odpovídá vztahu (2.1.11).

Označme nyní pro každé $i \in I$ symbolem

$$\pi_i(0) = P(\{\omega : X(\omega, 0) = i\}). \qquad (3.1.4)$$

Počáteční rozložení pravděpodobnosti markovského procesu $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je zřejmě $\{\pi_i(0) : i \in I\}$

Zavedeme si nyní pravděpodobnost přechodu $p_{ij}(s,t)$ $(s < t)$ jako podmíněnou pravděpodobnost toho, že markovský proces bude v čase t ve stavu j, když v čase s byl ve stavu i. Potom zřejmě

$$p_{ij}(s,t) \geq 0 \qquad (3.1.5)$$

a

$$\sum_{j \in I} p_{ij}(s,t) = 1$$

pro každé $s, t \in T$ a $i \in I$.

Absolutní rozložení pravděpodobnosti $\{\pi_i(t) : i \in I\}$ v čase $t \in T$ pro markovský proces $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je definován vztahem

$$\pi_i(t) = P(\{\omega : X(\omega, t) = i\}) \text{ pro } i \in I. \qquad (3.1.6)$$

Podle věty o úplné pravděpodobnosti odtud dostáváme, že

$$\pi_i(t) = \sum_{j \in I} \pi_j(0)\, p_{ji}\, (0,t). \qquad (3.1.7)$$

Dá se ukázat, metodami kapitoly I, že v případě znalosti počátečního rozložení pravděpodobnosti $\{\pi_i(0):\ i \in I\}$ a pravděpodobností přechodu $\{p_{ij}(s,t):\ i,j \in I,\ s,\ t \in T,\ s < t\}$ pro daný markovský proces $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ umožní definovat systém konečněrozměrných distribučních funkcí, který splňuje podmínku symetrie (1.1.5) a podmínku konzistence a tedy nám zaručuje znalost pravděpodobnostní míry v prostoru všech reálných funkcí definovaných na T.

Pro každou n-tici parametrů $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ a každou n-tici stavů $i_1,\ i_2, \ldots, i_n$ vzhledem k markovské vlastnosti dostaneme

$$P\Big(\bigcap_{j=1}^{n} \{\omega:\ X(\omega,t_j)=i_j\}\Big) = \pi_{i_1}(t_1).p_{i_1 i_2}(t_1,t_2)\ldots p_{i_{n-1} i_n}(t_{n-1},t_n)$$

$$= \sum_{k \in I} \pi_k(0) p_{k i_1}(0,t_1) p_{i_1 i_2}(t_1,t_2)\ldots p_{i_{n-1}, i_n}(t_{n-1},t_n). \qquad (3.1.8)$$

a tyto pravděpodobnosti nám umožní určit konečně-rozměrné distribuční funkce.

Absolutní rozložení pravděpodobnosti musí splňovat funkcionální rovnici

$$\pi_j(t) = \sum_{i \in I} \pi_i(s)\, p_{ij}(s,t) \qquad (3.1.9)$$

pro každé $s < t$ a $j \in I$. Důkaz tohoto tvrzení je následující .

Pro každé $i,j \in I$ a $s < t$

$$P(\{\omega:\ X(\omega,t) = j\} \cap \{\omega:\ X(\omega,s) = i\}) = \pi_i(s)\, p_{ij}(s,t)$$

a tedy

$$\pi_j(t) = \sum_{i \in I} P(\{\omega:\ X(\omega,t) = j\} \cap \{\omega:\ X(\omega,s) = i\}) =$$

$$= \sum_{i \in I} \pi_i(s)\, p_{ij}\,(s,t).$$

Úplně stejně se dá dokázat, že pro každé $i,j \in I$ a $s < \tau < t$ z T platí

$$p_{ij}(s,t) = \sum_{k \in I} p_{ij}(s,\tau)\, p_{kj}(\tau,t) \qquad (3.1.10)$$

3.2. Intenzity pravděpodobností přechodu a Kolmogorovovy rovnice.

V dalších částech kapitoly III. uděláme následující předpoklady o pravděpodobnostech přechodu ze stavu i v čase s do stavu j v čase t, t.j. o pravděpodobnostech $p_{ij}(s,t)$. Budeme předpokládat:

(1) Existuje $\lim_{t \to s} p_{ij}(s,t)$ (3.2.1)

pro každé i a $j \in I$ a je rovna 0 když $i \neq j$ a rovna 1 když $i = j$;

(2) pro každé $s \in T$ a $i,j \in I$ $(i \neq j)$ existuje

$$\lim_{t \to s} \frac{p_{ij}(s,t)}{t - s}, \qquad (3.2.2)$$

kterou označíme $\mu_{ij}(s)$. Zřejmě $\mu_{ij}(s) \geq 0$. Tyto limity $\mu_{ij}(s)$ nazveme intenzitami pravděpodobnosti přechodu, t.j. $\mu_{ij}(s)$ je intenzita pravděpodobnosti přechodu ze stavu i do stavu j v čase s;

(3) pro každé $s \in T$ a $i \in I$ existuje

$$\lim_{t \to s} \frac{1 - p_{ii}(s, t)}{t - s}, \qquad (3.2.3)$$

kterou označíme $\mu_i(s)$ a nazveme intenzitou pravděpodobnosti přechodu ze stavu i v čase s; dá se dokázat, že $\mu_i(s) > 0$;

(4) platí pro každé $i \in I$

$$\lim_{t \to s} \sum_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} \frac{p_{ji}(s,t)}{t - s} = \sum_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} \lim_{t \to s} \frac{p_{ji}(s,t)}{t - s} = \sum_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} \mu_{ji}(s). \qquad (3.2.4)$$

Na základě těchto předpokladů si nyní odvodíme systém parciálních diferenciálních rovnic, kterým musí vyhovovat pravděpodobnosti přechodu a absolutní rozložení pravděpodobnosti. Tyto rovnice nám budou sloužit jako východisko k dalšímu výzkumu markovských procesů a jejich aplikací.

Z rovnice (3.1.10) máme pro libovolné $\Delta > 0$ a $i,j \in I$

$$p_{ij}(s,t + \Delta) = \sum_{k \in I} p_{ik}(s,t)\, p_{kj}(t,t + \Delta) =$$

$$= p_{ij}(s,t)\, p_{jj}(t,t+ \Delta) + \sum_{\substack{k \in I \\ k \neq j}} p_{ik}(s,t)\, p_{kj}(t,t+ \Delta).$$

Po jednoduché úpravě

$$\frac{p_{ij}(s,t + \Delta) - p_{ij}(s,t)}{\Delta} = - p_{ij}(s,t) \frac{1 - p_{jj}(t,t + \Delta)}{\Delta} + \sum_{\substack{k \in I \\ k \neq j}} p_{ik}(s,t) \frac{p_{kj}(t,t + \Delta)}{\Delta}.$$

Přejdeme-li nyní k limitě pro $\Delta \to 0$ a použijeme-li předpoklady (2) - (4) a uvědomíme-li si definici parciální derivace, dostaneme

$$\frac{\partial p_{ij}(s,t)}{\partial t} = - p_{ij}(s,t)\, \mu_j(t) + \sum_{\substack{k \in I \\ k \neq j}} p_{ik}(s,t)\, \mu_{kj}(t). \qquad (3.2.5)$$

Úplně stejně lze dokázat, že

$$\frac{\partial p_{ij}(s,t)}{\partial s} = p_{ij}(s,t)\,\mu_i(t) - \sum_{\substack{k \in I \\ k \neq i}} \mu_{ik}(s)\, p_{kj}(s,t); \qquad (3.2.6)$$

když se vychází ze vztahu

$$p_{ij}(s - \Delta,\, t) = \sum_{k \in I} p_{ij}(s - \Delta, s)\, p_{kj}(s,t).$$

Aby bylo možné psát parciální diferenciální rovnice (3.2.5) a (3.2.6) v ucelenější formě, budeme v dalším používat označení

$$\mu_{ii}(t) = -\mu_i(t) \qquad (3.2.7)$$

pro každé $i \in I$ a $t \in T$. Potom parciální diferenciální rovnice (3.2.5) přechází na parciální diferenciální rovnice

$$\frac{\partial p_{ij}(s,t)}{\partial t} = \sum_{k \in I} p_{ik}(s,t)\,\mu_{kj}(t) \qquad (3.2.8)$$

a parciální diferenciální rovnice (3.2.6) na parciální diferenciální rovnice

$$\frac{\partial p_{ij}(s,t)}{\partial s} = -\sum_{k \in I} \mu_{ik}(s)\, p_{kj}(s,t). \qquad (3.2.9)$$

Pro absolutní rozložení pravděpodobnosti $\pi_i(t)$ pro $i \in I$ a $t \in T$ dostáváme z (3.1.9) pro $\Delta > 0$

$$\pi_i(t + \Delta) = \sum_{j \in I} \pi_j(t)\, p_{ji}(t, t + \Delta) =$$

$$= \pi_i(t) p_{ii}(t, t+\Delta) + \sum_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} \pi_j(t) p_{ji}(t, t+\Delta)$$

a tedy

$$\frac{\pi_i(t+\Delta) - \pi_i(t)}{\Delta} = -\pi_i(t)\,\frac{1 - p_{ii}(t, t+\Delta)}{\Delta} + \sum_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} \pi_j(t) p_{ji}(t, t+\Delta)\,.$$

Uvažujeme-li limitu této rovnice pro $\Delta \to 0$ máme podle (3.2.7)

$$\frac{d\pi_i(t)}{dt} = -\pi_i(t)\,\mu_i(t) + \sum_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} \pi_j(t)\,\mu_{ji}(t)$$

$$= \sum_{j \in I} \pi_j(t)\,\mu_{ji}(t). \qquad (3.2.10)$$

Rovnice (3.2.8), (3.2.9) a (3.2.10) se nazývají Kolmogorovovy parciální diferenciální rovnice.

V závěru tohoto paragrafu si uvedeme jeden příklad markovského procesu, kde za množinu parametrů T vezmeme mimořádně jen interval $\langle 0,1)$.

Příklad 3.1: Nechť $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je markovský proces s množinou stavů $I = \{0, 1, \dots, N\}$ a množinou parametrů $T = \langle 0,1)$, jež je dán pomocí intenzit pravděpodobností přechodu

$$\mu_{ij}(t) = \frac{1}{1-t}(N-i) \quad \text{pro } j = i+1$$

$$= -\frac{1}{1-t}(N-i) \quad \text{pro } j = i \tag{3.2.11}$$

$$= 0 \quad \text{pro } j \neq i, i+1,$$

kde $i = 0, 1, \dots, N-1$ a

$$\mu_{NN}(t) = 0.$$

Počáteční rozložení markovského procesu je dáno pomocí

$$\pi_0(0) = 1 \quad \text{a} \quad \pi_i(0) = 0 \quad \text{pro} \quad i = 1,2,\dots,N.$$

Určete absolutní rozložení pravděpodobnosti $\{\pi_i(t) : i \in I\}$!

Pro absolutní rozložení pravděpodobnosti $\pi_i(t)$ musí platit parciální diferenciální rovnice (3.2.10), které v uvažovaném případu mají tvar

$$\frac{d\,\pi_0(t)}{dt} = -\frac{N}{1-t}\,\pi_0(t) \tag{3.2.12}$$

$$\frac{d\,\pi_i(t)}{dt} = -\frac{1}{1-t}(N-i)\,\pi_i(t) + \frac{1}{1-t}(N-i+1)\,\pi_{i-1}(t) \tag{3.2.13}$$

$$i = 1,2,\dots,N.$$

Jelikož

$$\frac{d \log \pi_0(t)}{dt} = \frac{1}{\pi_0(t)} \frac{d\,\pi_0(t)}{dt}$$

dostaneme z rovnice (3.2.12)

$$\frac{d \log \pi_0(t)}{dt} = -\frac{N}{1-t}$$

a tedy

$$\log \pi_0(t) = N \log(1-t) + C_0, \tag{3.2.14}$$

kde C_0 je taková konstanta, aby byla splněna počáteční podmínka vyplývající z počátečního rozložení pravděpodobnosti, t.j. aby $\pi_0(0) = 1$.
Ze vztahu (3.2.14) pak máme

$$\pi_0(t) = (1-t)^N e^{C_0}$$

a tedy musí být $C_0 = 0$. Máme tak

$$\pi_0(t) = (1-t)^N.$$

Obecně se dá dokázat, že řešením rovnic (3.2.13) jsou funkce

$$\pi_i(t) = \binom{N}{i} t^i (1-t)^{N-i} \qquad i = 1,2,\dots,N. \tag{3.2.15}$$

Skutečně, neboť

$$\frac{d\pi_i(t)}{dt} = i\binom{N}{i} t^{i-1}(1-t)^{N-i} - \binom{N}{i}(N-i)t^i(1-t)^{N-i-1} =$$

$$= \binom{N}{i} t^{i-1}(1-t)^{N-i-1}(i - Nt)$$

ale též

$$\pi_{i-1}(t)\frac{N-i+1}{1-t} - \pi_i(t)\frac{N-i}{1-t} = \binom{N}{i} t^{i-1}(1-t)^{N-i-1}(i-Nt).$$

Jelikož též $\pi_0(t)$ se dá vyjádřit ve tvaru (3.2.15) s i = 0, tak absolutní rozložení pravděpodobnosti je dáno vztahem

$$\pi_i(t) = \binom{N}{i} t^i(1-t)^{N-i} \qquad i = 0,1,\dots,N,$$

což však je obecný výraz pro binomické rozložení pravděpodobnosti s parametrem t.

(*)

3.3. Homogenní markovské procesy.

Podobně jako u markovských řetězců řekneme, že markovský proces $\{X(.,t)\}_{t\in T}$ je *homogenní*, když pravděpodobnost přechodu $p_{ij}(s,t)$ $(s < t)$ závisí pouze na rozdílu $t - s$ a nezávisí na t a s zvlášť, t.j. pravděpodobnosti přechodu splňují rovnici

$$p_{ij}(s,t) = p_{ij}(0, t - s). \qquad (3.3.1)$$

Bez újmy na srozumitelnosti budeme dále používat označení $p_{ij}(t-s) = p_{ij}(0,t-s)$.

Pro homogenní markovské procesy se předpoklady uvedené v paragrafu 3.2 týkající se pravděpodobností přechodu změní na:

(1) Existuje pro každé $i, j \in I$

$$\lim_{\Delta\to 0} p_{ij}(\Delta) \qquad (3.3.2)$$

a je rovna 0 když $i \neq j$ nebo 1 když $i = j$;

(2) existují pro každé $i,j \in I$

$$\lim_{\Delta\to 0} \frac{p_{ij}(\Delta)}{\Delta} = \mu_{ij}, \qquad (3.3.3)$$

t.j. intenzity pravděpodobnosti přechodu ze stavu i do stavu j nezávisí na t;

(3) existují pro každé $i \in I$

$$\lim_{\Delta\to 0} \frac{1 - p_{ii}(\Delta)}{\Delta} = \mu_i, \qquad (3.3.4)$$

t.j. intenzity pravděpodobností přechodu ze stavu i nezávisí na t;

(4) platí pro každé $i \in I$

$$\lim_{\Delta\to 0} \sum_{\substack{j\in I\\ j\neq i}} \frac{p_{ji}(\Delta)}{\Delta} = \sum_{\substack{j\in I\\ j\neq i}} \lim_{\Delta\to 0} \frac{p_{ji}(\Delta)}{\Delta} = \sum_{\substack{j\in I\\ j\neq i}} \mu_{ji}. \qquad (3.3.5)$$

Za těchto předpokladů systémy parciálních diferenciálních rovnic, jimž musí vyhovovat pravděpodobnosti přechodu a absolutní rozložení pravděpodobnosti přecházejí na tvar

$$\frac{d\,p_{ij}(t)}{dt} = \sum_{k \in I} p_{ik}(t)\,\mu_{kj} \tag{3.3.6}$$

$$\frac{d\,p_{ij}(t)}{dt} = \sum_{k \in I} \mu_{ik}\,p_{kj}(t) \tag{3.3.7}$$

$$\frac{d\,\pi_i(t)}{dt} = \sum_{j \in I} \pi_j(t)\,\mu_{ji}\,, \tag{3.3.8}$$

kde jsme ovšem opět položili

$$\mu_{ii} = -\mu_i. \tag{3.3.9}$$

Dá se dokázat, že pro všechna $i, j \in I$ $(i \neq j)$ jsou splněny nerovnosti $0 < \mu_{ij} < \infty$. Důkaz tohoto tvrzení zde však nebudeme provádět.

Věta 3.1: Pro každý stav $i \in I$ platí

$$\mu_i = \sum_{j \in I;\ j \neq i} \mu_{ij}\,. \tag{3.3.10}$$

Důkaz: Zřejmě podle předpokladu (4)

$$\sum_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} \mu_{ij} = \sum_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} \lim_{\Delta \to 0} \frac{p_{ij}(\Delta)}{\Delta} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} \sum_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} p_{ij}(\Delta) =$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} \left[1 - p_{ii}(\Delta) \right]$$

což však podle předpokladu je rovno μ_i. ⊛

Jako důsledek použití označení (3.3.9) vyplývá z právě dokázané věty, že pro každé $i \in I$

$$\sum_{j \in I} \mu_{ij} = 0. \tag{3.3.11}$$

V celé následující části kapitoly III. budeme uvažovat jen homogenní markovské procesy, které splňují podmínky (1) - (4).

Věta 3.2: Když v čase $t \in T$ je markovský proces ve stavu $i \in I$, tak pravděpodobnost přechodu do nějakého jiného stavu během malého časového intervalu Δ je rovna

$$\mu_i\,\Delta + o(\Delta), \tag{3.3.12}$$

kde $o(\Delta)$ je symbol vyjadřující to, že konverguje k nule rychleji než lineárně, t.j.

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{o(\Delta)}{\Delta} = 0.$$

Důkaz: Pro každé $\Delta > 0$ máme zřejmě

$$P(\{\omega : X(\omega, t+\Delta) \neq i\} / \{\omega : X(\omega,t) = i\}) =$$

$$= 1 - P(\{\omega : X(\omega,t+\Delta) = i\} / \{\omega : X(\omega,t) = i\}) =$$

$$= 1 - p_{ii}(\Delta)$$

Jelikož

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{1 - p_{ii}(\Delta)}{\Delta} = \mu_i,$$

tak

$$1 - p_{ii}(\Delta) = \mu_i \Delta + o(\Delta)$$ (*)

Podobně jako ve větě 3.2 lze dokázat, že pravděpodobnost $p_{ij}(\Delta)$ ze stavu i v čase t do stavu j v čase $t + \Delta$ se pro malá dá vyjádřit ve tvaru

$$p_{ij}(\Delta) = \mu_{ij} \Delta + o(\Delta). \tag{3.3.13}$$

Věta 3.3: Když v čase $t = 0$ je markovský proces ve stavu $i \in I$, tak doba setrvání v tomto stavu

$$T_i(.) = \sup \{ t: X(.,s) = i, \quad 0 \leq s < t \} \tag{3.3.14}$$

je náhodná proměnná a její distribuční funkce je dána vztahem

$$G_i(t)\ 1 - e^{-\mu_i t} \quad \text{pro každé } t \in T. \tag{3.3.15}$$

Důkaz: Nebudeme dokazovat, že $T_i(.)$ je náhodnou proměnnou, poněvadž to vyžaduje hlubších úvah teorie míry. Budeme tedy předpokládat, že $T_i(.)$ je náhodná proměnná. Potom její distribuční funkce, kterou označíme pro každé $t \in T$ symbolem $G_i(t)$ je

$$G_i(t) = P(\{\omega : T_i(\omega) \leq t\} / \{\omega : X(\omega,0) = i\}).$$

Pro tuto distribuční funkci musí platit pro každé $\Delta > 0$

$$G_i(t+\Delta) = P(\{\omega : T_i(\omega) \leq t+\Delta\} / \{\omega : X(\omega,0) = i\}$$

$$= P(\{\omega : T_i(\omega) \leq t\} / \{\omega : X(\omega,0) = i\}) +$$

$$+ P(\{\omega : t < T_i(\omega) \leq t+\Delta\} / \{\omega : X(\omega,0) = i\}$$

Ale

$$P(\{\omega : t < T_i(\omega) \leq t+\Delta\} / \{\omega : X(\omega,0) = i\}) =$$

$$= P(\{\omega : t < T_i(\omega)\} / \{\omega : X(\omega,0) = i\}).\ P(\{\omega : T_i(\omega) \leq t+\Delta\} / \{\omega : X(\omega,0) = i,$$

$$T_i(\omega) > t\}) = [1 - G_i(t)]\ P(\{\omega : T_i(\omega) \leq t+\Delta\} / \{\omega : X(\omega,t) = i\})$$

Vzhledem k předpokladu homogenity uvažovaného markovského procesu tento poslední výraz se dá přepsat na

$$\left[1 - G_i(t)\right] . P(\{\omega : T_i(\omega) < \Delta\} / \{\omega : X(\omega,0) = i\}) =$$

$$= \left[1 - G_i(t)\right] G_i(\Delta)$$

Potom tedy celkem dostáváme

$$G_i(t + \Delta) = G_i(t) + \left[1 - G_i(t)\right] G_i(\Delta).$$

Ale $G_i(\Delta)$ znamená, že během intervalu délky Δ nastane přechod ze stavu i do jiného stavu $j \neq i$. Podle věty 3.2 se tato pravděpodobnost dá pro malá Δ vyjádřit ve tvaru

$$G_i(\Delta) = \mu_i \Delta + o(\Delta)$$

a proto

$$\frac{G_i(t + \Delta) - G_i(t)}{\Delta} = \left[1 - G_i(t)\right] \left(\mu_i + \frac{o(\Delta)}{\Delta}\right)$$

a tedy distribuční funkce G_i musí vyhovovat diferenciální rovnici

$$\frac{d\,G_i}{dt} = \left[1 - G_i(t)\right] \mu_i$$

s počáteční podmínkou $G_i(0) = 0$.

Obecné řešení této rovnice je

$$G_i(t) = 1 - e^{-\mu_i t + c},$$

kde konstanta c je taková, aby $G_i(0) = 0$ neboli $c = 0$. Máme proto

$$G_i(t) = 1 - e^{-\mu_i t}$$

Vidíme, že doba setrvání ve stavu i má exponenciální rozložení pravděpodobnosti s parametrem μ_i.

⊛

Podobně jako jsme definovali náhodnou proměnnou $T_i(.)$ zavedeme si náhodnou proměnnou $T_{ij}(.)$, která bude vyjadřovat dobu prvního dosažení stavu j když v čase $t = 0$ byl markovský proces ve stavu i, t.j.

$$T_{ij} = \inf \{t : X(., 0) = i, \ X(.,t) = j\} \qquad (3.3.16)$$

Budeme nyní hledat pravděpodobnost náhodného jevu

$$\{\omega : T_{ij}(\omega) = T_i(\omega)\},$$

t.j. hledáme pravděpodobnost toho, že při opuštění stavu i přejde proces právě do stavu j, když na počátku byl uvažovaný proces ve stavu i.

Tato hledaná pravděpodobnost je zřejmě

$$P(\{\omega : T_{ij}(\omega) = T_i(\omega)\} / \{\omega : X(\omega,0) = i\}) =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\mu_i t} \mu_{ij}\, dt = \frac{\mu_{ij}}{\mu_i} = \frac{\mu_{ij}}{\sum\limits_{\substack{k \in I \\ k \neq i}} \mu_{ik}} \qquad (3.3.17)$$

3.4. Klasifikace stavů homogenního markovského procesu.

Pro klasifikaci stavů pro markovské procesy platí stejné zásady jako pro markovské řetězce, které jsme podrobně uvažovali v paragrafech 2.4 a 2.6.

Tak na příklad říkáme, že stav $i \in I$ je dosažitelný ze stavu $j \in I$, když existuje $t \in T$ takové, že

$$p_{ij}(t) > 0. \qquad (3.4.1)$$

Stavy i a $j \in I$ jsou souslednné, když stav i je dosažitelný ze stavu j a naopak stav j je dosažitelný ze stavu i.

Nechť pro každé $i \in I$ je definovaná funkce $g_i(.)$ zobrazující množinu stavů I do reálných čísel následujícím způsobem

$$g_i(x) = 0 \quad \text{když} \quad x \neq i$$
$$= 1 \quad \text{když} \quad x = i. \qquad (3.4.2)$$

Označme nyní pro každé $i \in I$ symbolem $\tau_i(.)$ náhodnou proměnnou definovanou vztahem

$$\tau_i(.) = \lim_{t \to \infty} \int_0^t g_i(X(.,s))ds. \qquad (3.4.3)$$

$\tau_i(.)$ je vlastně celková doba po kterou je náhodný proces $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ ve stavu $i \in I$.

Střední hodnota náhodné proměnné $\tau_i(.)$ v případě, že $X(.,0) = i$ je zřejmě rovna

$$E[\tau_i(.)] = \lim_{t \to \infty} \int_0^t E[g_i(X(.,x))]ds = \lim_{t \to \infty} \int_0^t p_{ii}(s)ds = \int_0^\infty p_{ii}(s)ds. \qquad (3.4.4)$$

Odtud potom je přirozené nazývat stav $i \in I$ přechodným, když

$$\int_0^\infty p_{ii}(s)\, ds < \infty \qquad (3.4.5)$$

a trvalým, když

$$\int_0^\infty p_{ii}(s)\, ds = \infty. \qquad (3.4.6)$$

Stav $i \in I$ nazveme trvalým stavem nulovým, když

$$\int_0^\infty p_{ii}(s)ds = \infty \quad \text{a} \quad \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t p_{ii}(s)ds = 0 \qquad (3.4.7)$$

a trvalým stavem nenulovým, když

$$\int_0^\infty p_{ii}(s)ds = \infty \quad \text{a} \quad \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t p_{ii}(s)ds > 0. \qquad (3.4.8)$$

Zavádění pojmu periodický stav nemá pro markovské procesy smysl, neboť pro homogenní markovské procesy $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je pro každé $i \in I$ a $t \in T$

$$p_{ii}(t) > 0. \qquad (3.4.9)$$

Skutečně, neboť pro dané ε existuje takové Δ_ε, že

$$p_{ii}(\Delta_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$$

Nechť n je takové, že $\frac{t}{n} < \Delta_\varepsilon$. Potom podle

$$p_{ii}(t) \geqslant \left[p_{ii}(\tfrac{t}{n}) \right]^n > 0.$$

3.5. Příklady homogenních markovských procesů

3.5.1. Poissonův proces

Nechť $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je homogenní markovský proces s množinou stavů $I = \{0,1,2,\dots\}$, jehož počáteční rozložení je dáno pomocí $\pi_0(0) = 1$, $\pi_i(0) = 0$ pro $i \neq 0$ a jehož intenzity pravděpodobností přechodu jsou následující

$$\begin{aligned} \mu_{ij} &= \lambda && \text{pro } j = i + 1 \\ &= 0 && \text{pro } j \neq i,\ i+1 \\ &= -\lambda && \text{pro } j = i \end{aligned} \qquad (3.5.1)$$

kde $i = 0,1,2,\dots$.

Potom vzhledem k homogenitě uvažovaného náhodného procesu pravděpodobnost přechodu

$$p_{ij}(t)$$

pro $j \geqslant i$ znamená pravděpodobnost, že během intervalu času délky t nastalo celkem $j-i$ přeskoků a tedy

$$p_{ij}(t) = p_{o\ j-i}(t). \qquad (3.5.2)$$

Ale pro každé $j \in I$ vzhledem k počátečnímu rozložení pravděpodobnosti je

$$p_{oj}(t) = \pi_j(t) \qquad (3.5.3)$$

Systém diferenciálních rovnic, kterým musí vyhovovat absolutní rozložení pravděpodobnosti (3.3.8) má v tomto případě následující tvar

$$\frac{d\,\pi_o(t)}{dt} = \pi_o(t)\,\mu_{oo} = -\lambda\pi_o(t)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\,\pi_i(t)}{dt} &= \pi_{i-1}(t)\,\mu_{i-1i} + \pi_i(t)\,\mu_{ii} = \\ &= \lambda\,\pi_{i-1}(t) - \lambda\,\pi_i(t) \qquad i=1,2,\dots \end{aligned} \qquad (3.5.4)$$

Abychom vyřešili tento systém diferenciálních rovnic zavedeme nové funkce $\varphi_i(.)$ $i = 0,1,\dots$ definované pro každé $t \in T$ pomocí

$$g_i(t) = e^{\lambda t}\,\pi_i(t) \qquad i = 0,1,2,\dots \qquad (3.5.5)$$

Potom

$$\pi_i(t) = e^{-\lambda t}\,g_i(t)$$

a

$$\frac{d\,\pi_i(t)}{dt} = -\lambda\,e^{-\lambda t}\,g_i(t) + e^{-\lambda t}\,\frac{dg_i(t)}{dt}.$$

Systém rovnic (3.5.4) můžeme přepsat na systém rovnic pro funkce $\varphi_i(.)$ a to

$$\frac{d\,\varphi_0(t)}{dt} = 0$$

$$\frac{d\,\varphi_i(t)}{dt} = \lambda\varphi_{i-1}(t) \qquad i = 1,2,\ldots \tag{3.5.6}$$

s počátečními podmínkami $\varphi_0(0) = 1$ a $\varphi_i(0) = 0$ pro všechna $i = 1,2,\ldots$

Z první rovnice dostáváme

$$\varphi_0(t) = C_0$$

a vzhledem k tomu, že $\varphi_0(0) = 1$ máme

$$\varphi_0(t) = 1.$$

Obecně bychom dostali

$$\varphi_i(t) = \frac{(\lambda t)^i}{i!}.$$

Skutečně, neboť

$$\frac{d\,\varphi_i(t)}{dt} = \lambda\frac{(\lambda t)^{i-1}}{(i-1)!} = \lambda\varphi_{i-1}(t)$$

a pro $i = 1,2,\ldots$

$$\varphi_i(0) = 0$$

Vrátíme-li se zpět k výchozím funkcím $\pi_i(t)$, tak

$$\pi_0(t) = e^{-\lambda t} \tag{3.5.7}$$

$$\pi_i(t) = e^{-\lambda t}\,\frac{(\lambda t)^i}{i!} \qquad i = 1,2,\ldots \tag{3.5.8}$$

Výraz (3.5.8) pro $i = 0$ pokrývá i (3.5.7) a tedy obecně dostáváme

$$\pi_i(t) = e^{-\lambda t}\,\frac{(\lambda t)^i}{i!} \qquad i = 0,1,2,\ldots\,.$$

Vidíme proto, že absolutní rozložení pravděpodobnosti v čase $t \in T$ je dáno pomocí obecného výrazu Poissonova rozložení pravděpodobnosti s parametrem λt. Proto se také tento uvažovaný homogenní markovský proces nazývá Poissonův.

Pravděpodobnosti přechodu $p_{ij}(t)$ $(j \geq i)$ jsou podle (3.5.2) a (3.5.3) dány vztahem

$$p_{ij}(t) = p_{0\,j-i}(t) = \pi_{j-i}(t) = e^{-\lambda t}\,\frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}\,. \tag{3.5.9}$$

Jelikož pro každé $i \in I$

$$\int_0^\infty p_{ii}(s)ds = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\,dt = \frac{1}{\lambda} < \infty\,,$$

tak podle (3.4.5) jsou všechny stavy přechodné.

3.5.2. Proces ryzího rozmnožování

Nechť $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je homogenní markovský proces s množinou stavů $I = \{0, 1, 2, \ldots\}$, jehož počáteční rozložení je

$$\pi_0(0) = 1, \qquad \pi_i(0) = 0 \quad \text{pro } i \neq 0 \tag{3.5.10}$$

a jehož intenzity pravděpodobností přechodu jsou dány vztahem

$$\begin{aligned} \mu_{ij} &= \lambda_i && \text{pro } j = i+1 \\ &= -\lambda_i && \text{pro } j = i \\ &= 0 && \text{pro } j \neq i,\ i+1 \end{aligned} \tag{3.5.11}$$

kde $i = 0,1,2,\ldots$ ($\lambda_0 > 0$).

Vzhledem k tomu, že proces $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ může procházet postupně stavy $0,1,2,\ldots$ za sebou, tak podle předpokladu homogenity máme pro pravděpodobnost přechodu $p_{ij}(t)$ ($j \geqslant i$) vztah

$$p_{ij}(t) = p_{0\,j-i}(t) = \pi_{j-i}(t). \tag{3.5.12}$$

Stačí tedy znát pouze absolutní rozložení pravděpodobnosti v každém časovém okamžiku, abychom znali celý náhodný proces.

Systém diferenciálních rovnic, kterým musí vyhovovat absolutní rozložení pravděpodobnosti, t.j. systém (3.3.8) je v uvažovaném případě tvaru

$$\begin{aligned} \frac{d\,\pi_0(t)}{dt} &= -\lambda_0\, \pi_0(t) \\ \frac{d\,\pi_i(t)}{dt} &= \lambda_{i-1}\, \pi_{i-1}(t) - \lambda_i\, \pi_i(t) \qquad i = 1,2,\ldots \end{aligned} \tag{3.5.13}$$

s počátečními podmínkami (3.5.10).

Úplně stejně jako u řešení při Poissonovu procesu, zavedeme nové funkce $\varphi_i(.)$ definované vztahem

$$\varphi_i(t) = e^{\lambda_i t}\, \pi_i(t) \qquad i = 0,1,2,\ldots \tag{3.5.14}$$

Potom systém diferenciálních rovnic (3.5.13) přejde na systém

$$\begin{aligned} \frac{d\,\varphi_0(t)}{dt} &= 0 \\ \frac{d\,\varphi_i(t)}{dt} &= \lambda_{i-1}\, e^{-(\lambda_{i-1} - \lambda_i)t}\, \varphi_{i-1}(t) \qquad i = 1,2,\ldots \end{aligned} \tag{3.5.15}$$

s počátečními podmínkami $\varphi_0(0) = 1$, $\varphi_i(0) = 0$ pro $i \neq 0$.

Pro $\varphi_0(.)$ z první rovnice a z počáteční podmínky $\varphi_0(0) = 1$ dostáváme

$$\varphi_0(t) = 1.$$

Pro $i = 1$ máme tedy

$$\frac{d\,\varphi_1(t)}{dt} = \lambda_0 e^{-(\lambda_0 - \lambda_1)t}$$

z čehož

$$\varphi_1(t) = -\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - \lambda_1} e^{-(\lambda_0-\lambda_1)t} + c_1 .$$

Ale z počáteční podmínky $\varphi_1(0) = 0$ musí být

$$c_1 = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - \lambda_1}$$

a proto

$$\varphi_1(t) = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - \lambda_1}\left[1 - e^{-(\lambda_0-\lambda_1)t}\right] .$$

Obecně bychom dostali

$$\varphi_i(t) = (-1)^i \lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{i-1} \sum_{j=0}^{i} \frac{e^{-(\lambda_j - \lambda_i)t}}{(\lambda_j-\lambda_0)\ldots(\lambda_j-\lambda_{j-1})(\lambda_j-\lambda_{j+1})\ldots(\lambda_j-\lambda_i)} \tag{3.5.16}$$

pro $i = 1,2,\ldots$

a tedy

$$\pi_0(t) = e^{-\lambda_0 t} \tag{3.5.17}$$

a $$\pi_i(t) = (-1)^i \lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{i-1} \sum_{j=0}^{i} \frac{e^{-\lambda_j t}}{(\lambda_j-\lambda_0)\ldots(\lambda_j-\lambda_{j-1})(\lambda_j-\lambda_{j+1})\ldots(\lambda_j-\lambda_i)} \tag{3.5.18}$$

Pomocí vztahu (3.5.12) můžeme potom z tohoto absolutního rozložení pravděpodobnosti určit pravděpodobnosti přechodu $p_{ij}(t)$ pro každé $i,j \in I$ $(j \geqslant i)$ a $t \in T$.
Jelikož pro každé $i \in I$ a $t \in T$ je

$$p_{ii}(t) = \pi_0(t) = e^{-\lambda_0 t},$$

tak

$$\int_0^\infty p_{ii}(s)ds = \int_0^\infty e^{-\lambda_0 s} ds = \frac{1}{\lambda_0} < \infty .$$

Vidíme, že všechny stavy uvažovaného markovského procesu jsou přechodné.

V další části budeme specifikovat v příkladu 3.2 intenzity pravděpodobností přechodu λ_i.

Příklad 3.2: Nechť $\{X(.,t)\}_{t\in T}$ je homogenní markovský proces - proces ryzího rozmnožování, s množinou stavů $I = \{0,1,2,\ldots\}$, jehož počáteční rozložení pravděpodobnosti je

$$\pi_0(0) = 1, \quad \pi_i(0) = 0 \quad \text{pro} \quad i \neq 0$$

a jehož intenzity λ_i $i = 0,1,2,\ldots$ jsou dány vztahem

$$\lambda_i = (N + i)\lambda \qquad i = 0,1,\ldots, \tag{3.5.19}$$

kde N je dané přirozené číslo a $\lambda > 0$.

Určete všechny pravděpodobnosti přechodu $p_{ij}(t)$.
Dosadíme-li do (3.5.18) intenzity (3.5.19), tak

$$\pi_0(t) = e^{-N\lambda t}$$

a pro $i = 1,2,\ldots$

$$\pi_i(t) = (-1)^i\lambda^i\, N(N+1)\dots(N+i-1)\sum_{j=0}^{i} \frac{e^{-(N+j)\lambda t}}{\lambda^i j(j-1)\dots 2.1.(-1)\dots(j-i)} =$$

$$= \frac{(N+i-1)!}{(N-1)!}\sum_{j=0}^{i} \frac{e^{-j\lambda t} \cdot e^{-N\lambda t}(-1)^j}{j!\,(i-j)!} =$$

$$= \binom{N+i-1}{i} e^{-N\lambda t} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (-e^{-\lambda t})^j = \tag{3.5.20}$$

$$= \binom{N+i-1}{i} e^{-N\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^i .$$

Potom pro každé $i, j \in I$ ($j > i$) a $t \in T$ je

$$p_{ij}(t) = \pi_{j-i}(t) = \binom{N+j-i-1}{j-i} e^{-N\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{j-i} . \tag{3.5.21}$$

Uvažovaný náhodný proces odpovídá populaci obsahující na počátku N jedinců, kteří se všichni se stejnou intenzitou λ mohou rozmnožit. Stav i v čase t znamená, že přírůstek za interval délky t je i jedinců, neboli stav populace je, že obsahuje (N+i) jedinců.

Pro tento markovský proces platí zřejmě

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{N+i-1}{i} e^{-N\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^i = \sum_{i=N}^{\infty} (-1)^i \binom{-N}{i} e^{-N\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^i =$$

$$= e^{-N\lambda t}(e^{-\lambda t})^{-N} = 1,$$

neboť podle vzorce pro geometrickou řadu

$$\sum_{i=N}^{\infty} \binom{-N}{i}(-1)^i(1-e^{-\lambda t}) = \left[1 - (1-e^{-\lambda t})\right]^{-N} = (e^{-\lambda t})^N .$$

Dále jelikož pro každé $i \in I$ a $t \in T$ je

$$p_{ii}(t) = e^{-N\lambda t} ,$$

tak

$$\int_0^{\infty} p_{ii}(s)\,ds = \int_0^{\infty} e^{-N\lambda s}\,ds = \frac{1}{N\lambda} < \infty$$

a přesvědčili jsme se tak, že všechny stavy $i \in I$ uvažovaného markovského procesu jsou přechodné.

(*)

V náhodných procesech ryzího rozmnožování nemusí obecně platit, že pro každé $t \in T$ je

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i(t) = 1.$$

Je to způsobeno tím, že součet

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i(t)$$

znamená pravděpodobnost, že v časovém okamžiku t je náhodný proces $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ v konečném stavu. Může se ovšem stát, hlavně když intenzity pravděpodobností přechodu

λ_i dostatečně rychle rostou, že stav náhodného procesu v konečném časovém okamžiku nemusí být konečný a může se tedy stát, že

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i(t) < 1. \tag{3.5.21}$$

Abychom lépe pronikli do této skutečnosti uvažujme nenáhodný případ populace, která se pravidelně rozmnožuje a předpokládejme, že přírůstek je úměrný čtverci jedinců v populaci. Označme $x(t)$ počet jedinců v čase t. Potom v případě koeficientu úměrnosti λ máme tedy

$$\frac{dx(t)}{dt} = \lambda x^2(t).$$

Vzhledem k tomu, že

$$\frac{1}{x^2(t)} \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[-\frac{1}{x(t)}\right],$$

tak

$$-\frac{1}{x(t)} = \lambda t + c$$

neboli

$$x(t) = -\frac{1}{c + \lambda t},$$

kde c je konstanta taková, aby $x(0)$ byl daný počáteční stav populace. Celkem tedy máme

$$c = -\frac{1}{x(0)}$$

a proto

$$x(t) = \frac{x(0)}{1 - \lambda x(0)t}.$$

V případě, že λ je takové, že pro dané t

$$1 - \lambda x(0)t = 0,$$

tak v tomto časovém okamžiku není stav $x(t)$ konečný.

Obecně je možné dokázat, že

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i(t) = 1$$

pro každé $t \in T$ tehdy a jen tehdy, když řada

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} \tag{3.5.22}$$

je divergentní.

Důkaz tohoto tvrzení nebudeme provádět, jen upozorňujeme, že v našem příkladě 3.2 je $\lambda_i = (N+i)\lambda$ a tedy

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(N+i)\lambda}$$

neboli řada (3.5.22) diverguje a proto $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i(t) = 1$ pro každé $t \in T$. V nenáhodném případě uvažovaném výše je zhruba $\lambda_i = \lambda i^2$ $i \geq 1$ a pro tato λi řada (3.5.22) konverguje $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda i^2} < \infty$ a tedy $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i(t) < 1$.

3.5.3. Proces rozmnožování a úmrtí.

Nechť $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je homogenní markovský proces s množinou stavů $I = \{0, 1, 2, \ldots\}$, jehož počáteční rozložení je

$$\pi_N(0) = 1, \qquad \pi_i(0) = 0 \text{ pro } i \neq N, \tag{3.5.23}$$

kde N je dané přirozené číslo, a jehož intenzity pravděpodobností přechodu jsou dány vztahem

$$\begin{aligned} \mu_{01} &= \lambda_0 \\ \mu_{00} &= -\lambda_0 \\ \mu_{ij} &= \lambda_i && \text{když } j = i+1 \\ &= \nu_i && \text{když } j = i-1 \\ &= -(\lambda_i+\nu_i) && \text{když } j = i \\ &= 0 && \text{pro ostatní } j \quad \text{a pro } i = 0 \text{ když } j \neq 1\text{, kde } i=1,2,\ldots. \end{aligned} \tag{3.5.24}$$

Systémy diferenciálních rovnic (3.3.6), (3.3.7) a (3.3.8) i když se dají lehce napsat nedají se již s použitím jednoduchého matematického aparátu řešit. Proto se v dalším omezíme jen na některé speciální.

Obecně je možné dokázat, že pro libovolné intenzity $\lambda_i \geq 0$ $\nu_i \geq 0$ existují kladná řešení uvedených systémů diferenciálních rovnic taková, že

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i(t) \leq 1 \tag{3.5.25}$$

pro každé $t \in T$. Jestliže intenzity λ_i a ν_i jsou ohraničené nebo když rostou dostatečně pomalu, tak řešení je jediné a splňuje podmínku

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i(t) = 1 \tag{3.5.26}$$

pro každé $t \in T$.

Ve všech prakticky zajímavých případech platí, že existuje jediné řešení, které splňuje podmínku (3.5.26).

Dříve než přejdeme ke zkoumání speciálních případů procesů rozmnožování a smrti poznamenejme, že v případě když $\lambda_0 = 0$, tak není možný přechod ze stavu 0 do stavu 1 a stav 0 je v tomto případě absorbční. Z diferenciální rovnice pro $\pi_0(.)$, které obecně má tvar

$$\frac{d\,\pi_0(t)}{dt} = -\lambda_0 \pi_0(t) + \nu_1 \pi_1(t) \tag{3.5.27}$$

vyplývá, že pro $\lambda_0 = 0$ je funkce $\pi_0(.)$ neklesající a jelikož je shora omezená, existuje

$$\lim_{t \to \infty} \pi_0(t),$$

kterou označíme π_0. Potom π_0 nám vlastně určuje pravděpodobnost, že nastane pohlcení stavem 0.

Jestliže všechna λ_i a ν_i pro $i = 1,2,\ldots$ jsou kladná, tak všechny stavy jsou trvalé a existují limity pro $t \to \infty$ absolutních rozložení pravděpodobnosti bez ohledu na počáteční rozložení pravděpodobnosti. Důkaz tohoto tvrzení zde nebudeme provádět a ukážeme je jen na některých speciálních případech dále.

Označme pro každé $i \in I$

$$\pi_i = \lim_{t \to \infty} \pi_i(t) \tag{3.5.28}$$

Hodnoty π_i, pokud existují, lze získati řešením systému (3.3.8) položíme-li

$$\frac{d\,\pi_i(t)}{dt} = 0$$

a nahradíme-li $\pi_i(t)$ čísly π_i, t.j. řešením systému lineárních rovnic

$$\sum_{k \in I} \pi_k \mu_{ki} = 0 \qquad i \in I, \tag{3.5.29}$$

t.j. v našem případě obecného procesu rozmnožování a smrti systémem rovnic

$$\begin{aligned} -\lambda_o \pi_o + \gamma_1 \pi_1 &= 0 \\ -(\lambda_i + \gamma_i)\pi_i + \lambda_{i-1}\pi_{i-1} + \gamma_{i+1}\pi_{i+1} &= 0 \qquad i=1,2,\dots . \end{aligned} \tag{3.5.30}$$

Když tedy $\lambda_o = 0$ vidíme, že $\pi_1 = 0$ a obecně pro všechna $i \in I$ jsou $\pi_i = 0$ neboli systém s pravděpodobností π_o bude pohlcen stavem 0 a s pravděpodobností $1 - \pi_o$ poroste nade všechny meze.

Omezíme se nyní na specifikaci intenzit λ_i a γ_i.

(A) Nechť

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \lambda > 0 \qquad \text{pro } i = 0,1,2,\dots \\ \gamma_i &= i\gamma \end{aligned} \tag{3.5.31}$$

Potom ze systému rovnic (3.5.30) dostáváme

$$\pi_1 = \frac{\lambda}{\gamma}\,\pi_o$$

a obecně pro $i = 1,2,\dots$

$$\pi_i = \frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^i \pi_o$$

o čemž se lze lehce přesvědčit dosazením do (3.5.30).

Vzhledem k tomu, že

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = \pi_o \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^i = \pi_o\, e^{\frac{\lambda}{\gamma}}$$

tak položíme-li

$$\pi_o = e^{-\frac{\lambda}{\gamma}}$$

dostaneme obecně

$$\pi_i = e^{-\frac{\lambda}{\gamma}} \frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^i \qquad i = 0,1,2,\dots \tag{3.5.32}$$

neboli opět Poissonovo rozložení pravděpodobnosti, t.j. ustálený stav pro $t \to \infty$ vede k Poissonovu rozložení pravděpodobnosti s parametrem $(\frac{\lambda}{\gamma})$.

Jestliže budeme uvažovat počet stavů konečný, t.j.

$I = \{0, 1, \dots, N\}$ a položíme-li

$$\mu_{NN-1} = N\gamma \qquad \mu_{NN} = -N\gamma$$

tak dostaneme stejná π_i jako v (3.5.32) jen pro $i = 0,1,\dots,N$ a musíme volit π_0 tak, aby

$$\sum_{i=0}^{N} \pi_i = \pi_0 \sum_{i=0}^{N} \frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^i = 1$$

neboli dostaneme

$$\pi_i = \frac{\frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^i}{\sum_{j=0}^{N} \frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^j} \qquad i = 0,1,\dots,N. \tag{3.5.33}$$

Tento vztah se používá v telefonii pro výpočty pravděpodobností obsazení linek a je znám jako Erlangova formule.

(B) Nechť

$$\lambda_0 = 0$$
$$\lambda_i = i\lambda$$
$$\gamma_i = i\gamma \tag{3.5.34}$$

pro $i = 1,2,\dots$. I když, jak jsme uvedli výše, víme, že tento náhodný proces má tu vlastnost, že s pravděpodobností π_0 bude pohlcen stavem 0 a s pravděpodobností $1 - \pi_0$ poroste nade všechny meze, ukážeme celé řešení, poněvadž v tomto případě je dosti jednoduché.

Uvažujme počáteční rozložení pravděpodobnosti

$$\pi_1(0) = 1, \qquad \pi_i(0) = 0 \qquad \text{pro } i \neq 1. \tag{3.5.35}$$

Systém diferenciálních rovnic (3.3.8) pro absolutní rozložení pravděpodobnosti $\{\pi_i(t): i \in I\}$ je v tomto případě dán pomocí

$$\frac{d\,\pi_0(t)}{dt} = \gamma\,\pi_1(t)$$

$$\frac{d\,\pi_i(t)}{dt} = -\,i(\lambda+\gamma)\pi_i(t) + (i-1)\,\lambda\pi_{i-1}(t) + (i+1)\gamma\,\pi_{i+1}(t) \tag{3.5.36}$$

$$i = 1,2,\dots$$

s počátečními podmínkami (3.5.35).

Obecné řešení tohoto systému je

$$\pi_0(t) = \gamma B(t)$$

$$\pi_i(t) = \left[1 - \lambda B(t)\right]\left[1 - \gamma B(t)\right]\left[\lambda B(t)\right]^{i-1} \qquad i=1,2,\dots, \tag{3.5.37}$$

kde

$$B(t) = \frac{1 - e^{(\lambda-\gamma)t}}{\gamma - \lambda e^{(\lambda-\gamma)t}}.$$

Důkaz, že tyto funkce jsou řešením systému (3.5.36) ponecháváme jako cvičení. Ze vztahů (3.5.37) vyplývá, že existují limity pro $t \to \infty$, které jsou rovny

$$\lim_{t\to\infty} \pi_0(t) = \frac{\gamma}{\lambda} \qquad \text{když } \lambda > \gamma$$

$$= 1 \qquad \text{když } \lambda \le \gamma \tag{3.5.38}$$

a pro každé i = 1,2,...

$$\lim_{t \to \infty} \pi_i(t) = 0. \qquad (3.5.39)$$

(C) V této specifikaci se budeme zabývat zkoumáním obecného procesu rozmnožování a smrti, když počet stavů je konečný, a budeme uvažovat, že $I = \{0,1,2\}$. Intenzity pravděpodobnosti přechodu nechť jsou následující

$$\begin{array}{lll} \mu_{00} = -\lambda & \mu_{01} = \lambda & \\ \mu_{10} = \gamma & \mu_{12} = \lambda & \mu_{11} = -(\lambda + \gamma) \\ \mu_{20} = 0 & \mu_{21} = 2\gamma & \mu_{22} = -2\gamma \end{array} \qquad (3.5.40)$$

a počáteční rozložení pravděpodobnosti nechť je

$$\pi_0(0) = \pi_2(0) = 0; \quad \pi_1(0) = 1. \qquad (3.5.41)$$

I když by bylo možné provádět řešení v úplné obecnosti, přesto pro jednoduchost zápisu budeme předpokládat, že

$$\lambda = 2\gamma \qquad (3.5.42)$$

V tomto případě potom systém diferenciálních rovnic (3.3.8) pro absolutní rozložení pravděpodobnosti má tvar

$$\begin{aligned} \frac{d\pi_0(t)}{dt} &= -2\gamma\pi_0(t) + \gamma\pi_1(t) \\ \frac{d\pi_1(t)}{dt} &= 2\gamma\pi_0(t) - 3\gamma\pi_1(t) + 2\gamma\pi_2(t) \\ \frac{d\pi_2(t)}{dt} &= 2\gamma\pi_1(t) - 2\gamma\pi_2(t) \end{aligned} \qquad (3.5.43)$$

S počáteční podmínkou (3.5.42).

Jelikož se jedná o systém lineárních diferenciálních rovnic, je možné k jeho řešení použít Laplaceovu transformaci. Označme pro každé x

$$P_i(x) = \int_0^\infty \pi_i(t)e^{-xt}\, dt. \qquad (3.5.44)$$

Potom

$$\int_0^\infty \frac{d\pi_i(t)}{dt} e^{-xt}\, dt = -\pi_i(0) + x P_i(x). \qquad (3.5.45)$$

Násobíme-li každou rovnici v (3.5.43) funkcí e^{-xt}, integrujeme-li vzhledem k t od 0 do ∞ a použijeme-li označení (3.5.44) a (3.5.45), dostáváme systém lineárních rovnic pro $P_0(x)$, $P_1(x)$ a $P_2(x)$ tvaru

$$\begin{aligned} xP_0(x) &= -2\gamma P_0(x) + \gamma P_1(x) \\ -1 + xP_1(x) &= 2\gamma P_0(x) - 3\gamma P_1(x) + 2\gamma P_2(x) \\ xP_2(x) &= 2\gamma P_1(x) - 2\gamma P_2(x) \end{aligned}$$

Řešením tohoto systému lineárních rovnic dostáváme

$$P_o(x) = \frac{\gamma}{x(5\gamma + x)} = \frac{1}{5x} - \frac{1}{5(5\gamma + x)}$$

$$P_1(x) = \frac{2\gamma + x}{x(5\gamma + x)} = \frac{2}{5x} + \frac{3}{5(5\gamma + x)}$$

$$P_2(x) = \frac{2\gamma}{x(5\gamma + x)} = \frac{2}{5x} - \frac{2}{5(5\gamma + x)} .$$

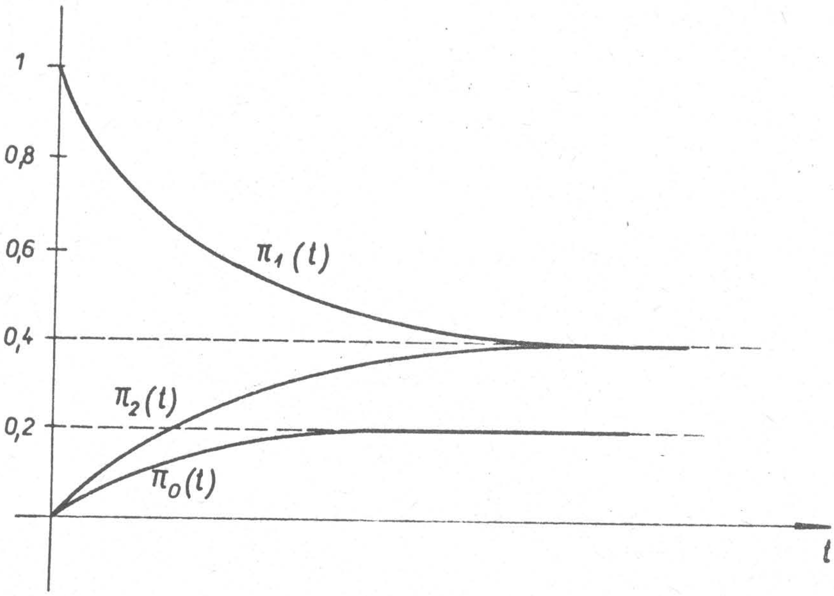
Jelikož

$$\int_0^\infty \alpha\, e^{-xt}\, dt = \frac{\alpha}{x} \quad \text{a} \quad \int_0^\infty e^{-\alpha t} e^{-xt} dt = \frac{1}{\alpha + x},$$

tak máme podle (3.5.44)

$$\begin{aligned} \pi_o(t) &= \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\, e^{-5\gamma t} \\ \pi_1(t) &= \frac{2}{5} + \frac{3}{5}\, e^{-5\gamma t} \\ \pi_2(t) &= \frac{2}{5} - \frac{2}{5}\, e^{-5\gamma t} \end{aligned} \qquad (3.5.46)$$

V obrázku 9 jsou vyneseny tyto funkce jako funkce proměnné t.



OBR. 9.

Pro tento speciální případ si určíme ještě všechny pravděpodobnosti přechodu $p_{ij}(t)$, které musí vyhovovat systému diferenciálních rovnic (3.3.6) resp. (3.3.7). Dosazením intenzit λ_i a γ_i podle (3.5.41) do (3.3.6) dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{d\, p_{io}(t)}{dt} &= -2\gamma\, p_{io} + \gamma\, p_{i1} \\ \frac{d\, p_{i1}(t)}{dt} &= 2\gamma\, p_{io} - 3\gamma\, p_{i1} + 2\gamma\, p_{i2} \\ \frac{d\, p_{i2}(t)}{dt} &= 2\gamma\, p_{i1} - 2\gamma\, p_{i2} \end{aligned} \qquad (3.5.47)$$

pro i = 0,1,2 s počátečními podmínkami $p_{ii}(0) = 1$, $p_{ij}(0) = 0$ pro $j \neq i$.

Řešením tohoto systému, který lze provést stejně jako pro absolutní rozložení pravděpodobnosti dostaneme

$$
\begin{aligned}
p_{oo}(t) &= \frac{1}{5} + \frac{2}{3} e^{-2\gamma t} + \frac{2}{15} e^{-5\gamma t} \\
p_{o1}(t) &= \frac{2}{5} - \frac{2}{5} e^{-5\gamma t} \\
p_{o2}(t) &= \frac{2}{5} - \frac{2}{3} e^{-2\gamma t} + \frac{4}{15} e^{-5\gamma t} \\
p_{1o}(t) &= \frac{1}{5} - \frac{1}{5} e^{-5\gamma t} \\
p_{11}(t) &= \frac{2}{5} + \frac{3}{5} e^{-5\gamma t} \\
p_{12}(t) &= \frac{2}{5} - \frac{2}{5} e^{-5\gamma t} \\
p_{2o}(t) &= \frac{1}{5} - \frac{1}{3} e^{-2\gamma t} + \frac{2}{15} e^{-5\gamma t} \\
p_{21}(t) &= \frac{2}{5} - \frac{2}{5} e^{-5\gamma t} \\
p_{22}(t) &= \frac{2}{5} + \frac{1}{3} e^{-2\gamma t} + \frac{4}{15} e^{-5\gamma t}
\end{aligned}
\tag{3.5.48}
$$

Jako kontrolu provedených numerických výpočtů lze na příklad použít vztah (3.1.9) pro s = 0 odkud dostáváme

$$\pi_j(t) = p_{1j}(t)$$

neboť $\pi_1(0) = 1$. Porovnáním s výrazy (3.5.46) a (3.5.48) vidíme, že jsou výrazy identické.

Ze vztahů (3.5.48) dále vidíme, že pro $t \to \infty$ existují limity $\lim\limits_{t \to \infty} p_{ij}(t)$, které nezávisí na i, ale pouze jen na j. Dostáváme

$$\lim_{t \to \infty} p_{oj}(t) = \lim_{t \to \infty} p_{1j}(t) = \lim_{t \to \infty} p_{2j}(t) = \pi_j$$

a $\pi_o = \frac{1}{5}$, $\pi_1 = \frac{2}{5}$, $\pi_2 = \frac{2}{5}$. Tyto hodnoty bychom dostali přímo ze systému (3.5.43) položili-li bychom místo $\frac{d\,\pi_j(t)}{dt}$ hodnoty 0 a místo $\pi_j(t)$ čísla π_j.

Dále ze vztahů (3.5.48) se lze přesvědčit, že pro všechna i

$$\int_0^{\infty} p_{ii}(s)ds = \infty ,$$

t.j. všechny stavy jsou trvalé a podobně

$$
\begin{aligned}
&\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t p_{oo}(s)ds = \frac{1}{5} \\
&\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t p_{11}(s)ds = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t p_{22}(s)ds = \frac{2}{5}
\end{aligned}
\tag{3.5.49}
$$

neboli všechny stavy uvažovaného náhodného procesu jsou trvalé nenulové, jak ani jinak být nemůže, poněvadž i pro markovské procesy platí věty identické s větami v paragrafu 2.6 použijeme-li ovšem definice z paragrafu 3.4.

3.6. Aplikace homogenních markovských procesů

V tomto paragrafu se budeme zabývati některými aplikacemi homogenních markovských procesů uvedených v paragrafu 3.5 na vybrané úlohy z teorie obsluhy. Z uvedených příkladů také vyplyne, že podobným způsobem je možné interpretovat různé technické problémy spojené s výrobními procesy a teorií spolehlivosti.

3.6.1. Zjednodušená úloha o telefonních spojích

Předpokládejme, že máme k disposici nekonečně mnoho telefonních linek a že celý telefonní provoz bude popsán následujícím pravděpodobnostním modelem:

Označme $X(.,t)$ počet obsazených linek v čase t. Nechť $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je homogenní markovský proces s hodnotami v množině stavů $I = \{0,1,2,\dots\}$ mající počáteční rozložení pravděpodobnosti

$$\pi_0(0) = 1, \qquad \pi_i(0) = 0 \qquad i \neq 0.$$

a jehož intenzity pravděpodobnosti jsou popsány vztahy

$$\begin{aligned}
\mu_{00} &= -\lambda \\
\mu_{ij} &= \lambda & j &= i+1 & i &= 0,1,2,\dots \\
&= i\gamma & j &= i-1 & i &= 1,2,\dots \\
&= -(\lambda+i\gamma) & j &= i & i &= 0,1,\dots \\
&= 0 & j &\neq i-1,i,i+1,
\end{aligned} \tag{3.6.1}$$

kde λ je intenzita objevení nového volání a γ je intenzita ukončení spojeného hovoru.

Z uvedených předpokladů vidíme, že se jedná o obecný proces rozmnožování a úmrtí zkoumaný v předcházejícím paragrafu jako (A). Limitní rozložení pravděpodobnosti

$$\pi_i = \lim_{t \to} \pi_i(t)$$

je podle (3.5.31) pro jakékoliv počáteční rozložení pravděpodobnosti Poissonovým rozložením s parametrem $\frac{\lambda}{\gamma}$.

3.6.2. Úloha o telefonních linkách v případě konečného počtu linek a s možností libovolné délky fronty čekajících

Uvažujme nyní podobný příklad jako v 3.6.1. s tím rozdílem, že počet linek v telefonní ústředně bude konečný a roven s. Hovor, který se objeví při obsazení všech linek se automaticky zařadí do fronty čekajících, která nemusí být ohraničená. Označme $X(.,t)$ celkový počet volajících a čekajících ve frontě v čase t. Podle uvedeného popisu telefonního provozu za těchto předpokladů, budeme uvažovat, že $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je homogenní markovský proces s množinou stavů $I = \{0,1,2,\dots\}$ daný intenzitami

$$
\begin{aligned}
\mu_{00} &= -\lambda \\
\mu_{ij} &= \lambda & j &= i+1 & i &= 0,1,2,\ldots \\
&= i\nu & j &= i-1 \text{ a } i \leq s \\
&= s\nu & j &= i-1,\ i > s & & (3.6.2)\\
&= -(\lambda + i\nu) & j &= i \text{ a } i \leq s \\
&= -(\lambda + s\nu) & j &= i \text{ a } i > s \\
&= 0 & j &\neq i-1,\ i,\ i+1
\end{aligned}
$$

Počáteční rozložení pravděpodobnosti nechť je dáno pomocí

$$\pi_0(0) = 1, \quad \pi_i(0) = 0 \quad \text{pro } i \neq 0.$$

Z uvedených předpokladů vidíme, že se opět jedná o obecný markovský proces rozmnožování a úmrtí se speciálním tvarem intenzit pravděpodobností přechodu.

Pro $i < s$ jsou diferenciální rovnice pro absolutní rozložení pravděpodobnosti identické s diferenciálními rovnicemi pro proces rozmnožování a úmrtí (A) a proto pro $i < s$ je podle (3.5.31)

$$\pi_i = \lim_{t \to \infty} \pi_i(t) = \pi_0 \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^i \quad i < s. \tag{3.6.3}$$

Pro $i \geq s$ diferenciální rovnice pro absolutní rozložení pravděpodobnosti mají tvar

$$\frac{d\,\pi_i(t)}{dt} = -(\lambda + s\nu)\,\pi_i(t) + \lambda\pi_{i-1}(t) + s\nu\pi_{i+1}(t), \tag{3.6.4}$$

neboli pro $i \geq s$ musí

$$\pi_i = \lim_{t \to \infty} \pi_i(t)$$

splňovat rovnice

$$0 = -(\lambda + s\nu)\pi_i + \lambda\pi_{i-1} + s\nu\pi_{i+1}. \tag{3.6.5}$$

Speciálně pro $i = s$ dostáváme

$$
\begin{aligned}
\pi_{s+1} &= \frac{1}{s\nu}(\lambda + s\nu)\pi_0 \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^s + \lambda\pi_0 \frac{1}{(s-1)!}\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^{s-1} = \\
&= \frac{\pi_0}{s\ s!}\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^{s+1}.
\end{aligned} \tag{3.6.6}
$$

Obecně bychom mohli určit, že

$$\pi_{s+k} = \frac{\pi_0}{s^k\ s!}\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^{s+k} \qquad k = 1,2,\ldots \tag{3.6.7}$$

V případě, že

$$\left(\frac{\lambda}{\nu}\right) < s, \tag{3.6.8}$$

tak řada

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\pi_i}{\pi_0} \tag{3.6.9}$$

konverguje a je možné určit π_0 tak, aby

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1 \tag{3.6.10}$$

Kdyby

$$\frac{\lambda}{\gamma} \geq s, \tag{3.6.11}$$

tak řada (3.6.9) diverguje a tedy musí být $\pi_0 = 0$. Odtud však potom plyne, že i ostatní $\pi_i (i = 1,2,\ldots)$ jsou rovny 0. Proto v tomto případě s pravděpodobností 1 proces $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ roste nade všechny meze.

Příklad 3.3: Určete limitní rozložení pravděpodobností

$$\pi_i = \lim_{t \to \infty} \pi_i(t) \qquad \text{v případě, že } s = 1,\ \lambda = 1,\ \gamma = 2.$$

I když bychom mohli použít okamžitě vzorce (3.6.3) a (3.6.7) uvedeme si diferenciální rovnice pro absolutní rozložení pravděpodobnosti v tomto případě a ukážeme si postup odvození. Absolutní rozložení pravděpodobnosti musí splňovat rovnice

$$\begin{aligned} \frac{d\,\pi_0(t)}{dt} &= -\pi_0(t) + 2\,\pi_1(t) \\ \frac{d\,\pi_i(t)}{dt} &= -3\,\pi_i(t) + \pi_{i-1}(t) + 2\,\pi_{i+1}(t) \qquad i = 1,2,\ldots\,. \end{aligned} \tag{3.6.12}$$

Limitní rozložení pravděpodobnosti, které v tomto případě existuje, splňují rovnice

$$-\pi_0 + 2\,\pi_1 = 0$$

$$\pi_{i-1} - 3\,\pi_i + 2\,\pi_{i+1} = 0 \qquad i = 1,2,\ldots,$$

jejichž řešením dostaneme

$$\pi_i = \left(\tfrac{1}{2}\right)^i \pi_0 \qquad i = 0,1,\ldots$$

Jelikož

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = \pi_0 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^i = 2\,\pi_0,$$

tak $\pi_0 = \frac{1}{2}$, aby součet limitních pravděpodobností byl roven 1. Obecně pak

$$\pi_i = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{i+1} \qquad i = 0,1,2,\ldots\,. \tag{3.6.13}$$

V následující tabulce jsou uvedeny některé tyto pravděpodobnosti.

Počet volajících a čekajících	0	1	2	3	4	5
Délka fronty	0	0	1	2	3	4
π_i	0,500	0,250	0,125	0,062	0,031	0,016

✻

3.6.3. Úloha o telefonních linkách v případě konečného počtu linek a s možností jen konečné délky fronty čekajících

V paragrafu 3.6.2. jsme uvažovali telefonní ústřednu, ve které při obsazení všech s linek každý nový hovor se automaticky zařadí do fronty čekajících. Nyní se budeme zabývat případem, kdy při obsazení všech s linek se nový hovor zařadí mezi čekající, když počet čekajících je menší než m a jinak se automaticky ztratí a vypadne. Označme $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ počet volajících a čekajících v čase t. Budeme předpokládat, že $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je homogenní markovský proces s konečným počtem stavů $I = \{0, 1, \ldots, s+m\}$, daný intenzitami

$$
\begin{aligned}
\mu_{oo} &= -\lambda \\
\mu_{ij} &= \lambda & & j = i+1 \\
&= i\gamma & & j = i-1,\ i \leq s \\
&= s\gamma & & j = i-1,\ s < i \leq s+m \\
&= -(\lambda+i\gamma) & & j = i \quad i \leq s \\
&= -(\lambda+s\gamma) & & j = i \quad s < i \leq s+m \\
\mu_{s+m\ s+m} &= -s\gamma,
\end{aligned}
\tag{3.6.14}
$$

kde opět λ je intenzita objevení nového volání a γ je intenzita ukončení uskutečněného spojení. Počáteční rozložení pravděpodobnosti nechť je

$$\pi_o(0) = 1, \qquad \pi_i(0) = 0 \qquad \text{pro } i \neq 0$$

Z uvedených předpokladů vidíme, že se opět jedná o speciální typ procesu rozmnožování a úmrtí. Diferenciální rovnice, kterým musí vyhovovat absolutní rozložení pravděpodobnosti jsou pro všechna $i < s + m$ stejné jako v případě 3.6.2. Pro $i = s + m$ máme

$$\frac{d\,\pi_{s+m}(t)}{dt} = -\,s\gamma\pi_{s+m}(t) + \lambda\pi_{s+m-1}(t) \tag{3.6.15}$$

Podle obecných úvah z paragrafu 3.5.3 existují limity absolutních rozložení pravděpodobnosti $\pi_i = \lim_{t \to \infty} \pi_i(t)$, které splňují podmínku

$$\sum_{i=0}^{s+m} \pi_i = 1.$$

Ze vztahů (3.6.3) a (3.6.7) máme

$$
\begin{aligned}
\pi_i &= \pi_o \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^i & & \text{pro } i \leq s \\
&= \frac{\pi_o}{s^{i-s}\, s!} \left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^i & & \text{pro } s < i \leq s + m.
\end{aligned}
\tag{3.6.16}
$$

Hodnotu π_o volíme tak, aby

$$\pi_o \left[\sum_{i=0}^{s} \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda}{s}\right)^i + \sum_{i=s+1}^{s+m} \frac{1}{s^{i-s}\, s!} \left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^i \right] = 1. \tag{3.6.17}$$

V konkrétním příkladě když $s = 1$, $m = 1$, $\lambda = 1$, $\gamma = 2$ máme

$$
\begin{aligned}
\pi_o &= \frac{4}{7} \\
\pi_1 &= \pi_o \frac{1}{2} = \frac{2}{7} \\
\pi_2 &= \pi_o \frac{1}{4} = \frac{1}{7}.
\end{aligned}
\tag{3.6.18}
$$

vypadne. Označme $\{X(.,t)\}_{t\in T}$ počet volajících a čekajících v čase t. Budeme předpokládat, že $\{X(.,t)\}_{t\in T}$ je homogenní markovský proces s konečným počtem stavů $I = \{0, 1, \ldots, s+m\}$, daný intenzitami

$$\begin{aligned}
\mu_{oo} &= -\lambda \\
\mu_{ij} &= \lambda & & j = i+1 \\
&= i\gamma & & j = i-1,\ i \le s \\
&= s\gamma & & j = i-1,\ s < i \le s+m \qquad (3.6.14)\\
&= -(\lambda + i\gamma) & & j = i \quad i \le s \\
&= -(\lambda + s\gamma) & & j = i \quad s < i \le s+m \\
\mu_{s+m\ s+m} &= -s\gamma,
\end{aligned}$$

kde opět λ je intenzita objevení nového volání a γ je intenzita ukončení uskutečněného spojení. Počáteční rozložení pravděpodobnosti nechť je

$$\pi_o(0) = 1, \qquad \pi_i(0) = 0 \qquad \text{pro } i \ne 0$$

Z uvedených předpokladů vidíme, že se opět jedná o speciální typ procesu rozmnožování a úmrtí. Diferenciální rovnice, kterým musí vyhovovat absolutní rozložení pravděpodobnosti jsou pro všechna $i < s + m$ stejné jako v případě 3.6.2. Pro $i = s + m$ máme

$$\frac{d\,\pi_{s+m}(t)}{dt} = -s\gamma\pi_{s+m}(t) + \lambda\pi_{s+m-1}(t) \qquad (3.6.15)$$

Podle obecných úvah z paragrafu 3.5.3 existují limity absolutních rozložení pravděpodobnosti $\pi_i = \lim_{t\to\infty} \pi_i(t)$, které splňují podmínku

$$\sum_{i=0}^{s+m} \pi_i = 1.$$

Ze vztahů (3.6.3) a (3.6.7) máme

$$\begin{aligned}
\pi_i &= \pi_o \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^i & & \text{pro } i \le s \\
&& & \qquad\qquad (3.6.16)\\
&= \frac{\pi_o}{s^{i-s}\, s!} \left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^i & & \text{pro } s < i \le s+m.
\end{aligned}$$

Hodnotu π_o volíme tak, aby

$$\pi_o \left[\sum_{i=0}^{s} \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda}{s}\right)^i + \sum_{i=s+1}^{s+m} \frac{1}{s^{i-s}\, s!} \left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^i \right] = 1. \qquad (3.6.17)$$

V konkrétním příkladě když $s = 1$, $m = 1$, $\lambda = 1$, $\gamma = 2$ máme

$$\begin{aligned}
\pi_o &= \frac{4}{7} \\
\pi_1 &= \pi_o \frac{1}{2} = \frac{2}{7} \qquad (3.6.18)\\
\pi_2 &= \pi_o \frac{1}{4} = \frac{1}{7}.
\end{aligned}$$

Příklad 3.4: Určete všechna absolutní rozložení pravděpodobnosti pro náhodný proces odpovídající úloze o telefonních linkách v případě konečného počtu linek $s = 1$ a s možností jen konečné délky fronty $m = 1$, když intenzita vzniku nového hovoru je $\lambda = 1$ a intenzita ukončení spojeného hovoru je $\gamma = 2$!

V tomto konkrétním příkladě lze přímo řešit podobně jako v příkladě obecného procesu rozmnožování a úmrtí (C) příslušné diferenciální rovnice pro absolutní rozložení pravděpodobnosti. Tyto diferenciální rovnice v našem příkladu jsou

$$\frac{d\,\pi_0(t)}{dt} = -\pi_0(t) + 2\pi_1(t)$$

$$\frac{d\,\pi_1(t)}{dt} = \pi_0(t) + 2\pi_2(t) - 3\pi_1(t) \qquad (3.6.19)$$

$$\frac{d\,\pi_2(t)}{dt} = \pi_1(t) - 2\pi_2(t).$$

Uvažujeme-li počáteční rozložení pravděpodobnosti dané $\pi_0(0) = 1$, $\pi_1(0) = 0$, $\pi_2(0) = 0$, tak to jsou též počáteční podmínky pro systém rovnic. Podobnou metodou jako v paragrafu 3.5.3 vztahy (3.5.43) - (3.5.46) dostáváme

$$\pi_0(t) = \frac{4}{7} - \frac{11 + 3\alpha_1}{7(\alpha_2 - \alpha_1)} e^{\alpha_1 t} + \frac{11 + 3\alpha_1}{7(\alpha_2 - \alpha_1)} e^{\alpha_2 t}$$

$$\pi_1(t) = \frac{2}{7} + \frac{5 + 2\alpha_1}{7(\alpha_2 - \alpha_1)} e^{\alpha_1 t} - \frac{5 + 2\alpha_1}{7(\alpha_2 - \alpha_1)} e^{\alpha_2 t} \qquad (3.6.20)$$

$$\pi_2(t) = \frac{1}{7} + \frac{6 + \alpha_1}{7(\alpha_2 - \alpha_1)} e^{\alpha_1 t} - \frac{6 + \alpha_1}{7(\alpha_2 - \alpha_1)} e^{\alpha_2 t},$$

kde $\alpha_1 = -3 + \sqrt{2}$, $\alpha_2 = -3 - \sqrt{2}$.

Vidíme, že pro každé $t \in T$ je

$$\pi_0(t) + \pi_1(t) + \pi_2(t) = 1$$

a $\lim\limits_{t \to \infty} \pi_i(t)$ existují, neboť $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 < 0$ a

$$\pi_0 = \lim_{t \to \infty} \pi_0(t) = \frac{4}{7}$$

$$\pi_1 = \lim_{t \to \infty} \pi_1(t) = \frac{2}{7}$$

$$\pi_2 = \lim_{t \to \infty} \pi_2(t) = \frac{1}{7}$$

což odpovídá vztahu (3.6.18).

(*)

3.6.4. Úloha o obsluze m automatů jedním pracovníkem

Zkoumejme nyní automat, který nepotřebuje, pokud pracuje normálně, lidskou obsluhu. Při poruše však vyžaduje lidský zásah a opravu, jejíž délka je náhodná. Také doba vzniku poruchy je náhodná. Předpokládejme, že máme m stejných nezávislých automatů, které jsou obsluhovány jedním pracovníkem. Označme X(.,t) počet nepracujících automatů v čase t. Budeme uvažovat, že $\{X(\cdot,t)\}_{t \in T}$ je homogenní markovský proces s konečnou množinou stavů $I = \{0,1,\dots,m\}$, jehož počáteční rozložení pravděpodobnosti je

$$\pi_0(0) = 1, \qquad \pi_i(0) = 0 \qquad \text{pro } i \neq 0, \tag{3.6.21}$$

a jehož intenzity pravděpodobností přechodu jsou

$$\begin{aligned} \mu_{00} &= -m\lambda \\ \mu_{ij} &= (m-i)\lambda & j &= i+1 & i &= 0,1,\dots,m-1 \\ &= \gamma & j &= i-1 & i &= 1,2,\dots,m \\ &= -[(m-i)\lambda+\gamma] & j &= i & i &= 1,2,\dots,m \\ &= 0 & j &\neq i-1,i,i+1 \text{ a všechna } i, \end{aligned} \tag{3.6.22}$$

kde λ je vlastně intenzita poruchy libovolného pracujícího automatu a γ je intenzita ukončení opravovaného automatu.

Z uvedených předpokladů vyplývá, že $\{X(\cdot,t)\}_{t \in T}$ opět speciální typ obecného procesu rozmnožování a úmrtí.

Diferenciální rovnice popisující chování absolutních rozložení pravděpodobnosti jsou podle (3.3.8) následující:

$$\begin{aligned} \frac{d\,\pi_0(t)}{dt} &= -m\lambda\,\pi_0(t) + \gamma\,\pi_1(t) \\ \frac{d\,\pi_i(t)}{dt} &= -[(m-i)\lambda+\gamma]\pi_i(t) + (m-i+1)\lambda\pi_{i-1}(t) + \gamma\pi_{i+1}(t) \\ & \qquad\qquad i=1,2,\dots,m-1 \\ \frac{d\,\pi_m(t)}{dt} &= -\gamma\,\pi_m(t) + \lambda\,\pi_{m-1}(t) \end{aligned} \tag{3.6.23}$$

Počáteční rozložení pravděpodobnosti (3.6.21) dává počáteční podmínky pro systém (3.6.23).

Řešení systému (3.6.23) by bylo možné provést jako dříve. Vypočítáme si nyní limitní rozložení pro $t \to \infty$, které podle obecných úvah existuje a je dáno řešením systému lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 0 &= -m\lambda\,\pi_0 + \gamma\,\pi_1 \\ 0 &= -[(m-i)\lambda+\gamma]\pi_i + (m-i+1)\lambda\,\pi_{i-1} + \gamma\,\pi_{i+1} \\ & \qquad\qquad \text{pro } i = 1,2,\dots,m-1 \\ 0 &= -\gamma\,\pi_m + \lambda\,\pi_{m-1}. \end{aligned} \tag{3.6.24}$$

Z poslední rovnice dostáváme

$$\gamma\pi_m = \lambda\pi_{m-1}$$

což dosazeno do předposlední rovnice dává

$$0 = -(\lambda+\gamma)\pi_{m-1} + 2\lambda\,\pi_{m-2} + \lambda\pi_{m-1}$$

neboli

$$\gamma\pi_{m-1} = 2\lambda\,\pi_{m-2}\,.$$

Obecně bychom dostali pro každé $i = 0,1,\dots,m-1$

$$\gamma\pi_{i+1} = (m-i)\lambda\pi_i \tag{3.6.25}$$

Celkem tedy dostáváme pro každé $i = 0,1,\dots,m$

$$\pi_i = \frac{\gamma}{(m-i)\lambda}\pi_{i+1} = \frac{1}{(m-i)(m-i-1)}\left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)^2\pi_{i+2} = \dots = \frac{1}{(m-i)!}\left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)^{m-i}\pi_m$$

Jelikož musí platit

$$\sum_{i=0}^{m}\pi_i = 1,$$

tak

$$\pi_m \sum_{i=0}^{m}\frac{1}{(m-i)!}\left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)^{m-i} = 1$$

a tedy pro každé $i = 0,1,\dots,m$

$$\pi_i = \frac{\frac{1}{(m-i)!}\left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)^{m-i}}{\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{j!}\left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)^{m-j}}.$$

Vidíme, že limitní rozložení pravděpodobnosti v našem příkladě odpovídá Erlangovu vzorci (3.5.33).

Pravděpodobnost π_0 lze interpretovat jako pravděpodobnost toho, že pracovník, který má na starost uvažovaných m automatů nebude mít co na práci neboli pravděpodobnost prostoje pracovníka.

V následující tabulce jsou uvedeny konkrétní hodnoty π_i pro případ, že $m = 6$ a $\frac{\lambda}{\gamma} = 0,1$.

i	π_i	Počet automatů opravovaných	Počet automatů čekajících na opravu
0	0,4845	0	0
1	0,2907	1	0
2	0,1454	1	1
3	0,0582	1	2
4	0,0175	1	3
5	0,0035	1	4
6	0,0003	1	5

3.6.5. Úloha o obsluze m automatů n pracovníky

Uvažujme podobný případ jako v paragrafu 3.6.4. s tím rozdílem, že počet pracovníků, kteří obsluhují m automatů je roven n. Aby uvažovaný případ měl smysl je rozumné uvažovat, že $n < m$. Označme $X(.,t)$ počet nepracujících automatů v čase t. Když počet nepracujících automatů v daném čase t je i, tak v případě, že $i \leq n$ jsou všechny nepracující automaty opravovány a m-i automatů pracuje normálně. Počet pracovníků, kteří nejsou v čase t využíváni je v tomto případě n-i. Naopak, když

$i > n$, tak n z i nepracujících automatů je opravováno a vzhledem k tomu, že žádný pracovník není volný, $i-n$ automatů čeká na opravu.

Budeme uvažovat, že $\{X(\cdot,t)\}_{t\in T}$ je homogenní markovský proces s konečnou množinou stavů $I = \{0,1,\dots,m\}$ s počátečním rozložením pravděpodobnosti

$$\pi_0(0) = 1, \qquad \pi_i(0) = 0 \qquad \text{pro } i \neq 0,$$

a s intenzitami pravděpodobností přechodu danými vztahy

$$\begin{aligned}
\mu_{00} &= -m\lambda \\
\mu_{ij} &= (m-i)\lambda & j &= i+1 & i&=0,1,\dots,m-1 \\
&= i\nu & j &= i-1 & i &\le n \\
&= n\nu & j &= i-1 & i &> n \\
&= -[(m-i)\lambda + i\nu] & j &= i, & i &\le n \\
&= -[(m-i)\lambda + n\nu] & j &= i, & i &> n \\
&= 0 & j &\neq i-1, i, i+1,
\end{aligned} \qquad (3.6.27)$$

kde λ je intenzita vzniku poruchy u automatu a ν je intenzita ukončení opravy opravovaného automatu. Předpokládá se, že jak všechny automaty, tak i všichni pracovníci mající na starost tyto automaty jsou stejného charakteru, t.j. jak λ tak i ν pro všechny pracovníky a automaty jsou stejné.

Z uvedených předpokladů vyplývá, že $\{X(\cdot,t)\}_{t\in T}$ je opět speciální typ obecného procesu rozmnožování a úmrtí.

Diferenciální rovnice popisující chování absolutních rozložení pravděpodobnosti jsou podle (3.3.8) následující

$$\frac{d\pi_0(t)}{dt} = -m\lambda\pi_0(t) + \nu\pi_1(t)$$

$$\frac{d\pi_i(t)}{dt} = -[(m-i)\lambda + i\nu]\pi_0(t) + (m-i+1)\lambda\pi_{i-1}(t) + (i+1)\nu\pi_{i+1}(t)$$

$$i = 1,2,\dots,n-1 \qquad (3.6.28)$$

$$\frac{d\pi_i(t)}{dt} = -[(m-i)\lambda + n\nu]\pi_i(t) + (m-i+1)\lambda\pi_{i-1}(t) + n\nu\pi_{i+1}(t)$$

$$i = n, n+1,\dots,m-1$$

$$\frac{d\pi_m(t)}{dt} = -n\nu\pi_m(t) + \lambda\pi_{m-1}(t)$$

Řešení tohoto systému diferenciálních rovnic pro počáteční podmínky dané počátečním rozložením pravděpodobnosti by bylo možné provést úplně stejně jako dříve. Opět se však omezíme jen na zkoumání limitního rozložení pravděpodobnosti pro $t\to\infty$, které musí splňovat systém lineárních rovnic

$$0 = -m\lambda\pi_0 + \nu\pi_1$$

$$0 = -[(m-i)\lambda + i\nu]\pi_i + (m-i+1)\lambda\pi_{i-1} + (i+1)\nu\pi_{i+1} \qquad (3.6.29)$$

$$i = 1,2,\dots,n-1$$

$$0 = -[(m-i)\lambda + n\nu]\pi_i + (m-i+1)\lambda\pi_{i-1} + n\nu\pi_{i+1}$$

$$i = n, n+1,\dots,m-1$$

$$0 = -n\nu\pi_m + \lambda\pi_{m-1}$$

$i > n$, tak n z i nepracujících automatů je opravováno a vzhledem k tomu, že žádný pracovník není volný, $i-n$ automatů čeká na opravu.

Budeme uvažovat, že $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je homogenní markovský proces s konečnou množinou stavů $I = \{0,1,\dots,m\}$ s počátečním rozložením pravděpodobnosti

$$\pi_o(0) = 1, \qquad \pi_i(0) = 0 \qquad \text{pro } i \neq 0,$$

a s intenzitami pravděpodobností přechodu danými vztahy

$$\begin{aligned}
\mu_{oo} &= -m\lambda \\
\mu_{ij} &= (m-i)\lambda & j &= i+1 & i&=0,1,\dots,m-1 \\
&= i\nu & j &= i-1 & i &\leq n \\
&= n\nu & j &= i-1 & i &> n \\
&= -[(m-i)\lambda + i\nu] & j &= i, & i &\leq n \\
&= -[(m-i)\lambda + n\nu] & j &= i, & i &> n \\
&= 0 & j &\neq i-1, i, i+1,
\end{aligned} \tag{3.6.27}$$

kde λ je intenzita vzniku poruchy u automatu a ν je intenzita ukončení opravy opravovaného automatu. Předpokládá se, že jak všechny automaty, tak i všichni pracovníci mající na starost tyto automaty jsou stejného charakteru, t.j. jak λ tak i ν pro všechny pracovníky a automaty jsou stejné.

Z uvedených předpokladů vyplývá, že $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je opět speciální typ obecného procesu rozmnožování a úmrtí.

Diferenciální rovnice popisující chování absolutních rozložení pravděpodobnosti jsou podle (3.3.8) následující

$$\begin{aligned}
\frac{d\pi_o(t)}{dt} &= -m\lambda\pi_o(t) + \nu\pi_1(t) \\
\frac{d\pi_i(t)}{dt} &= -[(m-i)\lambda + i\nu]\pi_o(t) + (m-i+1)\lambda\pi_{i-1}(t) + (i+1)\nu\pi_{i+1}(t) \\
&\qquad i = 1,2,\dots,n-1 \\
\frac{d\pi_i(t)}{dt} &= -[(m-i)\lambda + n\nu]\pi_i(t) + (m-i+1)\lambda\pi_{i-1}(t) + n\nu\pi_{i+1}(t) \\
&\qquad i = n, n+1,\dots,m-1 \\
\frac{d\pi_m(t)}{dt} &= -n\nu\pi_m(t) + \lambda\pi_{m-1}(t)
\end{aligned} \tag{3.6.28}$$

Řešení tohoto systému diferenciálních rovnic pro počáteční podmínky dané počátečním rozložením pravděpodobnosti by bylo možné provést úplně stejně jako dříve. Opět se však omezíme jen na zkoumání limitního rozložení pravděpodobnosti pro $t \to \infty$, které musí splňovat systém lineárních rovnic

$$\begin{aligned}
0 &= -m\lambda\pi_o + \nu\pi_1 \\
0 &= -[(m-i)\lambda + i\nu]\pi_i + (m-i+1)\lambda\pi_{i-1} + (i+1)\nu\pi_{i+1} \\
&\qquad i = 1,2,\dots,n-1 \\
0 &= -[(m-i)\lambda + n\nu]\pi_i + (m-i+1)\lambda\pi_{i-1} + n\nu\pi_{i+1} \\
&\qquad i = n, n+1,\dots,m-1 \\
0 &= -n\nu\pi_m + \lambda\pi_{m-1}
\end{aligned} \tag{3.6.29}$$

Podobně jako v případě 3.6.4.

$$\gamma \pi_1 = m \lambda \pi_o,$$

$$2\gamma\pi_2 = (m-1)\lambda \pi_1$$

a obecně

$$i \gamma \pi_i = (m - i + 1)\lambda \pi_{i-1} \qquad \text{pro } i = 1,2,\ldots,n \qquad (3.6.30)$$

a

$$n \gamma \pi_{n+1} = (m-n) \lambda \pi_n$$

a obecně

$$n \gamma \pi_i = (m-i+1) \lambda \pi_{i-1} \qquad \text{pro } i = n+1,\ldots,m \qquad (3.6.31)$$

Vyjádříme-li všechny hodnoty π_i $i = 0,1,\ldots,m$ pomocí π_o dostaneme

$$\pi_i = \binom{m}{i}\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^i \pi_o \qquad \text{pro } i = 0,1,\ldots,n \qquad (3.6.32)$$

$$\pi_{n+i} = \frac{(m-n)!}{(m-n-i)!n^i}\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^i \pi_n$$

$$= \frac{m!}{n!(m-n-i)!n^i}\left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^{n+i} \pi_o \qquad \text{pro } i = 0,1,\ldots,m-n \qquad (3.6.33)$$

Jelikož musí platit $\sum_{i=0}^{m} \pi_i = 1$, tak z tohoto vztahu lze vypočítat hodnotu π_o a z ní potom všechny hodnoty π_i $(i = 1,2,\ldots,m)$.

V následující tabulce jsou uvedeny hodnoty π_i pro různá i při m = 20, n = 3 a $\frac{\lambda}{\gamma} = 0,1$

i	π_i	Počet automatů		Počet pracovníků	
		opravovaných	čekající na opravu	opravujících	nevyužitých
0	0,13625	0	0	0	3
1	0,27250	1	0	1	2
2	0,25888	2	0	2	1
3	0,15533	3	0	3	0
4	0,08802	3	1	3	0
5	0,04694	3	2	3	0
6	0,02347	3	3	3	0
7	0,01095	3	4	3	0
8	0,00475	3	5	3	0
9	0,00190	3	6	3	0
10	0,00070	3	7	3	0
11	0,00023	3	8	3	0
12	0,00007	3	9	3	0

3.7. Odhady intenzity pravděpodobnosti přechodu

V předcházejících paragrafech jsme se zabývali zkoumáním vlastností absolutních rozložení pravděpodobnosti a pravděpodobností přechodu pro homogenní markovské procesy, když jsme znali potřebné intenzity pravděpodobností přechodu. V tomto paragrafu se jen stručně budeme zabývat otázkami příslušných intenzit.

Tyto úvahy si ukážeme na příkladu odhadu parametru λ u Poissonova procesu.

Předpokládejme tedy, že $\{X(.,t)\}_{t\in T}$ je Poissonův proces s intenzitou pravděpodobností přechodu λ a nechť počáteční rozložení je takové, že $\pi_0(0) = 1$, $\pi_i(0) = 0$ pro $i \neq 0$. Odhad parametru λ budeme provádět na základě doby $T_i(.)$ dokud uvažovaný Poissonův proces $\{X(.,t)\}_{t\in T}$ nedosáhne stav i, t.j.:

$$T_i(.) = \inf \{\tau : X(.,\tau) = i;\ X(.,0) = 0\}. \tag{3.7.1}$$

Potom $T_i(.)$ je náhodná proměnná s distribuční funkcí

$$\begin{aligned}
P(\{\omega : T_i(\omega) \leq u\}) &= \\
&= 1 - P(\{\omega : T_i(\omega) > u\}) = \\
&= 1 - P(\{\omega : X(\omega,u) < i\}) = \\
&= 1 - \sum_{j=0}^{i-1} P(\{\omega : X(\omega,u) = j\}) = \\
&= 1 - \sum_{j=0}^{i-1} e^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^j}{j!}.
\end{aligned} \tag{3.7.2}$$

Hustota pravděpodobnosti náhodné proměnné $T_i(.)$ existuje a je dána výrazem

$$\frac{d}{du} P(\{\omega : T_i(\omega) \leq u\}) = \lambda e^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^{i-1}}{(i-1)!} \tag{3.7.3}$$

Předpokládejme, že děláme N nezávislých pozorování a dostáváme výsledky $T_i^{(1)}(.)$, $T_i^{(2)}(.), \dots, T_i^{(N)}(.)$ neboli N nezávislých náhodných proměnných se stejnou hustotou pravděpodobností znamenající doby pro různé pozorování stejného Poissonova procesu než dostaneme i skoků. Potom maximálně věrohodný odhad je takové $\widehat{\lambda}(.)$, které pro každé $\omega \in \Omega$ (t.j. každou realizaci) maximalizuje výraz

$$\log \left\{ \lambda^N e^{-\lambda \sum_{j=1}^{N} T_i^{(j)}(.)} \frac{\lambda^{N(i-1)} \left[\prod_{j=1}^{N} T_i^{(j)}(.)\right]^{i-1}}{\left[(i-1)!\right]^N} \right\} \tag{3.7.4}$$

vzhledem k parametru λ. Tento maximálně věrohodný odhad je zřejmě roven

$$\widehat{\lambda}(.) = \frac{i}{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} T_i^{(j)}(.)} \tag{3.7.5}$$

Jelikož náhodná proměnná Z(.) definovaná vztahem

$$Z(.) = 2\lambda T_i(.) \tag{3.7.6}$$

má χ^2 - rozložení pravděpodobnosti o 2i stupních volností, tak je možné stanovit pomocí kvantilů tohoto rozložení intervalový odhad parametru λ pomocí doby $T_i(.)$.

Skutečně, neboť hustota pravděpodobnosti náhodné proměnné Z(.) je

$$e^{-\frac{Z}{2}} \frac{(Z)^{i-1}}{2^i (i-1)!}$$

což je hustota pravděpodobnosti χ^2 rozložení o 2i stupních volnosti. Z tabulek χ^2 rozložení lze pro dané α_1, α_2 určit takové meze $\chi^2_{2i}(\alpha_1)$ a $\chi^2_{2i}(1-\alpha_2)$ tak, aby

$$\int_{\chi^2_{2i}(\alpha_1)}^{\infty} e^{-\frac{Z}{2}} \frac{(Z)^{i-1}}{2^i(i-1)!}\, dz = \alpha_1$$

a podobně

$$\int_{\chi^2_{2i}(1-\alpha_2)}^{\infty} e^{-\frac{z}{2}} \frac{(z)^{i-1}}{2^i(i-1)!}\, dz = 1 - \alpha_2$$

Potom

$$P(\{\omega : \chi^2_{2i}(1-\alpha_2) < Z(\omega) < \chi^2_{2i}(\alpha_1)\}) = 1 - (\alpha_1 + \alpha_2),$$

což po úpravě s použitím (3.7.6) dává

$$P(\{\omega : \frac{\chi^2_{2i}(1-\alpha_2)}{2T_i(\omega)} < \lambda < \frac{\chi^2_{2i}(\alpha_1)}{2T_i(\omega)}\}) = 1 - (\alpha_1 + \alpha_2)$$

neboli interval pro parametr λ pro danou spolehlivost $1 - (\alpha_1 + \alpha_2)$.

Kapitola IV - Stacionární náhodné procesy

4.1. Charakteristiky náhodných procesů

Vraťme se nyní k obecné definici náhodného procesu jako systému náhodných proměnných $\{X(.,t)\}_{t \in T}$. Jestliže pro každé $t \in T$ existuje střední hodnota náhodné proměnné $X(.,t)$, kterou označíme $m_x(t)$, t.j.

$$m_x(t) = E\left[X(.,t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, dF(x;\, t), \tag{4.1.1}$$

tak funkci $m_x(.)$ jako funkci t nazveme střední hodnota náhodného procesu $\{X(.,t)\}_{t \in T}$.

Poznamenejme, že střední hodnota náhodné proměnné $X(.)$ existuje, když na příklad $E\left[|X(.)|\right] < \infty$ nebo když $E\left[X^2(.)\right] < \infty$.

Předpokládejme dále, že pro každé $t \in T$ je rozptyl náhodné proměnné $X(.,t)$ konečný. Označme tento rozptyl $\sigma^2_x(t)$, tj.

$$\sigma^2_x(t) = E\left[(X(.,t) - m_x(t))^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x(t))^2 dF(x;\, t), \tag{4.1.2}$$

tak funkci $\sigma^2_x(.)$ jako funkci $t \in T$ nazveme rozptyl náhodného procesu $\{X(.,t)\}_{t \in T}$.

Nechť nyní $t_1, t_2 \in T$ jsou libovolné hodnoty parametru a označme

$$B_x(t_1, t_2) = E\left[(X(.,t_1) - m_x(t_1))(X(.,t_2) - m_x(t_2))\right] \tag{4.1.3}$$

Tato střední hodnota existuje, neboť podle Schwarzovy nerovnosti se dá psát

$$\left| B_x(t_1, t_2) \right| \le \sqrt{\sigma^2_x(t_1)\sigma^2_x(t_2)} \tag{4.1.4}$$

což vzhledem k předpokladu konečnosti rozptylu je konečné. Střední hodnota (4.1.3) uvažovaná jako funkce definovaná na kartézském součinu $T \times T$ se nazývá korelační funkce náhodného procesu $\{X(.,t)\}_{t \in T}$.

Vlastnosti střední hodnoty a rozptylu náhodného procesu jsou stejné jako vlastnosti středních hodnot a rozptylů obyčejných náhodných proměnných.

Uvedeme si zde některé základní vlastnosti korelační funkce náhodného procesu $\{X(.,t)\}_{t \in T}$.

(1) Pro každé $t_1, t_2 \in T$

$$B_x(t_1, t_2) = B_x(t_2, t_1) \; ; \qquad (4.1.5)$$

(2) Pro každé $t \in T$

$$B_x(t, t) = \sigma_x^2(t) \geq 0; \qquad (4.1.6)$$

(3) Nechť $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ a $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ jsou libovolné n-tice parametrů resp. reálných čísel, tak

$$\sum_{i,j=1}^{n} B_x(t_i, t_j)\alpha_i \alpha_j \geq 0. \qquad (4.1.7)$$

Důkaz tohoto vztahu plyne ze zřejmých úprav, neboť

$$\sum_{i,j=1}^{n} B_x(t_i,t_j)\alpha_i\alpha_j = E\left[\sum_{i=j}^{n}\sum_{j=1}^{n} (X(.,t_i)-m_x(t_i))(X(.,t_j)-m_x(t_j))\alpha_i\alpha_j\right] =$$

$$= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} (X(.,t_i) - m_x(t_i))\right)^2\right] \geq 0.$$

Funkce splňující podmínku (4.1.7) se nazývá positivně definitivní.

(4) Pro každé $t_1, t_2 \in T$

$$|B_x(t_1, t_2)| < \sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2). \qquad (4.1.8)$$

Důkaz tohoto tvrzení vyplývá ze Schwartzovy nerovnosti stejně jako vztah (4.1.4).

Střední hodnota, rozptyl a korelační funkce nám dávají charakteristiky náhodného procesu a jak střední hodnota, tak i rozptyl mají tentýž význam jako v teorii pravděpodobnosti pro obyčejné náhodné proměnné. Korelační funkce $B_x(t_1, t_2)$ nám naopak dává jistou míru závislosti mezi náhodnými proměnnými $X(.,t_1)$ a $X(.,t_2)$. Hodnota

$$\frac{B_x(t_1, t_2)}{\sqrt{\sigma_x^2(t_1)\sigma_x^2(t_2)}}, \qquad (4.1.9)$$

která může být podle (4.1.8) jen v intervalu $< -1, 1 >$, se v teorii pravděpodobnosti nazývá koeficient korelace a používá se jako míra závislosti mezi náhodnými proměnnými $X(.,t_1)$ a $X(.,t_2)$. Skutečně, neboť, když $X(.,t_1)$ a $X(.,t_2)$ jsou statisticky nezávislé, je koeficient korelace roven 0 a naopak, když existují reálná čísla α a β taková, že

$$X(., t_2) = \alpha X(., t_1) + \beta ,$$

t.j. když náhodné proměnné $X(., t_1)$ a $X(., t_2)$ jsou lineárně závislé, tak

$$\frac{B_x(t_1, t_2)}{\sqrt{\sigma_x^2(t_1)\sigma_x^2(t_2)}} = \frac{\sigma_x^2(t_1)}{\sqrt{\alpha^2\sigma_x^2(t_1)\sigma_x^2(t_1)}} = \operatorname{sign} \alpha = \begin{cases} 1 & \text{když } \alpha > 0 \\ -1 & \text{když } \alpha < 0. \end{cases}$$

Může se ovšem stát, že koeficient korelace je roven 0 a přesto uvažované náhodné proměnné jsou funkčně závislé, jak bude uvedeno v následujícím příkladě.

Příklad 4.1: Nechť $\alpha(.)$ je obyčejná náhodná proměnná s rovnoměrným rozložením pravděpodobnosti na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ a nechť $X(., t_1)$ a $X(., t_2)$ jsou náhodné proměnné definované vztahy

$$X(., t_1) = \cos \alpha(.)$$

$$X(., t_2) = \sin \alpha(.) = \sqrt{1 - X^2(., t_1)}.$$

Dokažte, že koeficient korelace mezi $X(., t_1)$ a $X(., t_2)$ je nulový!

Jelikož

$$E\left[X(., t_1)\right] = E\left[\cos \alpha(.)\right] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \alpha \, d\alpha = 0$$

a podobně i

$$E\left[X(., t_1)\right] = E\left[\sin \alpha(.)\right] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \alpha \, d\alpha = 0,$$

tak

$$B_x(t_1, t_2) = E\left[X(., t_1)X(., t_2)\right] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos\alpha \sin\alpha \, d\alpha =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \sin 2\alpha \, d\alpha = 0 \qquad *$$

Příklad 4.2: Vypočtěte střední hodnotu, rozptyl a korelační funkci Poissonova náhodného procesu s parametrem λ !

Pro libovolné $t \in T$ je $X(., t)$ náhodná proměnná, jejíž rozložení pravděpodobnosti je dáno absolutním rozložením pravděpodobnosti náhodného procesu $\{X(., t)\}_{t \in T}$ v čase $t \in T$. Pro Poissonův proces je toto rozložení podle (3.5.8) dáno Poissonovým rozložením pravděpodobnosti s parametrem λt. Potom zřejmě pro každé t

$$E\left[X(., t)\right] = \sum_{i=0}^{\infty} i \, \pi_i(t) = \sum_{i=0}^{\infty} i \, \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} = \lambda t$$

a tedy střední hodnota Poissonova procesu je funkce $m_x(.)$, která pro každé $t \in T$ je dána vztahem

$$m_x(t) = \lambda t.$$

Rozptyl náhodné proměnné $X(., t)$ existuje a je roven

$$\sigma_x^2(t) = E\left[(X(.,t)-\lambda t)^2\right] = \sum_{i=0}^{\infty} (i-\lambda t)^2 e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!} = \lambda t.$$

Potom rozptyl Poissonova procesu $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je funkce $\sigma_x^2(.)$, která pro každé $t \in T$ je dána

$$\sigma_x^2(t) = \lambda t.$$

Vypočítáme si nyní korelační funkci Poissonova procesu $\{X(.,t)\}_{t\in T}$. K tomu však je nutné znát pro každé t_1, t_2 a i, j pravděpodobnost

$$P(\{\omega : X(\omega, t_1) = i,\ X(\omega, t_2) = j\}).$$

Když $t_1 \leq t_2$ je pro $i > j$ tato pravděpodobnost rovna 0 a pro $i \leq j$ je tato pravděpodobnost zřejmě dle (3.5.9) rovna

$$\pi_i(t_1)\ \pi_{j-i}(t_2-t_1) = e^{-\lambda t_1} \frac{(\lambda t_1)^i}{i!} e^{-\lambda(t_2-t_1)} \frac{[\lambda(t_2-t_1)]^{j-i}}{(j-i)!}.$$

Potom pro $t_1 \leq t_2$

$$B_x(t_1, t_2) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=i}^{\infty} (i-\lambda t_1)(j-\lambda t_2)\, \pi_i(t_1)\, \pi_{j-i}(t_2-t_1) = \lambda t_1. \tag{4.1.10}$$

Podobně pro $t_1 \geq t_2$ máme

$$B_x(t_1, t_2) = \lambda t_2 \tag{4.1.11}$$

Spojíme-li (4.1.10) a (4.1.11) máme

$$B_x(t_1, t_2) = \lambda \min(t_1, t_2)$$

⊛

Příklad 4.3: Vypočtěte střední hodnotu a rozptyl náhodného procesu rozmnožování a úmrtí ve specifikaci (B), jehož počáteční rozložení pravděpodobnosti je dáno vztahem (3.5.35) a jehož absolutní rozložení pravděpodobnosti splňuje systém diferenciálních rovnic (3.5.36)!

I když bychom k výpočtu střední hodnoty a rozptylu mohli použít ihned obecné vztahy pro absolutní rozložení pravděpodobnosti (3.5.37), ukážeme si poněkud jiný způsob, který se však dá použít i v jiných případech náhodných procesů markovského typu.

Obecné diferenciální rovnice v našem příkladě jsou dány systémem (3.5.36). Násobme každou z těchto rovnic příslušným i a sečtěme je přes všechny možné hodnoty i od 1 do ∞. Dostaneme tak

$$\sum_{i=1}^{\infty} i \frac{d\,\pi_i(t)}{dt} = -(\lambda+\nu)\sum_{i=1}^{\infty} i^2 \pi_i(t) + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} i(i-1)\pi_{i-1}(t) + \nu \sum_{i=1}^{\infty} i(i+1)\pi_{i+1}(t) \tag{4.1.12}$$

Pravá strana této rovnice může být přepsána na tvar

$$-(\lambda+\nu)\sum_{i=1}^{\infty} i^2\pi_i(t) + \lambda\sum_{i=1}^{\infty}(i+1)i\,\pi_i(t) + \nu\sum_{i=1}^{\infty}(i-1)i\,\pi_i(t) =$$

$$= (\lambda-\nu)\sum_{i=1}^{\infty} i\,\pi_i(t),$$

neboli

$$\sum_{i=1}^{\infty} i\,\frac{d\,\pi_i(t)}{dt} = (\lambda-\nu)\sum_{i=1}^{\infty} i\,\pi_i(t). \qquad (4.1.13)$$

Levá strana však může být vyjádřena jako $\frac{d}{dt}\, m_x(t)$ a pravá jako $(\lambda-\nu)\, m_x(t)$. Vidíme tedy, že střední hodnota musí vyhovovat diferenciální rovnici

$$\frac{d}{dt}\, m(t) = (\lambda-\nu)\, m(t). \qquad (4.1.14)$$

Jelikož $m_x(0) = \sum_{i=1}^{\infty} i\,\pi_i(t)$, tak podle předpokladu o počátečním rozložení pravděpodobnosti hledáme takové řešení diferenciální rovnice (4.1.14) pro které $m_x(0) = 1$.

Řešením rovnice (4.1.14) spolu s touto počáteční podmínkou je funkce

$$m_x(t) = e^{(\lambda-\nu)t} + c,$$

kde c je taková konstanta, aby $1 + c = 1$, neboli $c = 0$. Je tedy střední hodnota uvažovaného náhodného procesu funkce $m_x(.)$, taková, že pro každé $t \in T$

$$m_x(t) = e^{(\lambda-\nu)t}. \qquad (4.1.15)$$

Rozptyl náhodného procesu $\{X(.,t)\}_{t\in T}$ z tohoto příkladu stanovíme podobně a to tak, že rovnice (3.5.36) vynásobíme postupně i^2 a sečteme přes všechna i od 1 do ∞. Po jednoduché úpravě dostaneme

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{\infty} i^2\pi_i(t) = 2(\lambda-\nu)\sum_{i=1}^{\infty} i^2\pi_i(t) + (\lambda+\nu)\sum_{i=1}^{\infty} i\,\pi_i(t). \qquad (4.1.16)$$

Rozptyl $\sigma_x^2(t) = \sum_{i=1}^{\infty} i^2\pi_i(t) - m_x^2(t)$, což po dosazení do (4.1.16) dá

$$\frac{d}{dt}\left[\sigma_x^2(t) + m_x^2(t)\right] = 2(\lambda-\nu)\left[\sigma_x^2(t) + m_x^2(t)\right] + (\lambda+\nu)\, m_x(t). \qquad (4.1.17)$$

Použijeme-li (4.1.15) a upravíme, tak

$$\frac{d}{dt}\sigma_x^2(t) = 2(\lambda-\nu)\sigma_x^2(t) + (\lambda+\nu)\, e^{(\lambda-\nu)t} \qquad (4.1.18)$$

Uvědomíme-li si, že podle předpokladu o počátečním rozložení pravděpodobnosti je $\sigma_x^2(0) = 0$, tak řešení (4.1.18) s touto počáteční podmínkou je dáno pomocí

$$\sigma_x^2(t) = \frac{\lambda+\nu}{\lambda-\nu}\left[1 - e^{-(\lambda-\nu)t}\right] e^{2(\lambda-\nu)t} \qquad (4.1.19)$$

⊛

Příklad 4.4: Určete střední hodnotu, rozptyl a korelační funkci pro náhodný proces rozmnožování a úmrtí v případě specifikace (C)!

Podle definice střední hodnoty je pro uvažovaný náhodný proces $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ podle (3.5.46)

$$m_x(t) = E\left[X(.,t)\right] = 0 \,.\, \pi_o(t) + 1 \,.\, \pi_1(t) + 2 \,.\, \pi_2(t)$$

$$= (\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{5}\, e^{-5\gamma t}) + 2(\tfrac{2}{5} - \tfrac{2}{5}\, e^{-5\gamma t}) = \tfrac{6}{5} - \tfrac{1}{5}\, e^{-5\gamma t} \tag{4.1.20}$$

Rozptyl náhodného procesu $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je funkce $\sigma_x^2(.)$, která pro každé $t \in T$ je rovna

$$\sigma_x^2(t) = E\left[(X(.,t) - m_x(t))^2\right] = E\left[X^2(.,t)\right] - m_x^2(t) =$$

$$= \tfrac{14}{25} - \tfrac{13}{25}\, e^{-5\gamma t} - \tfrac{1}{25}\, e^{-10\gamma t} \tag{4.1.21}$$

Korelační funkce náhodného procesu $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je pro každé t_1, $t_2 \in T$ $(t_1 \leq t_2)$ dána vztahem

$$B_x(t_1, t_2) = E\left[X(.,t_1)X(.,t_2)\right] - m_x(t_1)m_x(t_2) =$$

$$= \tfrac{6}{25}\, e^{-5\gamma t_1} - \tfrac{17}{75}\, e^{-5\gamma t_2} + \tfrac{2}{75}\, e^{-5\gamma(t_2 - t_1)} + \tag{4.1.22}$$

$$+ \tfrac{8}{15}\, e^{-2\gamma(t_2 - t_1)} - \tfrac{8}{15}\, e^{-2\gamma t_2 - 3\gamma t_1} - \tfrac{1}{25}\, e^{-10\gamma t_1}$$

⊛

Příklad 4.5: Nechť $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je Poissonův náhodný proces s parametrem λ a nechť počáteční rozložení pravděpodobnosti je dáno pomocí

$$\pi_o(0) = 1, \qquad \pi_i(0) = 0 \quad \text{pro} \quad i \neq 0$$

Nechť $X(.)$ je náhodná proměnná s hodnotami 0 a 1, která pro každé $t \in T$ je nezávislá s náhodnou proměnnou $X(.,t)$ taková, že

$$P(\{\omega : X(\omega) = 0\}) = P(\{\omega : X(\omega) = 1\}) = \tfrac{1}{2}. \tag{4.1.23}$$

Definujme nový náhodný proces $\{Y(.,t)\}_{t \in T}$ vztahy

$$Y(.,t) = X(.,t) + X(.) \quad [\text{mod } 2] \text{ pro } t \in T. \tag{4.1.24}$$

Určete absolutní rozložení pravděpodobnosti náhodného procesu $\{Y(.,t)\}_{t \in T}$ a jeho střední hodnotu, rozptyl a korelační funkci!

Podle definice (4.1.24) je $\{Y(.,t)\}_{t \in T}$ náhodný proces s hodnotami 0 a 1 a pro každé $t \in T$

$$P(\{\omega: Y(\omega,t) = 0\}) = P(\{\omega: X(\omega) = 0\}).\ P(\{\omega: X(\omega,t) \text{ je sudé číslo}\}) +$$

$$+ P(\{\omega: X(\omega) = 1\}).\ P(\{\omega: X(\omega,t) \text{ je liché číslo}\}),$$

což podle (4.1.23) je rovno 1/2. Podobně i

$$P(\{\omega \,.\, Y(\omega, t) = 1\}) = \tfrac{1}{2}. \tag{4.1.25}$$

Střední hodnota náhodného procesu $\{Y(.,t)\}_{t \in T}$ je proto pro $t \in T$ rovna

$$m_Y(t) = E\left[Y(., t)\right] = \tfrac{1}{2}. \tag{4.1.26}$$

a rozptyl je pro každé t roven

$$\sigma_Y^2(t) = E\left[(Y(.,t) - \tfrac{1}{2})^2\right] = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}. \tag{4.1.27}$$

Korelační funkce náhodného procesu $\{Y(.,t)\}_{t \in T}$ je pro každé $t_1, t_2 \in T$ $(t_1 \leq t_2)$ definována vztahem

$$B_Y(t_1,t_2) = E\left[Y(.,t_1)\, Y(.,t_2)\right] - m_Y(t_1)\, m_Y(t_2) =$$

$$= P(\{\omega : Y(\omega,t_1) = 1\}) \,.\, P(\{\omega : X(\omega,t_2) - X(\omega,t_1) \text{ je sudé číslo}\}).$$

$$- \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda(t_2-t_1)} \frac{[\lambda(t_2-t_1)]^{2k}}{(2k)!} - \tfrac{1}{4}$$

Ale

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{[(t_2-t_1)]^{2k}}{(2k)!} = \tfrac{1}{2}\left[e^{\lambda(t_2-t_1)} + e^{-\lambda(t_2-t_1)}\right]$$

a tedy

$$B_Y(t_1,t_2) = \tfrac{1}{4} e^{-\lambda(t_2-t_1)}\left[e^{\lambda(t_2-t_1)} + e^{-\lambda(t_2-t_1)}\right] - \tfrac{1}{4} =$$

$$= \tfrac{1}{4}\, e^{-2\lambda(t_2-t_1)}. \tag{4.1.28}$$

Podobně bychom dostali pro $t_1 \geq t_2$, že

$$B_Y(t_1, t_2) = \tfrac{1}{4} e^{-2\lambda(t_1-t_2)} \tag{4.1.29}$$

a tedy obecně pro $t_1, t_2 \in T$

$$B_Y(t_1, t_2) = \tfrac{1}{4}\, e^{-2\lambda|t_2-t_1|} \tag{4.1.30}$$

⊛

4.2. Stacionární v užším a širším smyslu náhodné procesy

Náhodný proces $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ se nazývá stacionární přesněji stacionární v užším smyslu, když pro každé přirozené číslo n, každou n-tici reálných čísel $t_1, t_2, \ldots, t_n$ a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a libovolné reálné číslo τ

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n;\, t_1+\tau,\, t_2+\tau, \ldots,\, t_n+\tau) = \\ = F(x_1, x_2, \ldots, x_n;\, t_1, t_2, \ldots, t_n). \tag{4.2.1}$$

t.j. když všechny konečněrozměrné distribuční funkce náhodného procesu $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ jsou nezávislé na posunutí počátečního okamžiku t = 0.

Jako důsledek této definice stacionarity, lze dokázat, že všechny jednorozměrné distribuční funkce nezávislí na t a všechny dvourozměrné distribuční funkce závisí pouze na rozdílu časových parametrů.

Skutečně, neboť pro stacionární proces $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ podle definice pro každé reálné t, x a τ platí

$$F(x;\, t+\tau) = F(x;\, t).$$

Volíme-li speciálně $\tau = -t$, tak

$$F(x;\, t) = F(x;\, t-t) = F(x;\, 0). \tag{4.2.2}$$

Dále pro každé t_1, t_2, x_1, x_2 a τ platí

$$F(x_1, x_2;\, t_1+\tau,\, t_2+\tau) = F(x_1, x_2;\, t_1,\, t_2).$$

Speciálně pro $\tau = -t_1$ je

$$F(x_1,x_2;\, t_1,\, t_2) = F(x_1,x_2;\, t_1-t_1, t_2-t_1) = F(x_1,x_2; 0, t_2-t_1) \tag{4.2.3}$$

Z těchto důsledků však okamžitě vyplývá, že pro stacionární náhodný proces $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je střední hodnota, pokud existuje, konstantní a korelační funkce je funkcí pouze rozdílu argumentů. Skutečně, neboť pro každé $t \in T$

$$m_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, dF(x;t) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, dF(x;0) = m_x(0) \tag{4.2.4}$$

a pro každé t_1, $t_2 \in T$

$$\begin{aligned} B_x(t_1,t_2) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-m_x(0))(y-m_x(0))\,dF(x,y;t_1,t_2) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-m_x(0))(y-m_x(0))\,dF(x,y;\, 0,\, t_2-t_1) = \\ &= B_x(0,\, t_2-t_1). \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

Pro stacionární náhodné procesy budeme používat označení

$$B_x(t_1,\, t_2) = B_x(0,\, t_2-t_1) = B_x(t_2-t_1). \tag{4.2.6}$$

Korelační funkce stacionárního náhodného procesu je tedy funkcí pouze jedné reálné proměnné.

Z vlastností korelačních funkcí (4.1.5) - (4.1.8) vyplývá pro korelační funkci stacionárního procesu $\{X(.,t)\}_{t \in T}$, že má následující vlastnosti:

(1) $B_x(-t) = B_x(t)$ pro každé $t \in T$; (4.2.7)

(2) $B_x(0) = \sigma_x^2(t) \geq 0$; (4.2.8)

(3) pro každou n-tici reálných čísel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ a $t_1, t_2, \ldots, t_n$ platí

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} B_x(t_i - t_j)\,\alpha_i \alpha_j \geq 0; \qquad (4.2.9)$$

(4) pro každé $t \in T$

$$|B_x(t)| \leq B_x(0) \qquad (4.2.10)$$

Příklad 4.6: Nechť $X(.)$ je náhodná proměnná s distribuční funkcí $G(.)$. Definujme pro každé reálné číslo t

$$X(., t) = X(.).$$

Potom $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je stacionární náhodný proces.

To, že $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je náhodný proces je zřejmé. Pro každé přirozené číslo n a libovolné n-tice reálných čísel $t_1, t_2, \ldots, t_n$ a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je jeho distribuční funkce dána vztahem

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) = P(\bigcap_{i=1}^{n} \{\omega : X(\omega, t_i) \leq x_i\}) =$$

$$= P(\{\omega : X(\omega) \leq \min_i x_i\}) = G(\min_i x_i).$$

Pro každé reálné číslo τ však

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \ldots, t_n + \tau) =$$

$$= P(\bigcap_{i=1}^{n} \{\omega : X(\omega, t_i + \tau) \leq x_i\}) = G(\min_i x_i)$$

a vidíme, že náhodný proces $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je stacionární.

Střední hodnota náhodného procesu $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je pro každé $t \in T$ rovna

$$m_x(t) = E[X(.,t)] = E[X(.)],$$

rozptyl

$$\sigma_x^2(t) = E[(X(.,t) - m_x(t))^2] = E[(X(.) - E\,X(.))^2]$$

a korelační funkce je dána pomocí

$$B_x(t_1, t_2) = E[(X(.,t_1) - m_x(t_1))(X(.,t_2) - m_x(t_2))] = \sigma_x^2(0) \qquad (*)$$

Příklad 4.7: Nechť $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je homogenní markovský proces s množinou stavů $I = \{0,1,2,\ldots\}$ mající tu vlastnost, že pro každé $t \in T$ a $i \in I$ je

$$\pi_i(t) = \pi_i(0) \qquad (4.2.11)$$

Dokažte, že $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je stacionární náhodný proces!

Nechť $t_1, t_2, \ldots, t_n$ a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou libovolné n-tice parametrů a stavů procesu. Potom podle vlastností homogenního markovského procesu za předpokladu $t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$, je pro každé τ

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} \{\omega : X(\omega, t_i) = x_i\}) = \pi_{x_1}(t_1)\, p_{x_1 x_2}(t_2 - t_1) \ldots$$

$$\ldots p_{x_{n-1} x_n}(t_n - t_{n-1}) = \pi_{x_1}(t_1 + \tau) p_{x_1 x_2}((t_2 + \tau) - (t_1 + \tau)) \ldots$$

$$\ldots p_{x_{n-1} x_n}((t_n + \tau) - (t_{n-1} + \tau)) =$$

$$= P(\bigcap_{i=1}^{n} \{\omega : X(\omega, t_i + \tau) = x_i\}).$$

Střední hodnota pro tento markovský proces je zřejmě rovna pro každé $t \in T$

$$m_x(t) = \sum_{i \in I} i\, \pi_i(t) = \sum_{i \in I} i\, \pi_i(0) = m_x(0)$$

a korelační funkce je pro každé $t_2 \geq t_1$ dána vztahem

$$B_x(t_1, t_2) = \sum_{i,j \in I} ij\, P(\{\omega : X(\omega, t_1) = i,\ X(\omega, t_2) = j\}) -$$

$$- m_x^2(0) = \sum_{i,j \in I} ij\, \pi_i(t_1) p_{ij}(t_2 - t_1) - m_x^2(0)$$

a pro $t_2 \leq t_1$ podobně

$$B_x(t_1, t_2) = \sum_{i,j \in I} ij\, \pi_j(t_2) p_{ji}(t_1 - t_2) - m_x^2(0).$$

Jelikož platí (4.2.11), tak korelační funkce náhodného procesu $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ závisí pouze na rozdílu argumentů. ⊛

Řekneme, že náhodný proces $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je stacionární v širším smyslu, když jeho střední hodnota je konstanta a korelační funkce $B_x(t_1, t_2)$ závisí jen na rozdílu $(t_2 - t_1)$.

Ze vztahů (4.2.4) a (4.2.5) vyplývá, že náhodný proces stacionární v užším smyslu je stacionární v širším smyslu. Opak však nemusí obecně platit. Existuje však velká třída náhodných procesů, obsahující t.zv. Gaussovy náhodné procesy, pro něž jsou oba pojmy stacionarity ekvivalentní.

4.3. Gaussovy náhodné procesy

Náhodný proces $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ se nazývá Gaussův náhodný proces, když jeho všechny konečněrozměrné distribuční funkce jsou Gaussovské.

Jestliže $\{X(.,t)\}_{t\in T}$ je Gaussův náhodný proces se střední hodnotou $m_x(.)$ a s korelační funkcí $B_x(.,.)$, tak pro každé n a každou n-tici parametrů $t_1, t_2, \ldots, t_n$ je n-rozměrná hustota pravděpodobnosti náhodných proměnných $X(.,t_1), X(.,t_2), \ldots, X(.,t_n)$ dána vztahem

$$\frac{\sqrt{\|a_{ij}\|}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \left[x_i - m_x(t_i)\right]\left[x_j - m_x(t_j)\right], \qquad (4.3.1)$$

kde (a_{ij}) je inversní matice k matici $(B_x(t_i,t_j))$ a $\|a_{ij}\|$ je její determinant.

Jestliže střední hodnota je konstantní, t.j. $m_x(t) = m_x(0)$ pro každé $t \in T$ a jestliže korelační funkce $B_x(.,.)$ závisí jen na rozdílu parametrů, t.j. pro každé $t_1, t_2 \in T$

$$B_x(t_1, t_2) = B_x(t_2 - t_1),$$

tak zřejmě i prvky matice (a_{ij}) závisí jen na rozdílech $t_i - t_j$ $(i,j = 1,2,\ldots,n)$ a proto i hustota pravděpodobnosti (4.3.1) závisí jen na těchto rozdílech. Odtud pak dostáváme, že hustoty pravděpodobnosti náhodných proměnných $X(.,t_1), X(.,t_2), \ldots, X(.,t_n)$ a náhodných proměnných $X(.,t_1+\tau), X(.,t_2+\tau), \ldots, X(.,t_n+\tau)$ jsou stejné a proto i jim odpovídající distribuční funkce jsou též stejné.

Dokázali jsme tak, že Gaussův náhodný proces, který je stacionární v širším smyslu je stacionární i v užším smyslu.

Dále si dokážeme, že ke každé reálné funkci $m(.)$ definované na T a ke každé funkci $B(.,.)$ definované na $T \times T$ splňující podmínky (4.1.5) a (4.1.7) existuje Gaussův náhodný proces $\{X(.,t)\}_{t\in T}$ takový, že $m_x(.) = m(.)$ a $B_x(.,.) = B(.,.)$.

Pro každé n a každou n-tici $t_1, t_2, \ldots, t_n$ z T existuje n-tice Gaussovských náhodných proměnných $X(.,t_1), X(.,t_2), \ldots, X(.,t_n)$, jejíž hustoty pravděpodobnosti jsou dány pomocí (4.3.1).

Vezmeme-li k těmto hustotám odpovídající distribuční funkce, tak splňují podmínky (1.1.5) a (1.1.6). Podle úvah z kapitoly I pak existuje náhodný proces $\{X(.,t)\}_{t\in T}$ mající tento systém konečněrozměrných distribučních funkcí za svůj systém konečněrozměrných distribučních funkcí. Nebudeme zde provádět do detailů důkazy uvedených tvrzení, neboť by to vyžadovalo rozbor t.zv. singulárních případů a zbytečně by zvětšovalo rozsah této části.

Potom ale tento uvažovaný náhodný proces $\{X(.,t)\}_{t\in T}$ má tu vlastnost, že pro každé $t \in T$

$$m_x(t) = m(t)$$

a pro každé $t_1, t_2 \in T$

$$B_x(t_1, t_2) = B(t_1, t_2).$$

Gaussovské náhodné procesy mají, stejně tak jako v teorii pravděpodobnosti Gaussovy náhodné proměnné, velkou důležitost v aplikacích, poněvadž mnoho náhodných procesů v aplikacích lze považovat za Gaussovy. Je to výsledkem t.zv. centrální limitní věty.

Nebudeme se zde hlouběji zabývati řešením některých důležitých problémů pro Gaussovy náhodné procesy, ale ukážeme na jednom příkladě řešení problému nalezení statistických charakteristik doby, po kterou je náhodný proces v daném časovém intervalu nad nějakou danou hladinou. Pro Gaussovy náhodné procesy je možno takový problém řešit, zatímco pro náhodné procesy jiného typu je řešení analytickými metodami, až na velmi jednoduché případy, nemožné.

Příklad 4.8: Nechť $\{X(.,t)\}_{t\in T}$ je Gaussův stacionární náhodný proces se střední hodnotou 0 a korelační funkcí $B_x(t) = e^{-\alpha|t|}$. Nechť u je dané libovolné reálné číslo. Uvažujme nový náhodný proces $\{Y(.,t)\}_{t\in T}$ definovaný vztahem

$$\begin{aligned} Y(\omega, t) &= 1 \quad \text{když} \quad X(\omega,t) > u \\ &= 0 \quad \text{když} \quad X(\omega,t) \leq u. \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

Označme dále pro dané $a > 0$

$$Z(.) = \int_0^a Y(.,t)\, dt, \tag{4.3.3}$$

t.j. dobu v intervalu $\langle 0, a\rangle$ po kterou je náhodný proces $\{X(.,t)\}_{t\in T}$ nad hladinou u.

Určete střední hodnotu a rozptyl náhodné proměnné Z(.).

Abychom se přesvědčili o tom, že má smysl hovořit o Z(.) jako o náhodné proměnné, musíme dokázat, že existuje integrál (4.3.3). Podle věty 4.6. dokázané dále, musíme dokázat existenci integrálu

$$\int_0^a \int_0^a B_Y(t,s)\, dt\, ds, \tag{4.3.4}$$

t.j. musíme nejprve odvodit korelační funkci náhodného procesu $\{Y(.,t)\}_{t\in T}$.

Pro každé $t \in T$ dostáváme

$$m_Y(t) = E\left[Y(.,t)\right] = P(\{\omega : X(\omega,t) > u\}) = 1 - \Phi(u), \tag{4.3.5}$$

kde Φ je distribuční funkce Gaussovy náhodné proměnné se střední hodnotou 0 a rozptylem 1, neboť střední hodnota náhodné proměnné X(.,t) je rovna 0 a její rozptyl je 1.

Potom však pro každé $t_1, t_2 \in T$

$$E\left[Y(.,t_1)Y(.,t_2)\right] = P(\{\omega : X(\omega,t_1) > u,\ X(\omega, t_2) > u\}). \tag{4.3.6}$$

Podle předpokladu je dvojice náhodných proměnných $(X(.,t_1), X(.,t_2))$ dvojicí Gaussových náhodných proměnných se stejnou hustotou pravděpodobnosti a s koeficientem korelace

$$\varrho = e^{-\alpha|t_2-t_1|} \tag{4.3.7}$$

Jejich dvourozměrná hustota pravděpodobnosti je dána výrazem

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\varrho^2}} \exp - \frac{1}{2\sqrt{1-\varrho^2}} (x_1^2 - 2\varrho x_1 x_2 + x_2^2) \tag{4.3.8}$$

Tuto hustotu pravděpodobnosti lze rozložit v Taylorovu řadu podle ϱ a je v tomto případě dána řadou

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Phi^{(i+1)}(x_1)\,\Phi^{(i+1)}(x_2)}{i!}\varrho^{i}, \tag{4.3.9}$$

jak se lze lehce přesvědčit. Potom ale

$$P(\{\omega : X(\omega, t_1) > u,\ X(\omega, t_2) > u\}) =$$

$$= \int_u^{\infty}\int_u^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Phi^{(i+1)}(x_1)\,\Phi^{(i+1)}(x_2)}{i!}\varrho^{i}\, dx_1\, dx_2 =$$

$$= \int_u^{\infty}\int_u^{\infty} \left[\Phi^{(1)}(x_1)\,\Phi^{(1)}(x_2) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Phi^{(i+1)}(x_1)\,\Phi^{(i+1)}(x_2)}{i!}\varrho^{i}\right] dx_1\, dx_2 = \tag{4.3.10}$$

$$= \left[1 - \Phi(u)\right]^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!}\varrho^{i}\left[\Phi^{(i)}(u)\right]^2.$$

Jelikož

$$B_Y(t_1,t_2) = \left[1 - \Phi(u)\right]^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!}\varrho^{i}\left[\Phi^{(i)}(u)\right]^2 - \left[1 - \Phi(u)\right]^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!}\varrho^{i}\left[\Phi^{(i)}(u)\right]^2, \tag{4.3.11}$$

tak existuje integrál (4.3.3), neboť

$$\int_0^a\int_0^a e^{-\alpha i|t_2-t_1|}\, dt_1\, dt_2 = \frac{2}{\alpha i}\left[a - \frac{1-e^{-\alpha i a}}{\alpha i}\right]$$

Je proto $Z(.)$ náhodná proměnná, jejíž střední hodnota je

$$E[Z(.)] = \int_0^a P(\{\omega : Y(\omega,t) = 1\})\, dt = a\left[1 - \Phi(u)\right] \tag{4.3.12}$$

a rozptyl

$$D[Z(.)] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{\alpha i . i!}\left[a - \frac{1-e^{-\alpha i a}}{\alpha i}\right]\left[\Phi^{(i)}(u)\right]^2 \tag{4.3.13}$$

(*)

4.4. Spektrální funkce

Tak jako v matematice je pro některé úvahy lepší vycházet ne přímo z daných funkcí, ale jejich obrazů na příklad z Fourierových transformací, Laplaceových transformací a pod., tak totéž má význam i pro korelační funkci.

Dokážeme si nyní větu o vyjádření korelační funkce stacionárního náhodného procesu.

Věta 4.1.: K tomu, aby reálná spojitá funkce $B(.)$ byla korelační funkcí je nutné a stačí, aby existovala distribuční funkce $G(.)$ taková, že pro každé t

$$B(t) = B(0) \int_0^\infty \cos(ts)dG(s), \quad B(0) \geq 0 \qquad (4.4.1)$$

Důkaz: Nechť $B(.)$ je spojitá korelační funkce. Potom podle vlastnosti (2.1.7) je positivně definitní a proto podle Bochner-Chinčinovy věty se dá napsat ve tvaru

$$\frac{B(t)}{B(0)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{its}\, d\, G^*(s),$$

kde $G^*(.)$ je nějaká distribuční funkce. Jelikož ale $B(.)$ je reálná, tak musí platit

$$\frac{B(t)}{B(0)} = \int_{-\infty}^{\infty} \cos ts\, dG^*(s) = \int_0^\infty \cos ts\, dG(s)$$

pro všechna t, kde $G(s) = G^*(s) - G^*(-s)$.

Předpokládejme nyní, že $B(.)$ je nějaká funkce, která se dá vyjádřit ve tvaru (4.4.1). Potom $B(.)$ je positivně definitní s vlastností $B(-t) = B(t)$ pro každé $t \in T$. Podle úvah paragrafu 4.3 existuje Gaussův stacionární náhodný proces mající $B(.)$ za svou korelační funkci a tedy jsme dokázali, že $B(.)$ je korelační funkce.

⊛

Distribuční funkce $G(.)$ vyskytující se ve výrazu (4.4.1) se nazývá spektrální funkce stacionárního náhodného procesu.

Jestliže existuje derivace spektrální funkce, pak tuto derivaci nazveme spektrální hustota stacionárního náhodného procesu.

Dá se dokázat, že pro korelační funkci $B_x(.)$ stacionárního náhodného procesu splňující podmínku

$$\int_{-\infty}^{\infty} |B_x(t)|\, dt < \infty \qquad (4.4.2)$$

existuje spektrální hustota a pro každé t

$$B_x(t) = B_x(0) \int_0^\infty g(s) \cos(ts)ds.$$

Spektrální hustota, když existuje, se dá vyjádřit pomocí integrálu

$$g(s) = \frac{2}{\pi B_x(0)} \int_0^\infty \cos(ts).\, B(t)\, dt \qquad (4.4.3)$$

Důkaz tohoto tvrzení též nebudeme provádět a odkazujeme na vztah mezi reálnými funkcemi a jejich Fourierovými transformacemi, případně na vztah mezi charakteristickými funkcemi a distribučními funkcemi náhodných proměnných.

Uvedeme si nyní několik příkladů stacionárních náhodných procesů a vypočítáme si jejich korelační funkce, spektrální funkce příp. spektrální hustoty.

Příklad 4.9: Nechť $X(.)$ a $Y(.)$ jsou dvě náhodné proměnné se střední hodnotou rovnou 0, jednotkovým rozptylem takové, že $E[X(.)Y(.)] = 0$. Nechť $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je náhodný proces definovaný pro $t \in T$ vztahem

$$X(.,t) = X(.) \cos \lambda t + Y(.) \sin \lambda t, \qquad (4.4.4)$$

kde λ je daná číselná, kladná konstanta.

Dokažte, že $\{X(.,t)\}_{t\in T}$ je stacionární v širším smyslu náhodný proces; vypočítejte jeho korelační funkci a spektrální funkci!

Střední hodnota náhodného procesu existuje a je pro každé $t \in T$ rovna

$$m_x(t) = E\left[X(.) \cos \lambda t + Y(.) \sin \lambda t\right] = 0 \tag{4.4.5}$$

a korelační funkce pro každé t_1, $t_2 \in T$ je dána pomocí

$$\begin{aligned} B_x(t_1,t_2) &= E\Big[(X(.)\cos\lambda t_1 + Y(.)\sin\lambda t_1)(X(.)\cos\lambda t_2 + \\ &+ Y(.)\sin\lambda t_2)\Big] = \cos\lambda t_1 \cos\lambda t_2 \, E\left[X^2(.)\right] + \\ &+ (\sin\lambda t_1 \cos\lambda t_2 + \cos\lambda t_1 \sin\lambda t_2) E\left[X(.).Y(.)\right] + \\ &+ \sin\lambda t_1 \sin\lambda t_2 \, E\left[Y^2(.)\right] = \cos\lambda(t_1 - t_2). \end{aligned} \tag{4.4.6}$$

Jelikož střední hodnota náhodného procesu $\{X(.,t)\}_{t\in T}$ je konstantní a korelační funkce je funkcí pouze rozdílu argumentů, je $\{X(.,t)\}_{t\in T}$ stacionární v širším smyslu náhodný proces a není stacionární v užším smyslu.

Spektrální funkce $G(.)$ tohoto náhodného procesu je taková, že pro každé t musí platit

$$B_x(t) = \cos\lambda t = \int_0^\infty \cos ts \, d\, G(s).$$

Vidíme, že takovou funkcí je

$$\begin{aligned} G(s) &= 0 \quad \text{pro} \quad s \le \lambda \\ &= 1 \quad \text{pro} \quad s > \lambda. \end{aligned} \tag{4.4.7}$$

⊛

Příklad 4.10: Nechť $X_1(.)$, $X_2(.)$,..., a $Y_1(.)$, $Y_2(.)$, jsou náhodné proměnné takové, že

$$\left.\begin{aligned} E\left[X_i(.)\right] &= E\left[Y_i(.)\right] = 0 \\ E\left[X_i^2(.)\right] &= E\left[Y_i^2(.)\right] = 1 \end{aligned}\right\} \quad \text{pro} \quad i = 1,2,\ldots$$

$$E\left[X_i(.)X_j(.)\right] = E\left[Y_i(.)\,Y_j(.)\right] = 0 \quad \text{pro } i \ne j, \; i,j=1,2,\ldots \tag{4.4.8}$$

$$E\left[X_i(.)\,Y_j(.)\right] = 0 \qquad \text{pro } i,j = 1,2,\ldots$$

Nechť $b_1, b_2, \ldots$ je posloupnost reálných čísel taková, že

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 < \infty$$

a nechť $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ je libovolná posloupnost vzájemně různých, kladných reálných čísel. Definujme pro každé reálné t

$$X(.,t) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \left[X_i(.) \cos \lambda_i t + Y_i(.) \sin \lambda_i t\right]. \tag{4.4.9}$$

Potom $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je náhodný proces a dokažte, že je stacionární v širším smyslu! Vypočtěte jeho korelační funkci a spektrální funkci!

Pro každé reálné t máme

$$m_x(t) = E\left[X(.,t)\right] = 0 \qquad (4.4.10)$$

a pro každé t_1, t_2 je vzhledem k předpokladům (4.4.8) korelační funkce $B_x(t_1,t_2)$ zřejmě rovna

$$B_x(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 \cos \lambda_i(t_2 - t_1) \qquad (4.4.11)$$

Střední hodnota náhodného procesu $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je konstantní a korelační funkce je funkcí pouze rozdílu argumentů a tedy náhodný proces $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je stacionární v širším smyslu.

Podobně jako v příkladě 4.9 je spektrální funkce taková, že v každém bodě λ_i má skoky velikosti

$$\frac{b_i^2}{\sum_{j=1}^{\infty} b_j^2} \qquad (i = 1,2,\ldots) .$$

⊛

V následujícím příkladě bude ukázáno, že ne každá korelační funkce má spektrální funkci.

Příklad 4.11: Nechť $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je stacionární v širším smyslu náhodný proces, pro který

$$E\left[X(.,t)\right] = 0$$

a

$$E\left[X(.,t_1)X(.,t_2)\right] = 1 \quad \text{když } t_1 = t_2$$

$$= 0 \quad \text{když } t_1 \neq t_2 .$$

Potom korelační funkce náhodného procesu $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je

$$B_x(t) = 0 \quad \text{když } t \neq 0$$

$$= 1 \quad \text{když } t = 0$$

a pro každou distribuční funkci G neplatí (4.4.1).

Skutečně, neboť pro libovolnou distribuční funkci G existuje k libovolnému $\varepsilon > 0$ takové číslo A, pro které

$$\int_{\{s:\, s > A\}} d\, G(s) \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

a takové h, aby pro každé $s \leq A$

$$|\cos ts - 1| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad \text{pro } t < h$$

Potom

$$\left| \int_0^\infty \cos ts \, dG(s) - \int_0^\infty d\,G(s) \right| \leq$$

$$\leq \int_0^\infty |\cos ts - 1| dG(s) = \int_0^A |\cos ts-1| dG(s) + \int_{\{s:\, s>A\}} |\cos ts-1| dG(s) \leq$$

$$\leq \int_0^A |\cos ts - 1| \, dG(s) + 2 \int_{\{s:\, s>A\}} dG(s) \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

pro $t < h$, neboli

$$\int_0^\infty \cos ts \, dG(s)$$

je spojitá funkce v $t = 0$.

Jelikož $B_x(.)$ není spojitá v $t = 0$, nemůže být proto vyjádřena ve tvaru (4.4.1).

⊛

Příklad 4.12: Nechť $B(.)$ je funkce definovaná pro každé reálné t vztahem

$$B(t) = e^{-c|t|}, \tag{4.4.12}$$

kde $c > 0$. Dokažte, že $B(.)$ je korelační funkce a určete odpovídající spektrální hustotu!

Nejprve je nutné dokázat, že $B(.)$ definovaná vztahem (4.4.12) je korelační funkcí. I když bychom mohli použít výsledku příkladu 4.5 vztah (4.1.30), kde tato funkce vyšla jako korelační funkce daného náhodného procesu, dokážeme si přímo, že $B(.)$ definovaná vztahem (4.4.12) je korelační funkce. Funkce $B(.)$ splňuje podmínky (4.2.7), (4.2.8) a (4.2.10). Dokážeme-li, že splňuje ještě podmínku (4.2.9), t.j. dokážeme-li, že je positivně definitní bude $B(.)$ podle úvah paragrafu 4.3 korelační funkcí nějakého Gaussova náhodného procesu.

Nechť $t_1, t_2, \ldots, t_n$ a $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ jsou libovolné n-tice reálných čísel. Potom

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j B(t_i - t_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j e^{-c|t_i - t_j|} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n c_i \alpha_i\right)^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \alpha_i \alpha_j \left(c_i c_j - e^{-c|t_i - t_j|}\right),$$

kde pro každé i je $c_i = 1$ když $\alpha_i \geq 0$ a $c_i = -1$ když $\alpha_i < 0$. Potom ovšem pro každé i,j je

$$\alpha_i \alpha_j \left(c_i c_j - e^{-c|t_i - t_j|}\right) \geq 0$$

a tedy $B(.)$ je positivně definitní. Proto $B(.)$ je korelační funkcí.

Jelikož $B(.)$ je spojitá a

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-c|t|} \, dt = \frac{2}{c} < \infty,$$

tak existuje podle (4.4.2) spektrální hustota g(.), která se podle (4.4.3) určí pro každé s jako integrál

$$g(s) = \frac{2}{\pi B(0)} \int_0^\infty \cos ts\, B(t)\, dt \tag{4.4.13}$$

Odtud však integrací dostáváme

$$g(s) = \frac{1}{\pi} \frac{2c}{c^2 + s^2}. \tag{4.4.14}$$

Odpovídající spektrální funkce je pak pro každé s dána vztahem

$$G(s) = \int_0^s g(s)ds = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{s}{c} \tag{4.4.15}$$

⊛

4.5. Integrály z náhodných procesů

Dříve než přistoupíme ke zkoumání otázek stacionárních náhodných procesů, uvedeme si některé pojmy a základní vlastnosti pro náhodné proměnné s konečným rozptylem, které budou odpovídat t.zv. Hilbertovu prostoru náhodných proměnných.

Označme $\mathfrak{X}$ množinu všech náhodných proměnných X(.) s vlastností

$$E\left[X^2(.)\right] < \infty \tag{4.5.1}$$

Jestliže dvě náhodné proměnné z $\mathfrak{X}$ jsou ekvivalentní, tak je budeme považovat za identické.

Nechť $\{X_n(.),\ n = 1,2,\ldots\}$ je posloupnost náhodných proměnných z $\mathfrak{X}$. Řekneme, že pro $n \to \infty$ konverguje tato posloupnost *podle kvadratického středu* k náhodné proměnné $X_o(.)$, když

$$\lim_{n\to\infty} E\left[(X_n(.) - X_o(.))^2\right] = 0. \tag{4.5.2}$$

Dá se ukázat, že nutnou a postačující podmínkou k tomu aby posloupnost náhodných proměnných $\{X_n(.) : n = 1,2,\ldots\}$ z $\mathfrak{X}$ konvergovala podle kvadratického středu je to, aby byla Cauchyovská, t.j. aby pro $n, m \to \infty$

$$E\left[(X_n(.) - X_m(.))^2\right] \to 0.$$

Dále se dá dokázat, že pro každou Cauchyovskou posloupnost náhodných proměnných z $\mathfrak{X}$ existuje náhodná proměnná $X_o(.)$, ke které tato posloupnost konverguje podle kvadratického středu.

Důležité kriterium pro zjištění, zda daná posloupnost konverguje podle kvadratického středu je obsaženo v následující větě.

Věta 4.2: Posloupnost náhodných proměnných $\{X_n(.): n = 1,2,\ldots\}$ konverguje pro $n \to \infty$ podle kvadratického středu tehdy a jen tehdy, když

$$E\left[X_n(.)\, X_m(.)\right] \tag{4.5.3}$$

konverguje pro $n,m \to \infty$ ke konečné limitě.

Důkaz: Předpokládejme, že $\{X_n(.) : n = 1,2,\dots\}$ je takové, že (4.5.3) konverguje pro $n,m \to \infty$ k nějaké konstantě $c < \infty$. Potom

$$E\left[(X_n(.) - X_m(.))^2\right] = E\left[X_n^2(.)\right] - 2\,E\left[X_n(.)X_m(.)\right] + $$
$$+ E\left[X_m^2(.)\right] \to c - 2c + c = 0$$

pro $n,m \to \infty$ a tedy posloupnost $\{X_n(.): n = 1,2,\dots\}$ je Cauchyovská podle kvadratického středu a tedy konverguje pro $n \to \infty$ k nějaké limitě $X_o(.)$ podle kvadratického středu.

Nechť naopak posloupnost $\{X_n(.): n = 1,2,\dots\}$ konverguje pro $n \to \infty$ podle kvadratického středu k náhodné proměnné $X_o(.)$. Potom pro $n \to \infty$

$$\left| E\left[X_n^2(.) - X_o^2(.)\right]\right| = \left| E\left[(X_n(.) - X_o(.))^2\right] + \right.$$
$$\left. + 2\,E\left[X_o(.)(X_n(.) - X_o(.))\right]\right| \le$$
$$\le E\left[(X_n(.)-X_o(.))^2\right] + 2\sqrt{E\left[X_o^2(.)\right]E\left[(X_n(.)-X_o(.))^2\right]} \to 0$$

neboli

$$E\left[X_n^2(.)\right] \to E\left[X_o^2\right] \qquad \text{pro } n \to \infty .$$

Potom ale pro $n,m \to \infty$ platí

$$2E\left[X_m(.)X_n(.)\right] = E\left[X_n^2(.)\right] + E\left[X_m^2(.)\right] -$$
$$- E\left[(X_n(.) - X_m(.))^2\right] \to 2\,E\left[X_o^2(.)\right] < \infty ,$$

t.j. platí (4.5.2).

⊛

Věta 4.3: Jestliže posloupnost náhodných proměnných $X_1(.), X_2(.), \dots$ z $\mathfrak{X}$ konverguje pro $n \to \infty$ podle kvadratického středu k náhodné proměnné $X_o(.)$, tak

$$E\left[X_n(.)\right] \to E\left[X_o(.)\right] \qquad \text{pro } n \to \infty . \tag{4.5.4}$$

Důkaz tohoto tvrzení plyne okamžitě ze Schwarzovy nerovnosti. Platí totéž

$$\left| E\left[X_n(.) - X_o(.)\right]\right| \le \sqrt{E\left[(X_n(.) - X_o(.))^2\right]} ,$$

což podle předpokladu konverguje pro $n \to \infty$ k nule, t.j. platí též (4.5.4).

⊛

Když posloupnost náhodných proměnných $X_1(.), X_2(.), \dots$ konverguje podle kvadratického středu pro $n \to \infty$ k náhodné proměnné $X_o(.)$ a současně k náhodné proměnné $Y_o(.)$ podle pravděpodobnosti nebo skoro jistě, tak $X_o(.)$ a $Y_o(.)$ jsou ekvivalentní náhodné proměnné, t.j.

$$P(\{\omega : X_o(\omega) = Y_o(\omega)\}) = 1. \tag{4.5.5}$$

Uvažujme nyní náhodný proces $\{X(.,t)\}_{t \in T}$, kde pro každé $t \in T$ je $X(.,t) \in \mathfrak{X}$.

Řekneme, že náhodný proces $\{X(\cdot,t)\}_{t\in T}$ je spojitý v bodě $t_0 \in T$, když pro každou posloupnost $t_1, t_2, \dots$ z T, která pro $n \to \infty$ konverguje k t_0

$$\lim_{n\to\infty} E\left[(X(\cdot,t_n) - X(\cdot,t_0))^2\right] = 0. \qquad (4.5.6)$$

V dalším budeme předpokládat, že uvažované náhodné procesy mají střední hodnotu pro každé $t \in T$ rovnu nule, t.j. místo náhodného procesu $\{X(\cdot,t)\}_{t\in T}$ budeme uvažovat procesy $\{X(\cdot,t) - m_x(t)\}_{t\in T}$.

Věta 4.4: Náhodný proces $\{X(\cdot,t)\}_{t\in T}$ je spojitý v bodě $t_0 \in T$ tehdy a jen tehdy, když korelační funkce $B_x(\cdot,\cdot)$ je spojitá v bodě $t_1 = t_2 = t_0$.

Důkaz: S použitím základních vlastností středních hodnot pro dané t_0 a libovolné k platí

$$E\left[(X(\cdot,t_0+k) - X(\cdot,t_0))^2\right] = B_x(t_0+k,\ t_0+k) -$$

$$- 2B_x(t_0+k,t_0)+B_x(t_0,t_0) \leq \left|B_x(t_0+k,t_0+k) - B_x(t_0,t_0)\right| +$$

$$+ 2\left|B_x(t_0,t_0) - B_x(t_0+k,\ t_0)\right| .$$

Předpokládáme-li, že korelační funkce $B_x(\cdot,\cdot)$ je spojitá v bodě $t_1=t_2=t_0$, tak k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje $k(\varepsilon) > 0$ takové, že pro všechna $|k| < k_0(\varepsilon)$

$$\left|B_x(t_0+k,\ t_0+k) - B_x(t_0,\ t_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

a

$$\left|B_x(t_0+k,\ t_0) - B_x(t_0,\ t_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Potom však též pro $|k| < k(\varepsilon)$ je

$$E\left[(X(\cdot,t_0+k) - X(\cdot,t_0))^2\right] < \varepsilon$$

neboli $\{X(\cdot,t)\}_{t\in T}$ je spojitý v t_0.

Nechť naopak náhodný proces $\{X(\cdot,t)\}_{t\in T}$ je spojitý v bodě t_0. Potom pro každé reálné h a k s použitím Schwarzovy nerovnosti

$$\begin{aligned}
&\left|B_x(t_0+h,t_0+k)-B_x(t_0,t_0)\right| = \Big|E\left[(X(\cdot,t_0+h)-X(\cdot,t_0))(X(\cdot,t_0+k)-X(\cdot,t_0))\right] \\
&+ E\left[X(\cdot,t_0)(X(\cdot,t_0+k)-X(\cdot,t_0))\right] + E\left[X(\cdot,t_0)(X(\cdot,t_0+h)-X(\cdot,t_0))\right]\Big| \leq \\
&\leq \sqrt{E\left[(X(\cdot,t_0+h)-X(\cdot,t_0))^2\right] E\left[(X(\cdot,t_0+k)-X(\cdot,t_0))^2\right]} + \qquad (4.5.7) \\
&+ \sqrt{E\left[X^2(\cdot,t_0)\right] E\left[(X(\cdot,t_0+k)-X(\cdot,t_0))^2\right]} + \\
&+ \sqrt{E\left[X^2(\cdot,t_0)\right] E\left[(X(\cdot,t_0+h)-X(\cdot,t_0))^2\right]}
\end{aligned}$$

Podle předpokladu spojitosti náhodného procesu $\{X(\cdot,t)\}_{t\in T}$ v bodě t_0 existuje pro každé $\varepsilon > 0$ takové $h(\varepsilon)$, že pro všechna $|h| < h(\varepsilon)$ je

$$E\left[(X(\cdot,t_0+h) - X(\cdot,t_0))^2\right] < \sqrt{\varepsilon + \sigma^2} - \sqrt{\sigma^2},$$

kde $\sigma^2 = E\left[X^2(.,t_o)\right]$. Potom podle (4.5.7) pro $|h|, |k| < h(\varepsilon)$ je

$$\left|B_x(t_o + h,\ t_o + k) - B_x(t_o + t_o)\right| \le$$

$$\le (\sqrt{\varepsilon + \sigma^2} - \sqrt{\sigma^2})^2 + 2\sqrt{\sigma^2}(\sqrt{\varepsilon + \sigma^2} - \sqrt{\sigma^2}) = \varepsilon ,$$

t.j. $B_x(.,.)$ je spojitá v bodě $(t_o,\ t_o)$.

(*)

Věta 4.5: Jestliže $B_x(.,.)$ je korelační funkce náhodného procesu $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ a je spojitá v každém bodě $(t_o,\ t_o)$, tak je spojité v libovolném bodě $(t_1,\ t_2)$.

Důkaz: Pro každé h a k máme

$$E\left[X(.,t_1+h)X(.,t_2+k)\right] = E\left[X(.,t_1+h)(X(.,t_2+k) - X(.,t_2)\right] +$$

$$+ E\left[X(.,t_2)(X(.,t_1+h)-X(.,t_1))\right] + E\left[X(.,t_1)X(.,t_2)\right]$$

a tedy

$$\left| E\left[X(.,t_1+h)X(.,t_2+k)\right] - E\left[X(.,t_1)X(.,t_2)\right]\right| \le$$

$$\le \sqrt{E\left[X^2(.,t_1+h)\right]}\ \sqrt{E\left[(X(.,t_2+k) - X(.,t_2))^2\right]} +$$

$$+ \sqrt{E\left[X^2(.,t_2)\right]}\ \sqrt{E\left[(X(.,t_1+h)-X(.,t_1))^2\right]}$$

Pro $h,k \to 0$ podle důkazu věty 4.2 a podle věty 4.4 platí

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ k \to 0}} E\left[X(.,t_1+h)X(.,t_2+k)\right] = E\left[X(.,t_1)X(.,t_2)\right].$$

(*)

Příklad 4.13: Nechť $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je Poissonův proces s parametrem λ. Dokažte, že je spojitý podle kvadratického středu!

Podle příkladu 4.2 je pro každé $t \in T$

$$B_x(t,t) = \lambda t$$

a tedy korelační funkce je podle věty 4.5 spojitá na $T \times T$.

Dále

$$\lim_{h \to 0} E\left[(X(.,t+h)-X(.,t))^2\right] = \lim_{h \to 0} \left[B_x(t+h,t+h)+B_x(t,t) +\right.$$

$$\left. + (m_x(t + h) - m_x(t))^2 - 2\,B_x(t + h,t)\right] =$$

$$= B_x(t,t) + B_x(t,t) - 2B_x(t,t) = 0$$

(*)

Zavedeme si nyní další důležitý pojem a to pojem integrál z náhodného procesu. Nechť $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je daný náhodný proces takový, že pro každé $t \in T$ je $X(.,t) \in \mathfrak{X}$ a nechť f(.) je libovolná reálná funkce definovaná na T a nechť a, b jsou libovolná reálná čísla $(a<b)$. Nechť $t_0, t_1, \dots, t_n$ je libovolné dělení intervalu (a,b) takové, že

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b. \tag{4.5.8}$$

Jestliže posloupnost náhodných proměnných

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\, X(\cdot, t_i)(t_i - t_{i-1}) \tag{4.5.9}$$

konverguje pro $n \to \infty$ při současném $\max\limits_{1 \le i \le n} | t_i - t_{i-1} | \to 0$ podle kvadratického středu, tak odpovídající limita se nazývá integrálem z funkce f a náhodného procesu $\{X(\cdot,t)\}_{t \in T}$ na intervalu (a, b) a označíme jej

$$\int_a^b f(t)\, X(\cdot,t)\, dt. \tag{4.5.10}$$

Podobně se definuje i nevlastní integrál z funkce f a náhodného procesu $\{X(\cdot,t)\}_{t \in T}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, X(\cdot,t)\, dt \tag{4.5.11}$$

jako limity podle kvadratického středu integrálu (4.5.10) pro $a \to -\infty$, $b \to \infty$, pokud ovšem tyto limity existují.

Abychom mohli odpovědět na otázku existence integrálu (4.5.11) resp. (4.5.10) uvedeme si následující větu

Věta 4.6: Pro existenci integrálu

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, X(\cdot,t)\, dt$$

stačí, aby existoval integrál

$$A = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} B_X(t,s)\, f(t)\, f(s)\, dt\, ds. \tag{4.5.12}$$

Potom platí

$$A = E\left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) X(\cdot,t) dt\right)^2 \right]. \tag{4.5.13}$$

Důkaz: Důkaz provedeme jen pro případ konečných mezí, t.j. pro integrál (4.5.10). Aby tento integrál existoval musí posloupnost (4.5.9) konvergovat podle kvadratického středu, což podle vlastností konvergence podle kvadratického středu znamená, že musí tato posloupnost být Cauchyovská, t.j. pro $n, m \to \infty$ musí platit

$$E\left[\left(\sum_{i=1}^{m} f(t_i) X(\cdot,t_i)(t_i - t_{i-1}) - \sum_{j=1}^{n} f(t'_j) X(\cdot,t'_j)(t'_j - t'_{j-1})\right)^2 \right] \to 0 \tag{4.5.14}$$

při $\max\limits_i (t_i - t_{i-1}) \to 0$. Tato střední hodnota se dá přepsat na tvar

$$E\Big[\Big(\sum_{i=1}^{m} f(t_i)X(.,t_i)(t_i-t_{i-1})\Big)^2\Big] - 2E\Big[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(t_i)f(t'_j).$$

$$X(.,t_i)X(.,t'_j)(t_i - t_{i-1})(t'_j - t'_{j-1})\Big] +$$

$$+ E\Big[\Big(\sum_{j=1}^{n} f(t'_j)X(.,t'_j)(t_j - t_{j-1})\Big)^2\Big] =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} f(t_i)f(t_j)B_x(t_i,t_j)(t_i - t_{i-1})(t_j - t_{j-1}) -$$

$$- 2\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(t_i)f(t'_j)B_x(t_i,t'_j)(t_i - t_{i-1})(t'_j - t'_{j-1}) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} f(t'_i)f(t'_j)B_x(t'_i,t'_j)(t'_i-t'_{i-1})(t'_j-t'_{j-1})$$

Všechny součty na pravé straně při existenci integrálu (4.5.12) konvergují při $n,m \to \infty$ a současném $\max\limits_{1\le i\le m} (t_i - t_{i-1}) \to 0$ a $\max\limits_{1\le j\le n} (t'_j - t'_{j-1}) \to 0$ k A a proto platí (4.5.14).

Jelikož dále

$$E\Big[\Big(\sum_{i=1}^{m} f(t_i)\, X(.,t_i)(t_i - t_{i-1})\Big)^2\Big] \to A, \qquad (4.5.15)$$

tak podle důkazu věty 4.2 též

$$E\Big[\Big(\int_a^b f(t)\, X(.,t)\, dt\Big)^2\Big] = A \qquad (4.5.16)$$

⊛

Ukážeme si na příkladě použití a výpočet integrálu z funkce a náhodného procesu.

Příklad 4.14: Vypočtěte integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\lambda t}{t}\, X(.,t)\, dt, \qquad (4.5.17)$$

kde $\{X(.,t)\}_{t\in T}$ je náhodný proces z příkladu 4.9!

Podle (4.4.6) je korelační funkce náhodného procesu $\{X(.,t)\}_{t\in T}$ uvažovaného v tomto příkladě rovna $\cos\lambda(t_2 - t_1)$ a jelikož

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \cos\lambda(t - s)\, \frac{\sin\lambda t}{t}\, \frac{\sin\lambda s}{s}\, dtds = \frac{\pi^2}{4} \qquad (4.5.18)$$

tak integrál (4.5.17) existuje.

Podle definice integrál

$$\int_{-T}^{T} \frac{\sin\lambda t}{t}\, X(.,t)dt$$

se dá psát jako limita podle kvadratického středu součtů

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\sin \lambda t_i}{t_i} X(., t_i)(t_i - t_{i-1})$$

pro $n \to \infty$ kde $t_o = -T$, $t_n = T$ a $\max_i |t_i - t_{i-1}| \to 0$.

Po dosazení za náhodný proces $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ dostaneme

$$X(.) \sum_{i=1}^{n} \frac{\sin \lambda t_i}{t_i} \cos(\lambda_o t_i)(t_i - t_{i-1}) + Y(.) \sum_{i=1}^{n} \frac{\sin \lambda t_i}{t_i} \sin(\lambda_o t_i)(t_i - t_{i-1}).$$

Vzhledem k tomu, že pro $n \to \infty$ konvergují při uvedených dalších omezeních tyto součty k integrálům

$$\int_{-T}^{T} \frac{\sin \lambda t}{t} \cos \lambda_o t \, dt \quad \text{resp.} \quad \int_{-T}^{T} \frac{\sin \lambda t}{t} \sin \lambda_o t \, dt,$$

tak zřejmě

$$\int_{-T}^{T} \frac{\sin \lambda t}{t} X(.,t)dt = X(.) \int_{-T}^{T} \frac{\sin \lambda t}{t} \cos \lambda_o t \, dt + Y(.) \int_{-T}^{T} \frac{\sin \lambda t}{t} \sin \lambda_o t dt$$

a též

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \lambda t}{t} X(.,t)dt = X(.) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \lambda t}{t} \cos \lambda_o t dt + Y(.) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \lambda t}{t} \sin \lambda_o t dt .$$

Jelikož

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \lambda t}{t} \cos \lambda_o t dt = \frac{1}{2} \pi \left[\operatorname{sign}(\lambda + \lambda_o) + \operatorname{sign}(\lambda - \lambda_o) \right]$$

a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \lambda t}{t} \sin \lambda_o t \, dt = 0,$$

kde

$$\operatorname{sign} x = 1 \text{ když } x > 0$$
$$= 0 \text{ když } x = 0$$
$$= -1 \text{ když } x < 0,$$

neboť, jak víme z matematické analýzy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin xt}{t} dt = \pi \operatorname{sign} x,$$

dostáváme tedy celkem

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \lambda t}{t} X(.,t)dt = X(.) \frac{\pi}{2} \left[\operatorname{sign}(\lambda + \lambda_o) + \operatorname{sign}(\lambda - \lambda_o) \right] \qquad (4.5.19)$$

⊛

Příklad 4.15: Vypočtěte integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos \lambda t}{t} \; X(.,t) \, dt \tag{4.5.20}$$

pro stejný náhodný proces $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ jako v příkladě 4.14!

Výpočet nebudeme do detailů provádět, neboť jej lze provést úplně stejně jako v příkladě 4.14. Dostaneme potom

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos \lambda t}{t} X(.,t)dt = Y(.) \frac{\pi}{2} \left[2\operatorname{sign}\lambda_o - \operatorname{sign}(\lambda_o+\lambda) + \operatorname{sign}(\lambda-\lambda_o) \right] \tag{4.5.21}$$

(*)

Podobně jako jsme definovali integrál z funkce a náhodného procesu, je možné definovat i Stieltjesův integrál dané funkce f podle náhodného procesu $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ a derivaci náhodného procesu. Tyto nové definice odpovídají obyčejným definicím Stieltjesova integrálu a derivaci tak, jak je známe z matematické analýzy, jen s tím rozdílem, že všechny konvergence a limity chápeme ve smyslu konvergence podle kvadratického středu. Tak na příklad Stieltjesův integrál funkce f(.) podle náhodného procesu $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ v mezích od a do b

$$\int_a^b f(t) \; d \, X(.,t) \tag{4.5.22}$$

je definován jako limita podle kvadratického středu posloupnosti

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i) \left[X(., t_i) - X(., t_{i-1}) \right] \tag{4.5.23}$$

pro $n \to \infty$ při současném $\max_i \; (t_i - t_{i-1}) \to 0$, kde

$$a = t_o < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b, \tag{4.5.24}$$

pokud ovšem tato limita existuje.

Věta 4.7: Pro existenci integrálu

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \; d \, X(.,t) \tag{4.5.25}$$

stačí, aby existoval integrál

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \; f(s) \; d_s d_t B_X(t,s). \tag{4.5.26}$$

Potom platí

$$A = E \left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \; dX(.,t) \right)^2 \right]. \tag{4.5.27}$$

Důkaz této věty je podobný důkazu věty 4.6 a nebudeme jej provádět.

Příklad 4.16: Nechť X(.) je náhodná proměnná se střední hodnotou $E[X(.)] = 0$ a

$E\left[X^2(.)\right] = \sigma^2$ a nechť $\left\{Z(.,t)\right\}_{t\in T}$ je náhodný proces definovaný vztahem

$$\begin{aligned} Z(.,t) &= X(.) \quad \text{pro} \quad t \geq t_o \\ &= 0 \quad \text{pro} \quad t < t_o \end{aligned} \tag{4.5.28}$$

Vypočtěte integrál

$$\int_0^{\infty} f(t)\, d\, Z(.,t) \;! \tag{4.5.29}$$

Korelační funkce náhodného procesu $\left\{Z(.,t)\right\}_{t\in T}$ je dána pomocí

$$\begin{aligned} B_z(t,s) &= E\left[X^2(.)\right] \text{ pro } \quad t \geq t_o, \quad s \geq t_o \\ &= 0 \qquad \text{pro ostatní } t \text{ a } s \end{aligned} \tag{4.5.30}$$

Potom zřejmě

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} f(t)\, f(s)\, d_s\, d_t\, B_z\,(t,s) = \sigma^2 f^2(t_o) \tag{4.5.31}$$

a tedy integrál (4.5.26) existuje, proto existuje i integrál (4.5.29) podle věty 4.7.

Tento integrál podle definice je roven

$$X(.)\, f(t_o),$$

jak se lze lehce přesvědčit. ⊛

Řekneme, že náhodný proces $\left\{X(.,t)\right\}_{t\in T}$ má derivaci v bodě t_o, jestliže pro jakoukoliv posloupnost $t_1, t_2, \ldots$ konvergující pro $n \to$ k t_o posloupnost náhodných

$$\frac{X(.,\, t_n) - X(.,\, t_o)}{t_n - t_o} \tag{4.5.32}$$

konverguje podle kvadratického středu. Tuto limitu, pokud existuje, nazveme derivací náhodného procesu v čase t_o.

Platí následující věta.

Věta 4.8. K tomu, aby náhodný proces $\left\{X(.,t)\right\}_{t\in T}$ měl derivaci v čase $t_o \in T$ je nutné a stačí, aby existovala a byla konečná druhá derivace

$$\frac{\partial^2}{\partial t\, \partial t'}\, B_x(t,t') \tag{4.5.33}$$

v bodě $t = t' = t_o$.

Důkaz: Jelikož

$$E\left[\frac{X(.,\, t_m) - X(.,\, t_o)}{t_m - t_o} \cdot \frac{X(.,\, t_n) - X(.,\, t_o)}{t_n - t_o}\right] =$$

$$= \frac{B_x(t_n,t_m) - B_x(t_n,t_o) - B_x(t_o,t_m) + B_x(t_o,t_o)}{(t_m - t_o)(t_n - t_o)} =$$

$$= \frac{1}{t_n - t_o} \left[\frac{B_x(t_n,t_m)-B_x(t_n,t_o)}{t_m - t_o} - \frac{B_x(t_o,t_m)-B_x(t_o,t_o)}{t_m - t_o} \right]$$

tak pro $n,m \to \infty$ konverguje tento výraz k hodnotě derivace $\frac{\partial^2}{\partial t\, \partial t'} B_x(t,t')$ v bodě $t = t' = t_o$. Podle věty 4.2 pak dostáváme tvrzení naší věty. ⊛

Jako důsledek právě dokázané věty dostáváme, že derivace náhodného procesu $\{X(.,t)\}_{t \in T}$, pokud existuje, je opět náhodný proces s korelační funkcí

$$\frac{\partial 2}{\partial t\, \partial t'} B_x(t, t').$$

Příklad 4.17: Nechť $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je Poissonův proces a nechť $\{Y(.,t)\}_{t \in T}$ je náhodný proces definovaný vztahem

$$Y(.,t) = \int_0^t X^*(.,t)\, dt, \tag{4.5.34}$$

kde

$$X^*(.,t) = X(.,t) - m_x(t).$$

Dokažte, že existuje derivace náhodného procesu $\{Y(.,t)\}_{t \in T}$!

Dokážeme nejprve, že náhodný proces $\{Y(.,t)\}_{t \in T}$ existuje. Podle věty 4.6. stačí dokázat, že existuje integrál

$$\int_0^t \int_0^t B_x^*(t,s)\, dtds. \tag{4.5.35}$$

Podle příkladu 4.2 je

$$B_x*(t,s) = B_x(t,s) = \lambda \min(t,s)$$

a tedy integrál (4.5.35) je roven

$$\int_0^t \int_0^t \lambda \min(t,s)\, dtds = \frac{\lambda t^3}{3}.$$

Vidíme tedy, že náhodný proces $\{Y(.,t)\}_{t \in T}$ definovaný (4.5.34) existuje a

$$E\left[(\int_0^t X^*(., t)\, dt)^2 \right] = \frac{\lambda t^3}{3}$$

Korelační funkce náhodného procesu $\{Y(.,t)\}_{t \in T}$ je

$$B_Y(t,s) = E\left[\int_0^t \int_0^s X^*(.,\tau)\, X^*(.,\sigma)\, d\tau\, d\sigma \right] =$$

$$= \int_0^t \int_0^s E\left[X^*(.,\tau)\, X^*(.,\sigma) \right] d\tau\, d\sigma = \frac{\lambda t^2}{2} (s - \frac{t}{3})$$

když $s \geq t$

$$B_Y(t,s) = \frac{\lambda s^2}{2}\left(t - \frac{s}{3}\right) \qquad \text{když} \quad s < t$$

Jelikož

$$\frac{\partial^2}{\partial t\, \partial s} B_Y(t,s) = \lambda \min(t,s),$$

tak podle věty 4.8. existuje derivace náhodného procesu $\{Y(.,t)\}_{t \in T}$. ⊛

4.6. Spektrální rozklad stacionárního náhodného procesu

V tomto paragrafu se budeme zabývati vyjádřením stacionárního v širším smyslu náhodného procesu $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ pomocí náhodné kombinace trigonometrických funkcí, tak jako se v matematické analýze nahražují funkce pomocí jejich Fourierových řad příp. Fourierových transformací.

Uvažujme tedy stacionární v širším smyslu náhodný proces $\{X(.,t)\}_{t \in T}$, který je spojitý, jehož střední hodnota je rovna 0 a jehož korelační funkce $B_x(.)$ se dá vyjádřit ve tvaru

$$B_x(t) = B_x(0) \int_0^\infty \cos ts \, dG(s), \tag{4.6.1}$$

kde G(.) je spektrální funkce náhodného procesu $\{X(.,t)\}_{t \in T}$.
Potom platí následující věta.

Věta 4.9.: Jestliže $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je stacionární v širším smyslu náhodný proces, jež je spojitý a jehož střední hodnota je 0 a korelační funkce $B_x(.)$, tak existují náhodné procesy $\{Z_1(.,s)\}_{s \geq 0}$ a $\{Z_2(.,s)\}_{s \geq 0}$ takové, že

(1) pro každé $s_1 \leq s_2$, $s_3 \leq s_4$

$$E\left[(Z_i(.,s_2) - Z_i(.,s_1))(Z_j(.,s_4) - Z_j(.,s_3))\right] = 0 \tag{4.6.2}$$

pro $i \neq j$; $i,j = 1,2$

nebo pro $i = j$ když $s_2 \leq s_3$

(2)
$$E\left[(Z_i(.,s_2) - Z_i(.,s_1))^2\right] = \left[G(s_2) - G(s_1)\right] B_x(0) \tag{4.6.3}$$

$i = 1,2$

a pro každé $t \in T$

$$X(.,t) = \int_0^\infty \cos st \, dZ_1(.,s) + \int_0^\infty \sin st \, d\, Z_2(.,s). \tag{4.6.4}$$

Náhodné procesy $\{Z_1(.,s)\}_{s \geq T}$, $\{Z_2(.,s)\}_{s \geq T}$ lze určit pomocí vztahů

$$Z_1(.,s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin st}{t} X(.,t)dt \tag{4.6.5}$$

$$Z_2(.,s) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos st}{t} X(.,t)\, dt. \tag{4.6.6}$$

Vyjádření náhodného procesu $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ pomocí (4.6.4) se nazývá spektrální rozklad náhodného procesu $\{X(.,t)\}_{t \in T}$.

Nebudeme dokazovat větu 4.9 v úplné obecnosti, neboť to vyžaduje hlubších úvah a metod matematiky, a omezíme se jen na speciální případ, když náhodný proces $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je definován pomocí

$$X(.,t) = X(.) \cos \lambda t + Y(.) \sin \lambda t, \tag{4.6.7}$$

kde λ je daná kladná konstanta a $X(.)$, $Y(.)$ jsou dvě náhodné proměnné se střední hodnotou rovnou 0 a jednotkovým rozptylem takové, že $E\,[X(.)\;Y(.)] = 0$.

Korelační funkce náhodného procesu $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je podle příkladu 4.9 rovna

$$B_x(t,s) = \cos \lambda (t - s),$$

a spektrální funkce je rovna podle (4.4.7)

$$\begin{aligned} G(s) &= 0 \quad \text{pro} \quad s \leq \lambda \\ &= 1 \quad \text{pro} \quad s > \lambda . \end{aligned}$$

Náhodný proces $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je zřejmě spojitý.

Z příkladů 4.14 a 4.15 máme

$$Z_1(.,s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin st}{t} X(.,t)dt = X(.)\frac{1}{2} \left[\operatorname{sign}(s+\lambda) + \operatorname{sign}(s-\lambda)\right]$$

a

$$Z_2(.,s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos st}{t} X(.,t)dt = Y(.)\frac{1}{2} \left[2\operatorname{sign}\lambda - \operatorname{sign}(s+\lambda) + \operatorname{sign}(s-\lambda)\right]$$

Proto

$$\begin{aligned} Z_1(.,s) &= X(.) \quad \text{když} \quad s \geq \lambda \\ &= 0 \quad \text{když} \quad s < \lambda \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} Z_2(.,s) &= Y(.) \quad \text{když} \quad s < \lambda \\ &= 0 \quad \text{když} \quad s \geq \lambda \end{aligned}$$

Lehce se lze přesvědčit, že $\{Z_1(.,s)\}_{s \geq 0}$, tak i $\{Z_2(.,s)\}_{s \geq 0}$ splňují (4.6.2).

Potom také podle příkladu 4.16

$$\int_0^{\infty} \cos st \; d\, Z_1(.,s) = X(.) \cos \lambda t$$

a

$$\int_0^{\infty} \sin st \; d\, Z_2(.,s) = Y(.) \sin \lambda t$$

a tedy

$$X(.,t) = X(.)\cos\lambda t + Y(.)\sin\lambda t = \int_0^{\infty} \cos st dZ_1(.,s) + \int_0^{\infty} \sin st \; d\, Z_2(.,s).$$

Obecně, nechť stacionární v širším smyslu náhodný proces $\{X(.,t)\}_{t\in T}$ má spektrální rozklad

$$X(.,t) = \int_0^\infty \cos ts\, dZ_1(.,s) + \int_0^\infty \sin ts\, dZ_2(.,s),$$

kde $\{Z_1(.,s)\}_{s\geq 0}$ a $\{Z_2(.,s)\}_{s\geq 0}$ splňují podmínku (4.6.2) tak pro každé t_1, t_2

$$E\left[X(.,t_1)X(.,t_2)\right] = E\left[\left(\int_0^\infty \cos t_1 s dZ_1(.,s) + \int_0^\infty \sin t_1 s dZ_2(.,s)\right)\right.\,.$$

$$\left.. \left(\int_0^\infty \cos t_2 s dZ_1(.,s) + \int_0^\infty \sin t_2 s dZ_2(.,s)\right)\right] =$$

$$= \int_0^\infty \cos t_1 s \cos t_2 s\, E\left[(d\, Z_1(.,s))^2\right] + \int_0^\infty \sin t_1 s \sin t_2 s\, E\left[(d\, Z_2(.,s))^2\right]$$

$$= \int_0^\infty \cos s(t_2 - t_1) E\left[(d\, Z_1(.,s))^2\right]$$

což porovnáno s (4.4.1) dává

$$E\left[(d\, Z_1(.,s))^2\right] = E\left[(d\, Z_2(.,s))^2\right] = d\, G(s)\, .\, B_x(0),$$

neboli vztah (4.6.3).

4.7. Ergodické náhodné procesy

V tomto paragrafu se budeme zabývati takovými náhodnými procesy, pro které limity časových průměrů konvergují ke střední hodnotě. Takové náhodné procesy se v praktických aplikacích většinou vyskytují, jak bude zřejmé z následujících vět, které platí za předpokladů, které lze při aplikacích vždy akceptovat.

Jestliže $\{X(.,t)\}_{t\in T}$ je stacionární v užším smyslu náhodný proces spojitý, který má konečnou střední hodnotu m, tak se dá dokázat, že

$$\frac{1}{T}\int_0^T X(.,t)\, dt \tag{4.7.1}$$

konverguje pro $T \to \infty$ s pravděpodobností 1. Tato limita je obecně náhodnou proměnnou, ale dá se dokázat, že v některých případech je tato náhodná proměnnách konstanta rovna střední hodnotě uvažovaného náhodného procesu. Takovým případem je na příklad to, když pro korelační funkce $B_x(.)$ náhodného procesu $\{X(.,t)\}_{t\in T}$ platí

$$\lim_{t\to\infty} B_x(t) = 0, \tag{4.7.2}$$

jak bude dokázáno v následující větě.

Věta 4.10.: Nechť $\{X(.,t)\}_{t\in T}$ je stacionární náhodný proces s konečnou střední hodnotou m, pro jehož korelační funkce $B_x(.)$ je splněna podmínka (4.7.2).

Potom

$$\frac{1}{T}\int_0^T X(.,t)dt \to m \qquad (4.7.3)$$

pro $T \to \infty$.

Důkaz: Pro fixované T zřejmě existuje integrál (4.7.3) a integrál (4.7.1) je náhodná proměnná, jejíž střední hodnota je m a rozptyl

$$E\left[\left(\frac{1}{T}\int_0^T X(.,t)dt-m\right)^2\right] = \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T B_x(t-s)dtds. \qquad (4.7.4)$$

Jestliže $\{X(.,t)\}_{t\in T}$ splňuje podmínku (4.7.2), tak k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje $u_\varepsilon > 0$ takové, že pro $u > u_\varepsilon$ je

$$|B_x(u)| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (4.7.5)$$

Nechť T je takové, že $T > \frac{4B_x(0)u_\varepsilon}{\varepsilon}$. Potom

$$\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T B_x(t-s)dt\,ds = \frac{2}{T^2}\int_0^T B_x(t)(T-t)dt =$$

$$= \frac{2}{T^2}\int_0^{u_\varepsilon} B_x(t)(T-t)dt + \frac{2}{T^2}\int_{u_\varepsilon}^T B_x(t)(T-t)dt. \qquad (4.7.6)$$

Ale

$$\left|\frac{2}{T^2}\int_0^{u_\varepsilon} B_x(t)(T-t)dt\right| \le \frac{2B_x(0)}{T^2}\int_0^{u_\varepsilon}(T-t)dt =$$

$$= \frac{2B_x(0)}{T^2}\left[T\,u_\varepsilon - \frac{u_\varepsilon^2}{2}\right] = B_x(0)\,\frac{u_\varepsilon}{T}\left(2-\frac{u_\varepsilon}{T}\right) \qquad (4.7.7)$$

a

$$\left|\frac{2}{T^2}\int_{u_\varepsilon}^T B_x(t)(T-t)dt\right| \le \frac{2}{T^2}\cdot\frac{\varepsilon}{2}\cdot\int_{u_\varepsilon}^T (T-t)dt =$$

$$= \frac{2\varepsilon}{2T^2}\left[T(T-u_\varepsilon) - \frac{T^2-u_\varepsilon^2}{2}\right] = \frac{\varepsilon}{2}\left(1-\frac{u_\varepsilon}{T}\right)^2.$$

Proto

$$\left|\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T B_x(t-s)dtds\right| \le B_x(0)\,\frac{u_\varepsilon}{T}\left(2-\frac{u_\varepsilon}{T}\right) + \frac{\varepsilon}{2}\left(1-\frac{u_\varepsilon}{T}\right)^2 \le$$

$$\le 2\,B_x(0)\,\frac{u_\varepsilon}{T} + \frac{\varepsilon}{2} \le \varepsilon\,.$$

S rostoucím $T \to \infty$ konverguje rozptyl (4.7.4) k nule a tedy limitní náhodná proměnná má nulový rozptyl, t.j. je konstanta. Jelikož pro každé T je střední hodnota

$$E\left[\frac{1}{T}\int_0^T X(.,t)dt\right] = m$$

proto též limitní náhodná proměnná je rovna m, t.j. platí (4.7.3) s pravděpodobností 1.

⊛

Věta 4.11: Nechť $\{X(.,t)\}_{t\in T}$ je stacionární v širším smyslu spojitý náhodný proces s korelační funkcí $B_x(.)$. Nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby

$$\frac{1}{T}\int_0^T X(.,t)dt \to 0 \quad \text{pro } T \to \infty \tag{4.7.8}$$

je splnění podmínky

$$\frac{1}{T}\int_0^T (1-\frac{t}{T})B_x(t)dt \to 0 \quad \text{pro} \quad T \to \infty \tag{4.7.9}$$

Důkaz: Jelikož $\{X(.,t)\}_{t\in T}$ je spojitý, tak dle věty 4.4 je $B_x(.)$ spojitá a tedy pro každé T existuje integrál

$$\frac{1}{T}\int_0^T X(.,t)dt. \tag{4.7.10}$$

Jelikož dále podle (4.7.9) konverguje

$$E\left[(\frac{1}{T}\int_0^T X(.,t)dt)^2\right] = \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T B_x(t-s)dtds =$$

$$= \frac{2}{T}\int_0^T (1-\frac{t}{T})B_x(t)dt \to 0 \quad \text{pro} \quad T \to \infty \tag{4.7.11}$$

tak integrál (4.7.10) konverguje pro $T\to\infty$ podle kvadratického středu k 0.

Nechť naopak (4.7.10) konverguje pro $T\to\infty$ k nule, tak musí též podle (4.7.11)

$$\frac{1}{T}\int_0^T (1-\frac{t}{T})\, B_x(t)\, dt$$

konvergovat pro $T\to\infty$ k nule.

⊛

Příklad 4.18: Nechť $\{X(.,t)\}_{t\in T}$ je stacionární náhodný proces definovaný vztahem

$$X(.,t) = X(.)\cos\lambda t + Y(.)\sin\lambda t,$$

kde X(.) a Y(.) jsou dvě náhodné proměnné s nulovou střední hodnotou, jednotkovým rozptylem takové, že

$$E\left[X(.)\,Y(.)\right] = 0.$$

Dokažte, že

$$\frac{1}{T}\int_0^T X(.,t)dt$$

konverguje pro $T\to\infty$ k nule!

Podle příkladu 4.9 je korelační funkce uvažovaného náhodného procesu rovna

$$B_x(t) = \cos \lambda t$$

a náhodný proces $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je zřejmě spojitý. Jelikož

$$\frac{2}{T^2} \int_0^T (T-t)\cos \lambda t \, dt = \frac{2}{T^2 \lambda^2} (1 - \cos \lambda T) \to 0$$

pro $T \to \infty$, tak dle věty 4.11.

$$\frac{1}{T} \int_0^T X(.,t)dt \to 0 \quad \text{pro} \quad T \to \infty .$$

(*)

Příklad 4.19: Nechť $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je náhodný proces definovaný vztahem

$$X(.,t) = X(.) \text{ pro každé } t \in T,$$

kde $X(.)$ je náhodná proměnná se střední hodnotou 0 a rozptylem 1. Dokažte, že neplatí

$$\frac{1}{T} \int_0^T X(.,t)dt \to 0 \quad \text{pro} \quad T \to \infty$$

Uvažovaný náhodný proces je stacionární s užším smyslem s korelační funkcí

$$B_x(.) = 1,$$

pro kterou neplatí podmínka (4.7.9) ani (4.7.2). Nekonverguje proto

$$\frac{1}{T} \int_0^T X(.,t)dt$$

pro $T \to \infty$ k nule. Přesto však, jak je okamžitě zřejmé

$$\frac{1}{T} \int_0^T X(.,t)dt = X(.) \quad \text{pro každé} \quad t \in T$$

a tedy integrál $\frac{1}{T} \int_0^T X(.,t)dt$ konverguje, ale jen k náhodné proměnné.

(*)

Uvažujme nyní stacionární v užším smyslu náhodný proces $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ a definujme pro dané τ náhodný proces

$$Y(.,t) = X(.,t+\tau)\, X(.,t). \tag{4.7.12}$$

Střední hodnota náhodného procesu $\{Y(.,t)\}_{t \in T}$ je pro každé t rovna

$$B_x(\tau) + m^2,$$

t.j. konstanta a korelační funkce

$$\begin{aligned} B_Y(t,s) = {} & E\left[X(.,t+\tau)X(.,t)X(.,s+\tau)X(.,s)\right] - \\ & - \left[B_x(\tau) + m^2\right]^2 . \end{aligned} \tag{4.7.13}$$

Podle předpokladu o náhodném procesu $\{X(.,t)\}_{t \in T}$, střední hodnota na pravé straně (4.7.13) závisí pouze na rozdílu (t-s) a tedy náhodný proces $\{Y(.,t)\}_{t \in T}$

je stacionární v širším smyslu. Jestliže korelační funkce $B_Y(.)$ splňuje podmínku (4.7.9), tak

$$\frac{1}{T}\int_0^T Y(.,t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T X(.,t+\ )X(.,t)dt \tag{4.7.14}$$

konverguje pro $T \to \infty$ ke střední hodnotě, t.j. k

$$B_x(\tau) + m^2.$$

Vidíme tedy, že za uvedených předpokladů je možno určit korelační funkci náhodného procesu $\{X(.,t)\}_{t\in T}$ jako časový průměr určený podle (4.7.14).

Náhodné procesy, které splňují podmínky (4.7.3) a (4.7.14) se nazývají *ergodické náhodné procesy* a jejich význam spočívá v tom, že jak jejich střední hodnotu, tak i korelační funkci lze získat jako limitu časových průměrů určených z jedné realizace.

V technické praxi se většinou předpokládá, že všechny uvažované náhodné procesy jsou ergodické případně, že odchylky od nějakého trendu tvoří ergodický náhodný proces.

4.8. Vzájemné korelační funkce

Nechť $\{X(.,t)\}_{t\in T}$ a $\{Y(.,t)\}_{t\in T}$ jsou dva stacionární náhodné procesy, jejichž střední hodnoty jsou rovny 0 a korelační funkce $B_X(.)$ resp. $B_Y(.)$.

Vzájemnou korelační funkci $B_{XY}(.,.)$ definujeme pro každé $t_1, t_2 \in T$ jako následující střední hodnotu

$$B_{XY}(t_1, t_2) = E\left[X(.,t_1)\ Y(.,t_2)\right]. \tag{4.8.1}$$

Vzájemná korelační funkce $B_{XY}(.,.)$ má zřejmě následující vlastnosti

(1) pro každé $t_1, t_2 \in T$

$$B_{XY}(t_1, t_2) = B_{YX}(t_2, t_1); \tag{4.8.2}$$

(2) pro každé $t_1, t_2 \in T$

$$\left| B_{XY}(t_1, t_2) \right| \le \sqrt{B_X(0)\ B_Y(0)} \tag{4.8.3}$$

Řekneme, že dva náhodné procesy $\{X(.,t)\}_{t\in T}$ a $\{Y(.,t)\}_{t\in T}$ jsou *navzájem stacionární*, když pro každou (n+m)-tici parametrů $t_1, t_2, \dots, t_{n+m} \in T$, a každé $x_1, x_2, \dots, x_n$ a $y_1, y_2, \dots, y_m$ a každé τ

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^{n}\{\omega: X(\omega, t_i+\tau) \le x_i\} \cap \bigcap_{j=1}^{m}\{\omega: Y(\omega, t_{n+j}+\tau) \le y_j\}\Big) =$$

$$= P\Big(\bigcap_{i=1}^{n}\{\omega: X(\omega, t_i) \le x_i\} \cap \bigcap_{j=1}^{m}\{\omega: Y(\omega, t_{n+j}) \le y_j\}\Big). \tag{4.8.4}$$

Jsou-li náhodné procesy $\{X(.,t)\}_{t\in T}$ a $\{Y(.,t)\}_{t\in T}$ navzájem stacionární, tak pro každé t_1, t_2, x, y a $\tau = -t_2$ je podle (4.8.4)

$$P(\{\omega : X(\omega, t_1 - t_2) \le x\} \cap \{\omega : Y(\omega, t_2 - t_2) \le y\}) =$$
$$= P(\{\omega : X(\omega, t_1) \le x\} \cap \{\omega : Y(\omega, t_2) \le y\})$$

závislá pouze na rozdílu $t_1 - t_2$. Proto též vzájemná korelační funkce navzájem stacionárních náhodných procesů je závislá jen na rozdílu $(t_1 - t_2)$, t.j. v našem příkladě

$$B_{XY}(t_1, t_2) = B_{XY}(t_1 - t_2, 0). \tag{4.8.5}$$

Potom však platí

$$\begin{aligned} B_{XY}(t_1,t_2) &= B_{XY}(t_1-t_2,0) = B_{YX}(0, t_1-t_2) = \\ &= B_{YX}(t_2 - t_1, 0) \end{aligned} \tag{4.8.6}$$

Označíme-li v tomto případě pro každé τ

$$B_{XY}(\tau, 0) = B_{XY}(\tau) \tag{4.8.7}$$

tak poslední vztah nám udává, že

$$B_{XY}(\tau) = B_{YX}(-\tau) \tag{4.8.8}$$

Stejně tak jako při definici stacionarity náhodných procesů jsme uvažovali náhodné procesy stacionární v užším a širším smyslu, tak též pro dva náhodné procesy budeme hovořit o navzájem stacionární v užším a širším smyslu. Zatím jsme zavedli pojem navzájem stacionárních náhodných procesů v užším smyslu podle vztahu (4.8.4).

Řekneme, že dva náhodné procesy jsou navzájem stacionární v širším smyslu, když jejich vzájemná korelační funkce je funkcí pouze rozdílu argumentů. Z výše uvedených skutečností vyplývá, že dva náhodné procesy navzájem stacionární v užším smyslu jsou též navzájem stacionární v širším smyslu. Opak však nemusí být splněn.

Příklad 4.20: Nechť $X(.)$ a $Y(.)$ jsou dvě náhodné proměnné s nulovou střední hodnotou a jednotkovým rozptylem takové, že

$$E[X(.)\,Y(.)] = 0.$$

Nechť náhodné procesy $\{X(.,t)\}_{t\in T}$ a $\{Y(.,t)\}_{t\in T}$ jsou definovány pro dané λ pomocí vztahů

$$X(.,t) = X(.)\cos\lambda t + Y(.)\sin\lambda t$$
$$Y(.,t) = -X(.)\sin\lambda t + Y(.)\cos\lambda t$$

Dokažte, že $\{X(.,t)\}_{t\in T}$ a $\{Y(.,t)\}_{t\in T}$ jsou navzájem stacionární v širším smyslu!

Nechť t_1, t_2 jsou libovolné hodnoty parametrů.

Potom

$$\begin{aligned} B_{XY}(t_1,t_2) &= E\big[(X(.)\cos\lambda t_1 + Y(.)\sin\lambda t_1)(-X(.)\sin\lambda t_2 + \\ &+ Y(.)\cos\lambda t_2)\big] = -\cos\lambda t_1 \sin\lambda t_2 + \sin\lambda t_1 \cos\lambda t_2 = \\ &= \sin\lambda(t_1 - t_2) \end{aligned}$$

*

Příklad 4.21: Nechť $\{X(.,t)\}_{t\in T}$ a $\{Y(.,t)\}_{t\in T}$ jsou stacionární náhodné procesy vzájemně stacionární v širším smyslu s korelačními funkcemi $B_X(.)$, $B_Y(.)$ a $B_{XY}(.)$. Nechť $\{Z(.,t)\}_{t\in T}$ je náhodný proces definovaný pro každé $t\in T$ vztahem

$$Z(., t) = X(., t) + Y(., t).$$

Dokažte, že náhodný proces $\{Z(., t)\}_{t\in T}$ je stacionární v širším smyslu!

Střední hodnota náhodného procesu $\{Z(., t)\}_{t\in T}$ je pro každé $t\in T$ rovna

$$m_Z(t) = m_X(t) + m_Y(t) = m_X(0) + m_Y(0),$$

t.j. střední hodnota $\{Z(., t)\}_{t\in T}$ je konstanta .

Pro každé t_1, $t_2 \in T$ korelační funkce náhodného procesu $\{Z(., t)\}_{t\in T}$ je dána pomocí

$$B_Z(t_1,t_2) = B_X(t_1,t_2) + B_{XY}(t_1,t_2) + B_{YX}(t_1,t_2)$$

$$+ B_Y(t_1,t_2) = B_X(t_1-t_2) + B_{XY}(t_1-t_2) + B_{XY}(t_2-t_1)$$

$$+ B_Y(t_1-t_2),$$

t.j. závisí jen na rozdílu $t_1 - t_2$.

⊛

Příklad 4.22: Nechť $\{X(.,t)\}_{t\in T}$ a $\{Y(.,t)\}_{t\in T}$ jsou dva vzájemně nezávislé náhodné procesy stacionární se střední hodnotou rovnou 0 a se stejnými korelačními funkcemi $B_X(.)\equiv B_Y(.)$. Potom náhodné procesy $\{U(.,t)\}_{t\in T}$ a $\{V(.,t)\}_{t\in T}$ definované pomocí

$$\begin{aligned} U(.,t) &= X(.,t)\cos\lambda t \\ & \qquad\qquad t\in T,\ \lambda>0 \\ V(.,t) &= Y(.,t)\sin\lambda t \end{aligned}$$

nejsou stacionární, ale náhodný proces $\{Z(.,t)\}_{t\in T}$ definovaný pomocí

$$Z(.,t) = U(.,t) + V(.,t) \qquad t\in T$$

je stacionární v širším smyslu.

Střední hodnoty náhodných procesů $\{U(.,t)\}_{t\in T}$ a $\{V(.,t)\}_{t\in T}$ jsou rovny 0 a jejich korelační funkce jsou pro každé t_1, $t_2\in T$ rovny

$$B_U(t_1,t_2) = B_X(t_1-t_2)\cos\lambda t_1 \cos\lambda t_2$$

a

$$B_V(t_1,t_2) = B_X(t_1-t_2)\sin\lambda t_1 \sin\lambda t_2.$$

Tyto korelační funkce nezávisí jen na rozdílu t_1-t_2 a tedy oba náhodné procesy $\{U(.,t)\}_{t\in T}$ a $\{V(.,t)\}_{t\in T}$ nejsou stacionární v širším smyslu.

Náhodný proces $\{Z(.,t)\}_{t\in T}$ má zřejmě střední hodnotu rovnu 0 a jeho korelační funkce je pro každé $t_1,t_2\in T$ rovna

$$B_Z(t_1,t_2) = E\left[(U(.,t_1)+V(.,t_1))(U(.,t_2)+V(.,t_2))\right] =$$

$$= B_X(t_1-t_2)\cos\lambda t_1 \cos\lambda t_2 + B_Y(t_1-t_2)\sin\lambda t_1 \sin\lambda t_2 =$$

$$= B_X(t_1-t_2)\cos\lambda(t_1-t_2).$$

Vidíme tedy, že náhodný proces $\{Z(.,t)\}_{t\in T}$ je stacionární v širším smyslu.

⊛

4.9. Optimální lineární transformace náhodných procesů

V tomto paragrafu se budeme zabývati otázkami lineárních transformací stacionárních náhodných procesů a otázkami optimálních lineárních transformací těchto náhodných procesů.

Předpokládejme, že $\{X(.,t)\}_{t\in T}$ je stacionární náhodný proces se střední hodnotou rovnou 0 a s korelační funkcí $B_X(.)$. Budeme se zabývat takovými lineárními transformacemi danými ve tvaru

$$Y(.,t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)X(., t-\tau)\, d\ , \qquad t \in T \tag{4.9.1}$$

kde $h(\tau) = 0$ pro $\tau < 0$ a $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\, d\tau < \infty$

Za tohoto předpokladu podle věty 4.6 integrál (4.9.1) existuje pro každé $t \in T$, neboť existuje integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} B_X(t - s)h(t)h(s)dtds, \tag{4.9.2}$$

který v absolutní hodnotě je nejvýše roven

$$B_X(0)\ \left(\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt\right)^2 < \infty$$

Je proto $\{Y(.,t)\}_{t\in T}$ náhodný proces, jehož střední hodnota je 0, neboť pro každé $t\in T$

$$E\left[Y(.,t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, E\left[X(.,t-\tau)\right]\, d\tau = 0 \tag{4.9.3}$$

a jehož korelační funkce je pro každé t_1, t_2 dána vztahem

$$B_Y(t_1,t_2) = E\left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)X(.,t_1-\tau)d\tau\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma)X(.,t_2-\sigma)d\sigma\right)\right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)h(\sigma)\, B_X(t_1-t_2-\tau+\sigma)\,d\tau\, d\sigma \tag{4.9.4}$$

Vidíme tedy, že korelační funkce $B_Y(.)$ závisí pouze na rozdílu argumentů a tedy náhodný proces $\{Y(.,t)\}_{t\in T}$ je stacionární v širším smyslu.

Jestliže $g_X(.)$ je spektrální hustota náhodného procesu $\{X(.,t)\}_{t\in T}$, t.j. jestliže korelační funkce $B_X(.)$ může být pro každé $t \in T$ vyjádřena ve tvaru

$$B_X(t) = B_X(0) \int_0^{\infty} \cos(ts) g_X(s)\, ds,$$

tak po dosazení do (4.9.4) máme

$$B_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)h(\sigma)B_X(0)\int_0^{\infty} \cos((t-\tau+\sigma)s)g_X(s)dsd\tau\, d\sigma\, .$$

Po jednoduché úpravě dostaneme

$$B_Y(t) = B_X(0)\int_0^{\infty} g_X(s)\cos(ts).\left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\cos(\tau s)\,d\tau\right)^2 + \right.$$

$$\left. +\left(\int_{\infty}^{\infty} h(\tau)\sin(\tau s)d\tau\right)^2\right]ds = B_Y(0)\int_0^{\infty} \cos(ts)\, g_Y(s)ds, \tag{4.9.5}$$

kde

$$g_Y(s) = \frac{B_X(0)}{B_Y(0)} g_X(s) \left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\cos(\tau s) d\tau \right)^2 + \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\sin(\tau s) d\tau \right)^2 \right], \tag{4.9.6}$$

což je spektrální hustota náhodného procesu $\{Y(.,t)\}_{t \in T}$.

Ze vztahu (4.9.5) však dostáváme

$$B_Y(0) = B_X(0) \int_0^{\infty} g_X(s) \left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\cos(\tau s) d\tau \right)^2 + \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\sin(\tau s) d\tau \right)^2 \right] ds \tag{4.9.7}$$

a po dosazení do (4.9.6) obdržíme pro každé s

$$g_Y(s) = g_X(s) \frac{\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\cos(\tau s) d\tau \right)^2 + \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\sin(\tau s) d\tau \right)^2}{\int_0^{\infty} g_X(\sigma) \left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\cos(\tau \sigma) d\tau \right)^2 + \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\sin(\tau \sigma) d\tau \right)^2 \right] d\sigma} \tag{4.9.8}$$

Příklad 4.23: Nechť $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je stacionární v širším smyslu náhodný proces se střední hodnotou 0 a s korelační funkcí $B_X(.)$, která pro každé $t \in T$ je dána vztahem

$$B_X(t) = e^{-c|t|}, \tag{4.9.9}$$

Nechť $\{Y(.,t)\}_{t \in T}$ je náhodný proces definovaný pro každé $t \in T$ vztahem

$$Y(.,t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, X(.,t-\tau) d\tau, \tag{4.9.10}$$

kde

$$\begin{aligned} h(\tau) &= 0 \quad \text{pro} \quad \tau \leq 0 \\ &= e^{-\alpha t} \quad \text{pro} \quad \tau > 0. \end{aligned} \tag{4.9.11}$$

Určete korelační funkci a spektrální hustotu náhodného procesu $\{Y(.,t)\}_{t \in T}$!

Spektrální funkce náhodného procesu $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je podle příkladu 4.12 rovna

$$g_X(s) = \frac{1}{\pi} \frac{2c}{c^2 + s^2}.$$

Jelikož dále

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\cos(\tau s) d\tau = \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} \cos(\tau s) d\tau = \frac{\alpha}{\alpha^2 + s^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\sin(\tau s) d\tau = \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} \sin(\tau s) d\tau = \frac{s}{\alpha^2 + s^2}$$

a

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{2c}{c^2 + s^2} \frac{1}{\alpha^2 + s^2} ds = \frac{1}{\alpha(\alpha + c)}.$$

Proto

$$g_Y(s) = \frac{1}{\pi}\ \frac{2c}{c^2+s^2}\ \frac{\frac{1}{\alpha^2+s^2}}{\frac{1}{\alpha\,(\alpha+c)}} = \frac{2}{\pi}\,\alpha c\ \frac{\alpha+c}{(\alpha^2+s^2)(c^2+s^2)}. \tag{4.9.12}$$

Korelační funkce $B_Y(.)$ je potom dle paragrafu 4.4 dána pro každé $t \in T$ vztahem

$$B_Y(t) = B_Y(0)\int_0^{\infty} g_Y(s)\cos(ts)\,ds.$$

Jelikož

$$B_Y(0) = \frac{1}{\alpha\,(\alpha+c)},$$

tak

$$B_Y(t) = \frac{2c}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos(ts)}{(\alpha^2+s^2)(c^2+s^2)}\,ds = \frac{2c}{\pi}\left[\int_0^{\infty}\frac{\alpha^2}{\alpha^2-c^2}\,\frac{\cos(ts)}{\alpha^2+s^2}\,ds\ -\right.$$

$$\left. -\ \frac{c^2}{\alpha^2-c^2}\int_0^{\infty}\frac{\cos(ts)}{c^2+s^2}\,ds\right] = \frac{c}{\alpha^2-c^2}\left[\alpha e^{-\alpha|t|} - c\,e^{-c\,|t|}\right] \tag{4.9.13}$$

$\circledast$

Předpokládejme nyní, že $\{X(.,t)\}_{t\in T}$ a $\{Y(.,t)\}_{t\in T}$ jsou dva stacionární náhodné procesy s nulovou střední hodnotou a korelačními funkcemi $B_X(.)$ resp. $B_Y(.)$, které jsou navzájem stacionární v širším smyslu a jejich vzájemná korelační funkce je $B_{XY}(.)$. Nechť $\{Z(.,t)\}_{t\in T}$ je náhodný proces, který je pro každé $t\in T$ definován vztahem

$$Z(.,t) = X(.,t) + Y(.,t)\,. \tag{4.9.14}$$

Potom podle příkladu 4.21 je náhodný proces $\{Z(.,t)\}_{t\in T}$ stacionární v širším smyslu se střední hodnotou rovnou 0 a s korelační funkcí $B_Z(.)$, která pro každé $t\in T$ je dána pomocí

$$B_Z(t) = B_X(t) + B_{XY}(t) + B_{YZ}(t) + B_Y(t). \tag{4.9.15}$$

Hledejme nyní takovou lineární transformaci náhodného procesu $\{Z(.,t)\}_{t\in T}$, t.j. takovou funkci $h(.)$ s vlastností

$$h(t) = 0 \quad \text{pro} \quad t \le 0$$

a

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\,h(t)|\,dt < \infty$$

aby náhodný proces

$$\left\{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\ Z(.,t-\tau)\,d\tau\right\}_{t\in T}$$

co nejlépe aproximoval náhodný proces $\{X(.,t)\}$ $t\in T$, případně náhodný proces $\{X(.,t+s)\}_{t\in T}$ pro dané $s \ge 0$.

Pod pojmem co nejlépe aproximovat $\{X(.,t+s)\}_{t\in T}$ chápeme to, aby funkce $h(.)$ minimalizovala střední hodnotu

$$E\left[(X(.,t+s) - \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) Z(.,t-\tau)\,d\tau)^2\right] \tag{4.9.16}$$

Funkci $h(.)$ minimalizující střední hodnotu (4.9.16) nazýváme optimální funkcí a jí odpovídající lineární transformaci optimální lineární transformace.

Ukážeme si nyní, jakým požadavkům musí vyhovovat optimální funkce $h(.)$. Střední hodnota (4.9.16) může být přepsána na tvar

$$B_X(0) - 2\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, B_{XZ}(t+s, t-\tau)\,d\tau + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, h(\sigma)\, B_Z(\tau-\sigma)\,d\tau\, d\sigma. \tag{4.9.17}$$

Podle předpokladů kladených na $\{X(.,t)\}_{t\in T}$, $\{Y(.,t)\}_{t\in T}$ a $\{Z(.,t)\}_{t\in T}$ dostaneme

$$B_{XZ}(t+s,\ t-\tau) = B_X(s+\tau) + B_{XY}(s+\tau).$$

Předpokládejme nyní, že existuje optimální funkce $h_o(.)$ a nechť $g(.)$ je libovolná funkce splňující podmínky

$$g(t) = 0 \quad \text{pro} \quad t \leq 0$$

a

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\, dt < \infty .$$

Potom funkce

$$h(.) = h_o(.) + \varepsilon\, g(.) \tag{4.9.18}$$

definuje pro každé ε lineární transformaci, a je optimální funkcí, když $\varepsilon = 0$.

Střední hodnota (4.9.16) je pro tuto funkci rovna

$$\begin{aligned} B_X(0) &- 2\int_0^{\infty} h_o(\tau)B_{XZ}(s+\tau)\,d\tau - 2\varepsilon \int_0^{\infty} g(\tau)B_{XZ}(s+\tau)\,d\tau \\ &+ \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} h_o(\tau)\, h_o(\sigma)\, B_Z(\tau-\sigma)\,d\tau\, d\sigma + \\ &+ 2\varepsilon \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} h_o(\tau) g(\sigma) B_Z(\tau-\sigma)\,d\tau\, d\sigma + \\ &+ \varepsilon^2 \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} g(\tau)\, g(\sigma)\, B_Z(\tau-\sigma)\,d\tau\, d\sigma . \end{aligned} \tag{4.9.19}$$

Zkoumáme-li (4.9.19) jako funkci parametru ε, tak vzhledem k tomu, že $h_o(.)$ je optimální, musí nabýt minimální hodnotu právě pro $\varepsilon = 0$. Extrém funkce (4.9.19) je dosažen pro la ε, pro které derivace (4.9.19) vzhledem k ε je rovna 0. Tato derivace je zřejmě

$$\begin{aligned} -2\int_0^{\infty} g(\tau)\, B_{XZ}(s+\tau)\,d\tau &+ 2\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} h_o(\tau) g(\sigma)\, B_Z(\tau-\sigma)\,d\tau\, d\sigma \\ &+ 2\varepsilon \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} g(\tau) g(\sigma)\, B_Z(\tau-\sigma)\,d\tau\, d\sigma \end{aligned}$$

a je rovna nule, když

$$\varepsilon = \frac{\int_0^{\infty} g(\tau)\left[B_{XZ}(s+\tau) - \int_0^{\infty} h_o(\sigma) B_Z(\sigma-\tau)\,d\sigma\right] d\tau}{\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} g(\tau) g(\sigma)\, B_Z(\tau-\sigma)\,d\tau\, d\sigma} . \tag{4.9.20}$$

V tomto bodě se opravdu dosahuje minimum, neboť druhá derivace podle ε je rovna

$$2 \int_0^\infty \int_0^\infty g(\tau)\, g(\sigma)\, B_Z(\tau - \sigma)\, d\tau\, d\sigma \tag{4.9.21}$$

a je nezáporná, poněvadž $B_Z(.)$ jako korelační funkce je positivně definitní.

Aby tedy minimum (4.9.19) bylo dosaženo pro $\varepsilon = 0$, musí být

$$\int_0^\infty g(\tau) \left[B_{XZ}(s+\tau) - \int_0^\infty h_o(\sigma) B_Z(\sigma - \tau)\, d\sigma \right] d\tau = 0. \tag{4.9.22}$$

Vzhledem k tomu, že $g(.)$ je libovolná funkce, musí pro každé $\tau \geq 0$ platit

$$B_{XZ}(s+\tau) - \int_0^\infty h_o(\sigma)\, B_Z(\sigma - \tau)\, d\sigma = 0 \tag{4.9.23}$$

Dostali jsme tak integrální rovnici, kterou musí splňovat optimální funkce $h_o(.)$.

Nechť naopak $h_o(.)$ je taková funkce, která vyhovuje integrální rovnici (4.9.23) a nechť $f(.)$ je libovolná funkce splňující podmínky

$$f(t) = 0 \quad \text{pro} \quad t \leq 0$$

a

$$\int_0^\infty | f(t) |\, dt < \infty .$$

Položme $g(.) = f(.) - h_o(.)$. Potom

$$E \left[(X(., t+s) - \int_0^\infty f(\tau) Z(., t-\tau)\, d\tau)^2 \right] -$$

$$- E \left[(X(., t+s) - \int_0^\infty h_o(\tau)\, Z(., t-\tau)\, d\tau)^2 \right] =$$

$$= E \left[(X(., t+s) - \int_0^\infty g(\tau) Z(., t-\tau)\, d\tau - \int_0^\infty h_o(\tau)\, Z(., t-\tau)\, d\tau)^2 \right] -$$

$$- E \left[(X(., t+s) - \int_0 h_o(\tau) Z(., t-\tau)\, d\tau)^2 \right] =$$

$$= - 2 \int_0^\infty g(\tau) \left[B_{XZ}(s+\tau) - \int_0^\infty h_o(\sigma)\, B_Z(\sigma - \tau)\, d\sigma \right] d\tau \; +$$

$$+ \int_0^\infty \int_0^\infty g(\tau) g(\sigma)\, B_Z(\tau - \sigma)\, d\tau\, d\sigma \geq 0$$

neboť $h_o(.)$ splňuje (4.9.23) a $B_Z(.)$ jako korelační funkce je positivně definitní.

Dokázali jsme tak, že nutnou a postačující podmínkou pro to, aby funkce $h_o(.)$ byla optimální funkcí je, že splňuje integrální rovnici

$$B_{XZ}(s+\tau) - \int_0^\infty h_o(\sigma)\, B_Z(\sigma - \tau)\, d\sigma = 0$$

pro každé $\tau \geq 0$.

Příklad 4.24: Nechť $Y(.,t) = 0$ pro každé $t \in T$ a nechť $\{X(.,t)\}_{t \in T}$ je stacionární náhodný proces s nulovou střední hodnotou a korelační funkcí $B_X(.)$ danou pro každé t vztahem

$$B_X(t) = e^{-c|t|} \qquad c > 0$$

Nechť $s > 0$ je dané. Určete optimální funkci $h_o(.)$, tak, aby lineární transformace

$$\int_0^{\infty} h_o(\tau)\, X(.,t-\tau)\, d\tau$$

byla nejlepší aproximace náhodného procesu $\{X(.,t+s)\}_{t \in T}$!

V tomto uvažovaném příkladě máme pro každé $t \in T$

$$Z(.,t) = X(.,t)$$

a

$$B_{XZ}(s+\tau) = B_X(s+\tau) = e^{-c|s+\tau|}$$

$$B_Z(\sigma-\tau) = B_X(\sigma-\tau) = e^{-c|\sigma-\tau|}.$$

Aby funkce $h_o(.)$ byla optimální, musí být řešením integrální rovnice (4.9.23), neboli pro každé $\tau \geq 0$ musí splňovat rovnici

$$e^{-c|s+\tau|} - \int_0^{\infty} h_o(\sigma)\, e^{-c|\sigma-\tau|}\, d\sigma = 0.$$

Tuto integrální rovnici můžeme přepsat na

$$e^{-c(s+\tau)} - \int_0^{\tau} h_o(\sigma)\, e^{-c(\tau-\sigma)}\, d\sigma - \int_{\tau}^{\infty} h_o(\sigma)\, e^{-c(\sigma-\tau)}\, d\sigma = 0 \qquad (4.9.24)$$

pro $\tau \geq 0$.

Ukážeme si, že řešením této rovnice je funkce $h_o(.)$, která pro každé $\sigma \geq 0$ je dána

$$h_o(\sigma) = e^{-cs}\, \delta_o(\sigma), \qquad (4.9.25)$$

kde $\delta_o(.)$ je t.zv. Diracova δ-funkce v bodě 0 mající tu vlastnost, že pro každou funkci $f(.)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, \delta_o(\tau)\, d\tau = f(0).$$

Funkce $h_o(.)$ daná vztahem (4.9.25) je skutečně řešením rovnice (4.9.24), neboť pro každé $\tau \geq 0$ je

$$\int_0^{\tau} e^{-cs}\, \delta_o(\sigma)\, e^{-c(\tau-\sigma)}\, d\sigma = e^{-cs}\, e^{-c\tau} = e^{-c(s+\tau)}$$

a

$$\int_{\tau}^{\infty} e^{-cs}\, \delta_o(\sigma) \quad {}^{-c(\sigma-\tau)}\, d\sigma = 0.$$

Optimální lineární transformace je tedy dána pomocí

$$\int_0^{\infty} e^{-cs}\, \delta_o(\tau)\, X(.,t-\tau)\, d \; = e^{-cs}\, X(.,t),$$

t.j.

$$E\left[(X(.,t+s) - e^{-cs}\, X(.,t))^2\right] = \min$$

a toto minimum je rovno

$$B_X(0) - 2e^{-cs}\, B_X(s) + e^{-2cs}\, B_X(0) = 1 - e^{-2cs}.$$

⊛

Název	Základy teorie náhodných procesů
Autor	Ing. Milan Ullrich, CSc
Vyšlo	v srpnu 1968
Stran	130
Obrázků	9
Příloh	—
Náklad	150 výtisků
Vydavatel	České vysoké učení technické v Praze
Určeno	pro posluchače fakulty strojní
Vedoucí katedry	Prof. RNDr František Egermayer, DrSc
Povoleno	děkanátem fakulty strojní v Praze dne 3. 4. 1968 čj. 3573-68
Vydání	první
Tiskárna	Ediční středisko ČVUT, Praha 1, Husova 5
Číslo publikace	684
AA-VA	11,51 - 12,02
Druh tisku	ofset
Cena	Kčs 9,50 II - 10

55- 506 - 68
17-25 Kčs 9,50