Počet pravděpodobnosti

Doc. Ing. Jiří Likeš, CSc.

Ing. Josef Machek, CSc.

Druhé vydání

Kniha seznamuje se základy teorie pravděpodobnosti, s početním aparátem a metodami jeho použití. Je určena hlavně pro posluchače vysokých škol technických. Přivítají ji také absolventi těchto škol a technici z praxe, kteří se chtějí s touto problematikou seznámit. *Autoři, 1981*

Dobrých knih není nikdy dost. Při hledání vhodných česky psaných učebnic základů teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky pro studenty technické univerzity jsme ani po 35 letech nenašli lépe napsané knihy, které bychom mohli studentům doporučit, než jsou učebnice autorů Jiřího Likeše a Josefa Machka. Svojí nadčasovostí, důkladným a vlídným výkladem jsou stále aktuální i v době sofistikovaného statistického software a výkonných počítačů všech velikostí. Ba naopak, připomínají nám, že statistické programy jsou pouze nástrojem, který může dobře používat pouze dobrý řemeslník, který zná a ovládá teoretické základy. Domníváme se, že si tato učebnice základů teorie pravděpodobnosti zaslouží reedici a pozornost studentů a učitelů i v době 4. průmyslové revoluce. *Reeditoři, 2019*

Redakce teoretické literatury –
hlavni redaktorka RNDr. Blanka Kulinová, CSC.

Odpovědná redaktorka
RNDr. Jarmila Novotná. CSc.

Reedice –
prof. RNDr. Jaromír Antoch, CSc., prof. RNDr. Gejza Dohnal, CSc.,
Ing. Eliška Cézová, Ph.D.

Obsah

Část I

Náhodný jev

Kapitola 1

Náhodné pokusy a náhodné jevy

1.1 Náhodné pokusy.

V základech fyziky a chemie najdeme mnoho příkladů zákonů typu „při splnění určitých podmínek nastane vždy určitý následek”, např. magnetická střelka umístěná pod proudovodičem se při zapnutí proudu vychýlí vždy určitým směrem v závislosti na směru proudu. Ponoří-li se do roztoku $CuSO_4$ elektrody, začne se na katodě hromadit měď. Očekávaný výsledek se nedostaví jen tehdy, když nejsou správně dodrženy podmínky pokusu. Splnění určitého souboru podmínek má v pokusech tohoto druhu vždy za následek výskyt určitého jevu, jednoznačně určeného příslušným souborem podmínek.

Naproti tomu existují pokusy, při kterých tomu tak není, při kterých realizace daných podmínek může vyvolat různé následky, výsledek pokusu není jednoznačně předurčen podmínkami. Např. při některých hodnotách napětí nelze s jistotou říci, zda izolátor daného druhu bude proražen či ne; při některých pokusech k průrazu dojde, při jiných nikoliv. Strojvůdce elektrického vlaku projíždějící denně stejnou trať ani při pečlivé kontrole stroje nemůže předpovědět poruchu stroje při jízdě. Při pokusu o telefonické spojení s daným číslem nelze předem říci, zda linka bude obsazena či ne. Uvede-li se do provozu určité zařízení, nelze – ani při dobře známé technologii jeho výroby – s jistotou říci, že bude bez poruchy pracovat 200 hodin, ani že k poruše dojde během prvních 100 hodin provozu, ani že k poruše dojde po 750 hodinách atd. Jde tu o činnosti, u kterých podmínky, předurčující jejich výsledek, jsou daleko méně kontrolovatelné, než podmínky některých jednoduchých laboratorních pokusů. U takovýchto činností lze jen popsat třídu možných výsledků a říci, že ten či onen výsledek nastává „velmi často", „často", „zřídka", „velmi zřídka", apod. Všem takovým činnostem, jejichž výsledek není jednoznačně předurčen podmínkami, za kterých probíhají, a které jsou (aspoň v zásadě, teoreticky) neomezeně mnohokrát opakovatelné za stejných podmínek, říkáme *náhodné pokusy*.

Co do předvídatelnosti výsledků podobají se všechny zmíněné náhodné pokusy úkonům z hazardních her jako rozdávání karet, házení hracími kostkami, roztočení kola rulety, tahání losů z osudí atd. Náhodné pokusy sdružené s hazardními (náhodnými) hrami se zvlášť dobře hodí pro ilustraci základních principů počtu pravděpodobnosti, a historicky první matematické studie pravděpodobnosti byly právě s těmito pokusy těsně spjaty. Důvodem je zvláštní jednoduchost takových pokusů: malý počet možných výsledků, jednoduchý a přesný popis, dokonalá znalost podmínek pokusu. Proto i v úvodu do teorie pravděpodobnosti je užitečné uchýlit se k příkladům z oblasti náhodných her.

1.2 Náhodné jevy a stabilita relativních četností

Náhodným jevem rozumíme jakékoliv tvrzení o výsledku náhodného pokusu, o kterém lze po uskutečnění pokusu rozhodnout, zda při dané realizaci pokusu je či není pravdivé. Tak např. spočívá-li náhodný pokus ve zkoušce elektrické pevnosti izolátoru, výsledek – „proražení izolátoru"– je náhodný jev. Spočívá-li pokus v návštěvě restaurace (bez předchozí rezervace stolu), pak jev „aspoň jeden stůl je volný"je náhodný jev. Jde-li o provoz elektrické lokomotivy v daných podmínkách, pak „porucha hnacího ústrojí během 50 000 km", „ujetí 25 000 km bez poruchy", „opotřebení ložisek kol před ujetím 40 000 km"atd. jsou náhodné jevy.

Cílem teorie pravděpodobnosti je nahradit neurčitá tvrzení jako „jev nastává velmi zřídka"nebo „jev nastává poměrně často"přesnějšími výrazy, zavést míru početnosti výskytů různých jevů a dát pravidla pro manipulaci s náhodnými jevy, s mírami početnosti jejich výskytů, tj. vytvořit soustavu pravidel pro výpočty zmíněných měr početnosti výskytů.

Jakkoliv jsou výskyty různých jevů v jednotlivých realizacích náhodného

Tab. 1: Přehled dětí narozených v Polsku v letech 1927–1932

	absolutní četnosti			relativní četnosti	
Rok	celkem	chlapci	dívky	chlapci	dívky
1927	958 733	496 554	462 189	0,5179	0,4821
1928	990 993	513 654	477 339	0,5183	0,4817
1929	994 101	514 765	479 336	0,5178	0,4822
1930	1 022 811	528 072	494 739	0,5163	0,4837
1931	964 573	496 986	467 587	0,5152	0,4848
1932	934 663	482 431	452 232	0,5162	0,4838

pokusu nepředvídatelné a jednotlivé možné výsledky se střídají zcela nepravidelně, při hromadném pozorování, tj. při pozorování velkého počtu realizací, se objevují u mnohých náhodných pokusů zřetelné zákonitosti (pravidelnosti). Ukážeme tyto zákonitosti na několika příkladech.

1.3 Příklady

1.3.1

Před narozením dítěte nelze určit, zda novorozenec bude chlapec či děvče. V tabulce 1 jsou uvedeny celkové počty dětí narozených v Polsku v několika po sobě jdoucích letech, počty chlapců a počty dívek mezi nimi a podíly chlapců a dívek (data z [1] [3]).

Je vidět, že podíly chlapců, narozených v jednotlivých letech, (tzv. relativní četnosti) se pohybují v těsné blízkosti čísla 0,52. Ačkoli předpověď pohlaví dítěte v jednotlivém případě je zcela nemožná, předpověď podílu chlapců ve velkém počtu narozených dětí možná je; lze očekávat, že mezi narozenými dětmi bude přibližně 52% chlapců. Odchylka bude tím menší, čím větší počet dětí bude pozorován.

1.3.2

Tabulka 2 obsahuje výsledky náhodného pokusu spočívajícího v hodu mincí, získané v sériích po deseti, stu a pěti stech opakování.

Z údajů v Tab. 2 plyne: (1) Relativní četnost líců při mnohonásobném opakování hodu mincí kolísá kolem čísla 0,50; (2) čím větší je počet opakování

Tab. 2: Výsledky náhodného pokusu spočívajícího v hodu mincí, získané v sériích po deseti, stu a pěti stech opakování.

Číslo série	Počet opakování	Počet líců	Relativní počet líců
1	10	6	0,6
2	10	5	0,5
3	10	3	0,3
4	10	4	0,4
5	10	5	0,5
6	100	43	0,43
7	100	50	0,50
8	100	55	0,55
9	100	49	0,49
10	100	51	0,51
11	500	248	0,496
12	500	265	0,530
13	500	238	0,476
14	500	261	0,522
15	500	248	0,496

pokusu, tím menší jsou odchylky relativní četnosti líce od 0,50.

Úkaz, že relativní četnosti některých jevů se s rostoucím počtem opakování ustalují na určitých číslech, se nazývá *stabilitou relativních četností*. Tato stabilita relativních četností je empirickým základem teorie pravděpodobnosti. Předmětem studia jsou náhodné pokusy, jejichž výsledky se vyznačují stabilitou relativních četností, a náhodným jevem se rozumí jen jev, který při opakování pokusu za stejných podmínek vykazuje stabilitu relativní četnosti.

Kapitola 2

Operace s náhodnými jevy

2.1 Úvod.

V odstavci 1.2 byla za náhodný jev označena předpověď výsledku náhodného pokusu, o které lze po uskutečnění pokusu říci, zda se splnila či nikoliv. Takové předpovědi lze různě kombinovat, tvořit jejich negace (tvrzení opačná), spojovat spojkami „a"„nebo", tvořit z nich výrobky typu „splní se A, ale nikoliv B"atd. Zbývající část této kapitoly je věnována pravidlům pro tvoření takových spojení různých náhodných jevů (stručněji též jevů).

Jevy budeme značit velkými písmeny latinské abecedy, v případě potřeby opatřenými indexy. Dohodneme se nejprve na několika názvech a označeních. Řekneme, že *jev A implikuje jev B* (nebo že *A má za následek B)*, jestliže jev B nastane vždy, když nastane A. Vztah "A implikuje B"zapíšeme takto:

$$A \subset B.$$

Dva jevy, A a B, *jsou si rovny*, jestliže $A \subset B$ a zároveň $B \subset A$, tj. jestliže A nastane vždy, když nastane B a nikdy jindy. Jev, který nastane nutně při každé realizaci daného náhodného pokusu, nazveme *jistým jevem* a označíme S. Jev, který nemůže v daném pokusu nikdy nastat, nazveme *nemožným jevem* a označíme $\emptyset$.

2.2 Sjednocení jevů.

Sjednocením jevů $A_1.A_2, \dots, A_n$ se nazývá jev, který nastane právě tehdy, když nastane alespoň jeden z jevů $A_1.A_2, \dots, A_n$. Značí se

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \quad \text{nebo} \quad \bigcup_{j=1}^{n} A_j.$$

Sjednocení jevů může obsahovat i nekonečný počet jevů; je-li jich spočetné množství, $A_1.A_2, \dots$, píšeme $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$

2.3 Příklady

2.3.1

Nechť náhodným pokusem je hod kostkou, nechť A_i značí jev „padne číslo i“. Jev B „padne sudé číslo“ je sjednocením jevů A_2, A_4, A_6, tj.

$$B = A_2 \cup A_4 \cup A_6.$$

2.3.2

Náhodný pokus spočívá ve dvou hodech kostkou. Nechť A_{ij} značí jev „v prvním hodu padlo číslo i, ve druhém číslo j”, kde $i, j = 1, 2, \dots 6$. Značí-li B jev „součet výsledků z obou hodů je roven pěti”, pak

$$B = A_{14} \cup A_{23} \cup A_{32} \cup A_{41} = \bigcup_{i=1}^{4} A_{i,5-i}.$$

2.3.3

Pro zkoušky provozní spolehlivosti určitého zařízení je předepsán tento postup: Zařízení je uvedeno v činnosti pětkrát při maximálním možném zatížení. Jakmile při některém z těchto pěti pokusů selže, nesplnilo podmínky zkoušky. Označme E_i jev „při i-té zkoušce došlo k selhání”, $i = 1, 2, \dots, 5$. Značí-li E jev „zařízení neprošlo úspěšně ověřovací zkouškou”, potom

$$E = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_5 = \bigcup_{j=1}^{5} E_j.$$

2.3.4

Náhodný pokus spočívá v házení mincí, dokud poprvé nepadne líc. Označme A_j jev „líc padne poprvé při j-tém hodu ”, $j = 1, 2, \ldots$. Potom jev „k výskytu líce bude třeba nejméně pěti hodů”(čili jev „v prvních čtyřech hodech padne vždy rub”) je sjednocením posloupnosti jevů $A_5, A_6, \ldots,$ tj. $\bigcup_{j=5}^{\infty} A_j$

2.4 Průnik jevů

Průnikem jevů $A_1, A_2, \ldots, A_n$ nazýváme jev, který nastává právě tehdy, když v realizaci pokusu nastanou všechny jevy $A_j, j = 1, 2, \ldots, n$ čili současný výskyt jevů $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Průnik jevů $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se značí

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_n \text{ nebo } \bigcap_{j=1}^{n} A_j.$$

Podobně jako sjednocení jevů i průnik jevů je definován také pro nekonečné množství jevů.

2.5 Příklady

2.5.1

Nechť náhodný pokus spočívá jako v příkl. 2.3.2 ve dvou hodech kostkou, A_i nechť značí jev „v prvním hodu padlo číslo i”a B_j jev „ve druhém hodu padlo číslo j”, $i, j = 1, 2, \ldots, 6$. Je-li A_{ij} jev „v prvním hodu padne i, ve druhém j”a C jev ”v obou hodech padne stejné číslo”, potom

$$A_{ij} = A_i \cap B_j,$$

$$C = A_{11} \cup A_{22} \cup \ldots A_{66} = \bigcup_{i=1}^{6} (A_i \cap B_i).$$

2.5.2

Uvažujme stejný pokus jako v příkl. 2.3.3. a označme A_i jev „v i-tém pokusu došlo k selhání”a B_i jev „v i-tém pokusu zařízení pracovalo bez závad”. Potom je „zařízení prošlo úspěšně celou zkouškou”je průnikem jevů $B_1, \ldots, B_5$, tj. $\bigcap_{i=1}^{5} B_i$, a jev „zařízení selhalo právě jednou, a to při posledním pokusu"je $B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap A_5$.

2.6 Disjunktní jevy.

Jestliže průnik jevů A a B je nemožný jev, $A \cap B =$, tj. jestliže jevy A a B nemohou nastat současně, říkáme, že jsou *disjunktní* (též *neslučitelné*, navzájem se vylučující). Libovolný konečný nebo nekonečný *systém jevů* se nazývá *disjunktní*, jestliže kterékoliv dva různé jevy z tohoto systému jsou disjunktní, tj. jestliže pro libovolné jevy $A_i \neq A_j$ z tohoto systému platí

$$A_i \cap A_j = \emptyset.$$

2.7 Komplementární jev.

Komplementárním jevem k jevu A (též *doplňkovým jevem* či *opačným jevem* se nazývá jev, který nastane právě tehdy, když nenastane jev A. Komplementární jev k jevu A budeme značit symbolem $\overline{A}$.

2.8 Příklady

2.8.1

Je-li náhodným pokusem hod kostkou a značí-li A jev „padne sudé číslo", pak doplňkem jevu A je $\overline{A}$ „padne liché číslo".

2.8.2

Je-li náhodným pokusem trojí opakování hodu mincí a značí-li A jev „aspoň jednou padne líc", pak doplňkem jevu A je $\overline{A}$ „ve všech třech hodech padne rub".

2.8.3

Uvažujeme pokus z příkl. 2.3.3. Doplňkem jevu E „zařízení neprojde úspěšně ověřovací zkouškou" je jev $\overline{E}$ „zařízení absolvuje ověřovací zkoušku úspěšně", tj, v žádném z pěti pokusů nedojde k selhání.

2.8.4

Komplementárním jevem k jevu A „zařízení daného druhu bude za přesně určených podmínek pracovat bez poruch aspoň po dobu 500 hodin“ je jev $\overline{A}$ „během prvních 500 hodin dojde k aspoň jedné poruše“.

2.9 Vyjádření komplementu průniku a komplementu sjednocení.

Výpočty pravděpodobností lze často zjednodušit užitím následujícího pravidla pro vyjádření komplementu průniku (či komplementu sjednocení) pomocí sjednocení (nebo průniku) komplementárních jevů:

Nechť $A_1, A_2, \ldots$ *jsou náhodné jevy. Komplementární jevem průniku* $\bigcap_i A_i$ *je sjednocení komplementárních jevů,*

$$\overline{\bigcap_i A_i} = \bigcup_i \overline{A_i}, \tag{2.9.1}$$

a komplementárním jevem ke sjednocení $\bigcup_i A_i$ *je průnik komplementárních jevů*

$$\overline{\bigcup_i A_i} = \bigcap_i \overline{A_i}, \tag{2.9.2}$$

Uvedené pravidlo se snadno dokáže přímo podle definice sjednocení, průniku a komplementárního jevu. Průnik jevů A_i nastane právě tehdy, když nastanou všechny jevy A_i (tj. když výsledek pokusu splňuje všechna tvrzení A_i). Doplňkem průniku je jev opačný, nenastanou všechny jevy A_i, tj. výsledek pokusu nesplňuje aspoň jedno z tvrzení A_i, čili pro některé i nastane $\overline{A}_i$, čili nastane $\bigcup_i \overline{A}_i$. Naopak, jestliže pro některé i nastane $\overline{A}_i$, pak pro toto i nenastane A_i, nemůže tedy nastat průnik jevů A_i a nastane komplement průniku $\bigcap_i A_i$. Sjednocení jevů A_i nastává právě tehdy, když nastane A_i aspoň pro jedno i. Doplňkový jev k tomuto sjednocení nastane, když A_i není splněno pro žádné i, tj. když pro všechna i nastane $\overline{A}_i$, čili nastane průnik jevů $\overline{A}_i$. A naopak, nastane-li průnik jevů $\overline{A}_i$, nenastane ani jediný z jevů A_i, tj. nenastane sjednocení jevů A_i, čili nastane doplněk sjednocení jevů A_i.

Poznámka. Čtenář obeznámený se základy teorie množin pozná snadno v pravidlech (2.9.1) a (2.9.2) známá de Morganova pravidla pro operace s množinami.

2.10 Rozdíl jevů.

Rozdílem jevůA a B se rozumí jev $A \backslash B$, který nastane právě tehdy, když nastane jev A, ale nikoliv jev B. Z definice rozdílu, průniku a komplementárního jevu plyne, že rozdíl $A \backslash B$ lze vyjádřit také ve tvaru

$$A \backslash B = A \cap \overline{B}, \tag{2.10.1}$$

2.11 Příklady

2.11.1

Pokus spočívá v hodu kostkou, jev A je „padne sudé číslo“, jev B je „padne číslo dělitelné třemi“. Rozdíl $A \backslash B$ je jev „padne sudé číslo, které není dělitelné třemi“, tj. jev „padne dvojka nebo čtyřka“.

2.11.2

Pokus spočívá v pozorování doby bezporuchového chodu nějakého zařízení. Jev A nechť je „první porucha nastane až po 100 hodinách provozu“, tj. „doba bezporuchového chodu je delší než 100 hodin“, jev B nechť je „během prvních 200 hodin nenastane žádná porucha“. Rozdíl $A \backslash B$ je jev „první porucha nastane mezi 100 a 200 hodinami provozu“. Značí-li C jev „během prvních 200 hodin provozu nastanou nejméně dvě poruchy,“, pak rozdíl $A \backslash C$ je jev „během prvních 200 hodin nastane nejvýše jedna porucha, a ta nenastane dříve než po 100 hodinách provozu“.

2.12 Úlohy

2.12.1

V příkladě 2.3.2 zapište pomocí jevů A_{ij} tyto jevy: A „v prvním hodu padne číslo 1“; B „výsledek druhého hodu bude o 4 větší než výsledek prvního hodu“; C „výsledek druhého hodu bude dvojnásobkem výsledku prvního hodu“.

$[A = \bigcup_{j=1}^{6} A_{1j}; \quad B = A_{15} \cup A_{26}; \quad C = A_{12} \cup A_{24} \cup A_{36}]$

2.12.2

V příkladě 2.3.3 zapište pomocí jevů $E_1, E_2, \ldots, E_5$ tyto jevy: A „první tři pokusy budou úspěšné, ve čtvrtém a v pátém zařízení selže“; B „zkouška bude neúspěšná (tj. aspoň jedno selhání), ale první a pátý pokus bude úspěšný“.
$[A = \overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap \overline{E}_3 \cap E_4 \cap E_5;\ \ B = (\bigcup_{i=1}^{5} E_i) \cap (\overline{E}_1 \cap \overline{E}_5) = \bigcup_{i=2}^{4} (E_i \cap \overline{E}_1 \cap \overline{E}_5).]$

2.12.3

Nechť A a B jsou dva náhodné jevy. Vyjádřete jejich sjednocení jako sjednocení dvou jevů navzájem disjunktních!
$[A \cup B = A \cup (B \setminus A).]$

Kapitola 3

Prostor elementárních jevů

3.1 Elementární jev.

Jev A se nazývá *elementární jev*, jestliže neexistují jevy E a F různé od A takové, že $A = E \cup F$, tj. jestliže jev A nelze vyjádřit jako sjednocení dvou jiných jevů různých od A. Prakticky to znamená, že elementárním jevem se rozumí „nejjednodušší"výsledek pokusu, který už nelze dále rozložit.

3.2 Příklady

3.2.1

Nechť náhodný pokus spočívá v hodu kostkou a nechť A značí jev „padne sudé číslo“. Jev A zřejmě není elementárním jevem, neboť např. $A = E \cup F$, kde E značí jev „padne číslo 2"a F jev „padne číslo 4 nebo 6".

3.2.2

Nechť náhodný pokus spočívá v pozorování doby bezporuchového provozu nějakého zařízení a nechť A značí jev „první porucha nastane během prvních 100 hodin provozu". Jev A není elementárním jevem, neboť existuje nespočetně mnoho způsobů jeho vyjádření ve tvaru sjednocení, např. $A = E \cup F$, kde E značí jev „porucha nastane během prvních deseti hodin provozu"a F „první porucha nastane během jedenácté až sté hodiny provozu."Elementárními jevy jsou v daném pokusu jevy „porucha nastane právě v okamžiku, kdy zařízení dovrší x hodin bezvadné funkce", kde x je libovolné nezáporné číslo.

3.3 Prostor elementárních jevů.

Prostorem elementárních jevů se rozumí množina všech elementárních jevů, které mohou nastat jako výsledek daného náhodného pokusu. Libovolný náhodný jev pak je podmnožinou prostoru elementárních jevů. Sjednocení, průnik a rozdíl náhodných jevů pak je sjednocením, průnikem a rozdílem příslušných podmnožin prostoru elementárních jevů, a operace s náhodnými jevy se redukují na operace s množinami a řídí se týmiž pravidly (viz např. [14]). Nemožnému jevu odpovídá prázdná množina, jistému jevu celý prostor elementárních jevů.

3.4 Příklady

3.4.1

V pokusu „hod kostkou"je prostorem elementárních jevů množina šesti čísel $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Jev „padne liché číslo"je podmnožina $\{1, 3, 5\}$ tohoto prostoru, jev „padne číslo větší než 4"je podmnožina $\{5, 6\}$ atd.

3.4.2

V pokusu „dva po sobě jdoucí hody kostkou"je prostorem elementárních jevů množina uspořádaných dvojic $\{(1; 1), (1; 2), \ldots, (5; 6), (6; 6)\}$. Jev „součet výsledků z obou hodů je roven 4 je podmnožina $\{(1; 3), (2; 2), (3; 1)\}$ tohoto prostoru.

3.4.3

Prostorem elementárních jevů pro pokus spočívající v deseti hodech mincí je množina všech uspořádaných deseti rubů a líců. Jev „líc padne právě dvakrát"je podmnožina těch desetic, ve kterých se vyskytují právě dva líce na kterýchkoliv místech.

3.4.4

Zvlášť často se setkáváme s náhodnými pokusy, jimž odpovídají tyto typy prostorů elementárních jevů:

a. Prostorem elementárních jevů je množina reálných čísel nebo některá její část, výsledkem pokusu je jedno reálné číslo; pak říkáme, že pozorujeme (*reálnou*) *náhodnou veličinu.*

b. Prostorem elementárních jevů je množina k-tic reálných čísel (množina k-složkových reálných vektorů či k-rozměrný euklidovský prostor nebo některá jeho část), pak říkáme, že pozorujeme *náhodný vektor* nebo *k-rozměrnou náhodnou veličinu.*

c. Prostorem elementárních jevů je množina všech posloupností $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$; pak jde o pozorování *náhodné* (či *stochastické) posloupnosti* nebo též o *stochastický proces s diskrétním časem.*

d. Prostorem elementárních jevů je prostor funkcí $X(t)$ na intervalu $0 < t < T$; pak jde o pozorování *stochastického procesu se spojitým časem.*

3.5 Úlohy

3.5.1

Hází se kostkou, dokud nepadne číslo 6.

a. Popište prostor elementárních jevů a vypiště několik jeho prvků.

b. Vypište elementární jevy tvořící jev „pokus skončí při druhém hodu“.

c. Určete, kolik elementárních jevů tvoří jev „pokus skončí třetím hodem“.

[a) Prvky prostoru elementárních jevů jsou: jev „v prvním hodu padne šestka“, jevy „v prvním hodu padne číslo j, ve druhém šestka“, kde $j = 1, 2, 3, 4, 5$ atd., tedy $\{(6), (1; 6), (2; 6), \ldots (1; 1; 6), \ldots, (5; 5; 6), \ldots\}$; b) $\{(1; 6), (2; 6), (3; 6), (4; 6), (5; 6)\}$; c) 25]

3.5.2

Předpokládejte, že pro kontrolu dodávek určitého druhu výrobků je předepsán tento postup: Z dodávky se vybírají postupně jednotlivé výrobky a zjišťuje se jejich jakost. Postup končí zamítnutím dodávky, jakmile se najde vadný kus, pokud se vyskytne nejpozději při desátém vybrání; je-li všech deset prvních vybraných kusů dobrých, postup končí přijetím dodávky. Vypište všechny elementární jevy příslušného prostoru elementárních jevů.

[Píše-li se místo „dobrý výrobek“ písmeno D, místo „vadný výrobek“ písmeno V, lze zapsat elementární jevy takto: $\{(V), (D, V), (D, D, V), (D, D, D, V), (D, D, D, D, V), (D, D, D, D, D, V), (D, D, D, D, D, D, V), (D, D, D, D, D, D, D, V), (D, D, D, D, D, D, D, D, V), (D, D, D, D, D, D, D, D, D, V)\}$.]

3.5.3

V aparatuře pro zkoušky životnosti valivých ložisek se zkouší současně pět kusů ložisek a zaznamenávají se tři nejkratší doby do opotřebení (v pořadí, v jakém se ložiska poruší, tj. nejkratší pozorovaná doba jako první atd.). Popište prostor elementárních jevů pro tento pokus.

[Prostor elementárních jevů je $\{(x_1, x_2, x_3) | 0 < x_1 \leq x_2 \leq x_3\}$.]

Část II

Pravděpodobnost

Kapitola 4

Pravděpodobnost

4.1 Relativní četnosti.

Představme si posloupnost velkého počtu n realizací nějakého náhodného pokusu. Pro daný jev A označme $n(A)$ počet těch realizací, ve kterých nastal jev A. Podíl

$$h(A) = \frac{n(A)}{n} \tag{4.1.1}$$

se nazývá *relativní četnost jevu A v n pokusech.*

Počet $n(A)$ výskytů jevu A v n pokusech zřejmě musí být celé nezáporné číslo, nejvýše rovné číslu n; jestliže jev A nenastane při žádné realizaci pokusu, pak $n(A) = 0$, jestliže naopak jev A nastane při každé z n realizací, pak $n(A) = n$. Musí tedy platit

$$0 \leq n(A) \leq n \tag{4.1.2}$$

a odtud pro relativní četnosti

$$0 \leq h(A) \leq 1. \tag{4.1.3}$$

Dále, je-li $A_1, A_2, \dots$ posloupnost navzájem disjunktních jevů a A její sjednocení, pak

$$n(A) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) + \dots\,; \tag{4.1.4}$$

tato rovnost je zřejmá – sjednocení jevů A_i nastává právě tehdy, když nastává některých z jevů A_i, a protože A_i jsou disjunktní, nastává při výskytu jejich sjednocení vždy právě jeden z nich. Každý výskyt sjednocení A je tedy zahrnut přesně v jedné z četností $n(A_i)$. Pro relativní četnosti $h(A), h(A_1), h(A_2), \ldots$ plyne odtud rovnost

$$h(A) = h(A_1) + h(A_2) + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} h(A_i). \tag{4.1.5}$$

Konečně je-li A jistý jev, tj. takový, který nevyhnutelně musí nastat při každé realizaci příslušného náhodného pokusu, pak jeho četnost $n(A)$ musí být v každé sérii n realizací pokusu rovna n, tj. jeho relativní četnost $h(A)$ musí být rovna 1.

4.2 Pravděpodobnost.

V odstavci 1.2 jsme se zmínili o tzv. statistické stabilitě relativních četností. Touto *statistickou stabilitou relativních četností* se rozumí úkaz, že relativní četnosti určitého jevu A v dlouhých sériích realizací náhodného pokusu se odchylují málo od určitého čísla. Je přirozené přijmout toto číslo za míru početnosti výskytů příslušného jevu a nazvat je pravděpodobností tohoto jevu.

Pravděpodobnost jevu A je tedy číslo $P(A)$ přiřazené jevu A, které má tu vlastnost, že relativní četnost $h(A)$ jevu A se s rostoucím počtem realizací pokusu blíží číslu $P(A)$.

4.3 Axiómy pravděpodobnosti.

Protože pravděpodobnosti jsou čísla, jejichž empirickým protějškem jsou relativní četnosti výskytů náhodných jevů, musí přiřazení pravděpodobností jednotlivým jevům splňovat obdobné podmínky, jaké splňují relativní četnosti. Tyto podmínky, zvané *axiómy pravděpodobnosti*, jsou:

4.3.1

Pravděpodobnost náhodného jevu A je nezáporné číslo, nejvýše rovné 1,

$$0 \leq P(A) \leq 1. \tag{4.3.1}$$

4.3.2

Je-li A_1, A_2, A_3 *konečný nebo spočetný disjunktní systém náhodných jevů, pak pravděpodobnost jeho sjednocení* $\bigcup_i A_i$ *je rovna součtu pravděpodobností jednotlivých jevů systému,*

$$A_i \cap A_j = \emptyset \ \ \textit{pro všechna } i \neq j \ \Rightarrow \ P(\bigcup_i A_i) = \sum_i P(A_i). \tag{4.3.2}$$

4.3.3

Je-li S *jistý jev, pak jeho pravděpodobnost je rovna 1,*

$$S \textit{ je jistý jev} \ \Rightarrow \ P(S) = 1. \tag{4.3.3}$$

Pravděpodobnost je tedy funkce přiřazující náhodným jevům reálná čísla, přičemž přiřazení splňuje axiómy 4.3.1 až 4.3.3.

4.4 Vlastnosti pravděpodobnosti.

Ze tří uvedených axiómů vyplývají ihned další vlastnosti pravděpodobnosti:

4.4.1

Jestliže jev A *implikuje jev* B*, pak pravděpodobnost jevu* A *je nejvýše rovna pravděpodobnosti jevu* B*,*

$$A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B). \tag{4.4.1}$$

Jev B lze totiž vyjádřit jako sjednocení disjunktních jevů A a $B \backslash A$; podle 4.3.2 tedy je

$$P(B) = P(A) + P(B \backslash A),$$

a protože podle 4.3.1 je $P(B \backslash A) \geq$, musí být

$$P(B) \geq P(A).$$

4.4.2

Pravděpodobnost komplementárního jevu k jevu A je rovna doplňku pravděpodobnosti $P(A)$ do jedné,

$$P(\overline{A} = 1 - P(A). \tag{4.4.2}$$

Jevy A a $\overline{A}$ jsou disjunktní a jejich sjednocení je jev jistý; z axiómu 4.3.2 tedy plyne

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1,$$

a odtud ihned plyne vlastnost (4.4.2).

4.4.3

Pravděpodobnost nemožného jevu je rovna 0.
Nemožný jev je doplňkem jevu jistého; značí-li tedy S jev jistý a jev nemožný, platí podle 4.3.2

$$P(S) + P(\emptyset) = 1, \quad \text{tj. } P(\emptyset) = 1 - P(S) = 0.$$

4.4.4

Pravděpodobnost rozdílu $A \backslash B$ jevů A a B je rovna

$$P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B). \tag{4.4.3}$$

Náhodný jev A je totiž roven sjednocení disjunktních jevů $A \cap B$ a $A \cap \overline{B} = A \backslash B$. Podle axiómu 4.3.2 je tedy

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \backslash B),$$

odkud ihned plyne (4.4.3).

4.4.5

Pravděpodobnost sjednocení dvou nedisjunktních jevů A a B je rovna

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \tag{4.4.4}$$

Vztah (4.4.4) je jednoduchým důsledkem skutečnosti, že sjednocení $A \cup B$ lze vyjádřit jako sjednocení dvou disjunktních jevů, totiž

$$A \cup B = B \cup (A \backslash B).$$

Užitím axiómu 4.3.2 a vlastnosti 4.4.4 dostaneme vztah (4.4.4).

Kapitola 5

Výpočet pravděpodobnosti pomocí kombinatorických metod

5.1 Konečný prostor elementárních jevů.

Základní vlastnosti pravděpodobnosti, uvedené v předcházejícím článku 4, umožňují výpočet pravděpodobnosti různých jevů pro jednoduché náhodné pokusy, kterým přísluší prostor elementárních jevů S s konečným počtem N prvků,

$$S = \{E_1, E_2, \ldots, E_N\}$$

kde N je dané přirozené číslo. Jestliže podmínky pokusu umožňují přiřadit každému elementárnímu jevu $E_i(i = 1, 2, \ldots, N)$ pravděpodobnost $P(E_i)$, pak pravděpodobnost libovolného jevu A (tj. libovolné podmnožiny A prostoru S) je rovna součtu pravděpodobností $P(E_i)$ přes všechny elementární jevy E_i patřící do A.

5.2 Příklad.

Jako příklad náhodného pokusu s konečným prostorem elementárních jevů uvažme hod kostkou; prostor elementárních jevů S má $N = 6$ prvků, E_1, E_2, $\ldots$, E$_6$, kde E_i značí jev „padlo číslo i“. Jev A „padne sudé číslo“ je pak podmnožina $A = \{E_2, E_4, E_6\}$ prostoru S, jev B „padne číslo dělitelné třemi“

je podmnožina $B = \{E_3, E_6\}$ prostoru S atd. Jsou-li $P(E_i)$ pravděpodobnosti jednotlivých elementárních jevů, pak pro uvedené jevy A, B máme pravděpodobnosti

$$\begin{aligned} P(A) &= P(E_2) + P(E_4) + P(E_6) \\ P(B) &= P(E_3) + P(E_6). \end{aligned}$$

Je-li kostka, se kterou se hází, naprosto pravidelná, tj. má tvar přesné krychle a je zhotovena z homogenního materiálu, pak není důvod očekávat, že by při řádně prováděných hodech padal některá čísla častěji než jiná, např. jednička častěji než šestka atd. Očekáváme tedy, že v dlouhé řadě opakování pokusu se každý z elementárních jevů $E_1, E_2, \ldots, E_6$ bude vyskytovat přibližně stejně často, tj. že elementární jevy E_i budou mít přibližně stejné relativní četnosti. Je tedy přirozené přiřadit elementárním jevům v tomto pokusu stejné pravděpodobnosti

$$P(E_1) = P(E_2) = \ldots = P(E_6).$$

Protože pravděpodobnost celého prostoru elementárních jevů musí být rovna 1, je pak

$$P(E_i) = \frac{1}{6} \text{ pro všechna } i = 1, 2, \ldots, 6$$

Pak ovšem pravděpodobnost jevu A, obsahujícího N_A elementárních jevů, je $N_A \cdot \frac{1}{6}$. Pro jevy A, B z našeho příkladu je

$$\begin{aligned} P(A) &= 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}, \\ P(B) &= 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

5.3 Klasická definice pravděpodobnosti.

Úvahu z příkladu 5.2 lze zobecnit na jakýkoliv pokus s konečným prostorem elementárních jevů. Tak se dospěje k následujícímu pravidlu známému jako tzv. *klasická definice pravděpodobnosti:*

Nechť náhodnému pokusu přísluší prostor elementárních jevů s N prvky. Jestliže za daných podmínek není důvodu předpokládat, že některý z elementárních jevů nastane spíše než jiný, pak *pravděpodobnost jevu* A, který je sjednocením N_A elementárních jevů, je rovna

$$P(A) = \frac{N_A}{N}.$$

Elementární jevy, při jejichž výskytu nastává jev A, tj. prvky podmnožiny A, se někdy nazývají „*výsledky příznivé jevu* A“, a všechny elementární jevy „*možné výsledky pokusu*“. Pravděpodobnost jevu A pak stručně definují jako „podíl počtu příznivých výsledků a počtu možných výsledků“.

5.4 Příklady.

5.4.1

V krabici s 1 000 šrouby je 30 šroubů s nesprávným závitem. Pravděpodobnost, že náhodně vybraný šroub bude mít vadný závit, je rovna $\frac{30}{1\,000} = 0,03$.

5.4.2

Náhodný pokus spočívá v hodu symetrickou mincí. Jaká je pravděpodobnost, že padne líc? Prostor elementárních jevů zde má dva prvky: Může padnout rub nebo líc. Jevu „padne líc“ je příznivý jeden elementární jev. Pravděpodobnost padnutí líce tedy je $\frac{1}{2}$.

5.4.3

Pokus spočívá ve dvou hodech symetrickou mincí; jaká je pravděpodobnost, že padne právě jedou rub (lhostejno, zda při prvním či druhém hodu)? Prostor elementárních jevů zde má čtyři prvky: $\{$(rub, rub), (rub, líc), (líc, rub), (líc, líc)$\}$.

Právě jeden rub padne, když nastane některý ze dvou elementárních jevů (rub, líc) nebo (líc, rub). Pravděpodobnost, že padne právě jednou rub, je tedy rovna $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

5.5 Poznámka.

V uvedených příkladech je stanovení počtu elementárních jevů příznivých danému jevu velmi jednoduché, je možné prostým výčtem všech elementárních jevů a všech jevů příznivých danému jevu. Jakmile však např. v příkl. 5.4.1 budeme uvažovat výběr 100 šroubů a ptát se na pravděpodobnost výskytu deseti vadných ve výběru nebo v příkl. 5.4.3 místo dvou hodů deset hodů a hledat pravděpodobnost čtyř rubů, bude vyjmenování všech elementárních jevů příliš zdlouhavé. V takových případech usnadní výpočty kombinatorické metody.

5.6 Základní vzorce kombinatoriky.

5.6.1 Uspořádané k-tice.

Nechť $\{a_1, a_2, \dots a_{n_1}\}$,$\{\mathrm{b}_1, b_2, \dots b_{n_2}\}, \dots$,$\{\mathrm{g}_1, g_2, \dots g_{n_k}\}$, je k skupin libovolných prvků; počet prvků i-té skupiny je n_i. Počet různých k-tic $(a_{i_1}, b_{i_2}, \dots, g_{i_k})$ majících na prvním místě prvek z první skupiny, na druhém prvek z druhé skupiny atd., je roven $n_1 n_2 n_3 \dots n_k$.

5.6.2 Uspořádaný výběr s opakováním.

Nechť je dána skupina n různých prvků, rozlišených např. čísly $1, 2, \dots, n$. Ze skupiny se vybírá k-krát po sobě po jednom prvku, vybraný prvek se vždy před dalším vybráním vrací. Počet všech různých k-tic $(i_1, i_2, \dots, i_k)$, které lze takto utvořit, je n^k.

5.6.3 Uspořádaný výběr bez opakování.

Nechť je dána skupina n prvků očíslovaných $1, 2, \dots, n$. Ze skupiny se vybírá k-krát po sobě po jednom prvku, vybrané prvky se nevracejí. Počet všech možných k-tic $(i_1, i_2, \dots, i_k)$, kde i_j je číslo prvku vybraného při j-tém tahu, je roven

$$n^{(k)} = n(n-1)\dots(n-k+1).$$

5.6.4 Permutace.

Skupinu n prvků očíslovaných $1, 2, \dots, n$ lze uspořádat v posloupnost $(i_1, i_2,$ $\dots, i_n)$

$$n! = n^{(n)} = n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1$$

způsoby. Jednotlivá možná uspořádání $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ čísel $1, 2, \dots, n$ jsou tzv. *permutace*. Číslo $n!$ udává počet permutací n prvků. Symbol $n!$ se čte n-faktoriál.

5.6.5 Neuspořádaný výběr bez opakování – kombinace.

Nechť je dána množina n prvků očíslovaných $1, 2, \dots n$. Počet různých podmnožin po k prvcích, které lze vybrat z dané množiny n prvků, je roven

$$\frac{n^{(k)}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Různé podmnožiny o k prvcích vybrané z dané množiny o n prvcích jsou tzv. *kombinace k prvků z n*; číslo $\binom{n}{k}$ (čte se „n nad k“) udává počet kombinací k prvků z n.

5.7 Příklady.

5.7.1

Náhodný pokus spočívá ve vytažení 4 karet z důkladně promíchané hry 32 karet. Jaká je pravděpodobnost, že budou vytaženy karty červená sedma, zelená desítka, žaludský král, kulové eso v uvedeném pořadí? Elementární jevy v tomto pokusu jsou uspořádané čtveřice karet. Podle pravidla 5.6.3 je takových možných čtveřic

$$32^{(4)} = 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 = 863\,040.$$

Důkladné zamíchání karet a vytahování bez snahy o ovlivnění výsledku vytváří předpoklady pro to, aby bylo možné považovat všechny čtveřice za stejně pravděpodobné. Pravděpodobnost vytažení čtyř daných karet v daném pořadí je

$$\frac{1}{32^{(4)}} \doteq 1,158\,7 \cdot 10^{-6}.$$

5.7.2

Uvažujme týž náhodný pokus jako v příkladu 5.7.1 a stanovme pravděpodobnost, že budou vytaženy čtyři dané karty v jakémkoliv pořadí. Počet elementárních jevů – uspořádaných čtveřic – byl stanoven v příkladu 5.7.1. Dané čtyři karty lze (podle pravidla 5.6.4) uspořádat $4! = 24$ způsoby. To znamená, že jevu „vytažení čtyř daných karet v libovolném pořadí“ je příznivých 24 elementárních jevů, a pravděpodobnost tohoto jevu je

$$\frac{4!}{32^{(4)}} = \frac{24}{863040} \doteq 2,78 \cdot 10^{-5}.$$

5.7.3

Náhodný pokus spočívá v šesti hodech kostkou; předpokládá se, že kostka je naprosto pravidelná a hází se bez snahy o dosažení určitého výsledku. Jaká je pravděpodobnost, že nepadne ani jednou šestka? Při řešení lze použít pravidla 5.6.2. Místo vybírání prvku ze skupiny šesti prvků je při každém hodu vybrána jedna z šesti stěn kostky. Výsledek šesti hodů je úplně popsán uspořádanou šesticí čísel $(i_1, i_2, \ldots, i_6$, kde i_j značí výsledek j-tého hodu. Počet takových šestic je (podle pravidla 5.6.2) $6^6 = 46656$. Vzhledem k popsaným podmínkám je lze považovat za stejně pravděpodobné. Elementárních jevů, příznivých jevu „nepadne žádná šestka“, je $5^6 = 15625$ (opět podle 5.6.2; uspořádané skupiny neobsahující šestku lze vytvořit tak, že na všech místech se vystřídají všechny ze zbývajících pěti možností). Pravděpodobnost, že v šesti hodech nepadne vůbec žádná šestka, je tedy rovna

$$\frac{5^6}{6^6} = \left(\frac{5}{6}\right)^6 \doteq 0,334\,9$$

(Možná, že se bude mnohým zdát příliš vysoká, uváží-li, že na kostce je šest možných výsledků a hází se šestkrát.) Pravděpodobnost, že v šesti hodech padne šestka aspoň jednou je rovna doplňku

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 \doteq 0,665\,1.$$

Jaká je pravděpodobnost, že šestka padne právě jednou? Jevu „právě jednou padne šestka“ jsou příznivé elementární jevy, popsané uspořádanými šesticemi $(i_1, i_2, \ldots, i_6)$, ve kterých právě jedno i_j je rovno 6, a ostatní jsou čísla od 1 do 5. Takových šestic je $6 \cdot 5^5 = 18\,759$ [je 5^5 skupin tvaru $(6, i_2, i_3, \ldots, i_6)$ s $i_j \neq 6$, 5^5 skupin tvaru $(i_1, 6, i_3, i_4, i_5, i_6)$ atd.]. Tedy pravděpodobnost právě jedné šestky je

$$\frac{6 \cdot 5^5}{6^6} = \left(\frac{5}{6}\right)^5 \doteq 0,4019.$$

Jev, že šestka padne nejvýše jednou, je sjednocením disjunktních jevů „šestka nepadne vůbec“ a „šestka padne právě jednou“. Pravděpodobnost, že šestka padne nejvýše jednou, je tedy rovna součtu pravděpodobností těchto jevů:

$$0,334\,9 + 0,401\,9 = 0,736\,8$$

Pravděpodobnost, že šestka padne více než jednou, je tedy

$$1 - 0,736\,8 = 0,263\,2.$$

5.8 Úlohy.

5.8.1

V krabici je $N = 100$ žárovek, mezi nimi $M = 5$ vadných. Stanovte pravděpodobnost, že mezi $n = 10$ náhodně vybranými žárovkami nebude žádná vadná (za předpokladu, že všechny možné podskupiny po $n = 10$ kusech mají stejnou pravděpodobnost být vybrány). [0,584]

5.8.2

V obci, ve které žije $N = 500$ rodin, bude za účelem jistého sociologického průzkumu vybráno zcela náhodně $n = 100$ rodin. Stanovte pravděpodobnost, se kterou bude do výběru zahrnuta určitá daná rodina. [0,2]

5.8.3

Uvažujte náhodný pokus spočívající v náhodném rozmístění r předmětů do n přihrádek tak, aby každé z možných rozmístění mělo stejnou pravděpodobnost. Vypočtěte pravděpodobnost P_x, že do určité dané přihrádky padne právě x předmětů.

$$\left[P_x = \binom{r}{x} n^{-r}(n-1)^{r-x}.\right]$$

5.8.4

V úloze 5.8.3 předpokládejte, že $n > r$ a že předměty se umisťují tak, že žádná přihrádka nesmí obsahovat dva nebo více předmětů. Stanovte pravděpodobnost, že bude obsazena daná skupina r přihrádek.

$$\left[1/\left(\begin{array}{c} n \\ r \end{array}\right)\right]$$

Kapitola 6

Podmíněná pravděpodobnost a nezávislost jevů

6.1 Podmíněné relativní četnosti.

Představme si n realizací nějakého náhodného pokusu a uvažujme dvě podmnožiny A a B v příslušném prostoru elementárních jevů, tj. dva náhodné jevy související s tímto pokusem. Označme $n(A)$, resp. $n(B)$ počet realizací pokusu, při kterých nastal jev A, resp. jev B a $h(A)$, resp. $h(B)$ příslušné relativní četnosti. Vyberme teď z posloupnosti realizací pokusu jen ty realizace, při kterých nastal jev B; takových realizací je $n(B)$. Předpokládáme, že jev B vůbec někdy v posloupnosti n realizací nastal, tj. že $n(B) > 0$. Pak lze vypočítat podíl

$$h(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

tento podíl nazveme *relativní četností jevu A, podmíněnou jevem B*. Můžeme si představit, že zúžíme prostor elementárních jevů sdružený s pokusem; místo původního prostoru elementárních jevů bereme jeho část B, a při sestavování statistiky výsledků bereme v úvahu jen ty realizace, při kterých nastal některý z elementárních jevů, patřících do B.

Snadno se lze přesvědčit, že podmíněné relativní četnosti mají obdobné vlastnosti jako nepodmíněné relativní četnosti:

6.1.1

Podmíněná relativní četnost je nezáporné číslo, nejvýše rovné 1;

$$0 \leq h(A|B) \leq 1. \tag{6.1.1}$$

6.1.2

Jsou-li jevy $A_1, A_2, \ldots$ *disjunktní, pak relativní četnost jejich sjednocení podmíněná jevem* B, *je rovna součtu podmíněných relativních četností*;

$$h(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i|B) = h(A_1|B) + h(A_2|B) + \ldots \tag{6.1.2}$$

6.1.3

Jestliže jev B *implikuje jev* A, *pak*

$$h(A|B) = 1. \tag{6.1.3}$$

6.2 Poznámka.

Podmíněné relativní četnosti dávají závažnou informaci o případné vzájemné souvislosti jevů. Jestliže např. v dlouhé řadě realizací pokusu je $h(A|B)$ o mnoho vyšší než $h(A)$, znamená to: V realizacích pokusu, ve kterých nastal jev B, je výskyt jevu A poměrně mnohem četnější než ve všech realizacích vůbec. Jinými slovy, vyskytne-li se jev B, lze očekávat výskyt jevu A spíše, než když jev B nenastane. Jevy A a B jsou určitým způsobem vzájemně závislé; výskyt jevu A je do určité míry vázán na výskyt jevu B. Je-li $h(A|B) = h(A)$, znamená to, že jev A se v celé posloupnosti realizací vyskytuje relativně stejně často jako v posloupnosti realizací, ve kterých nastal jev B; informace o výskytu jevu B nemění tedy nic na očekávání, zda jev A nastane či nikoliv, a jevy A a B považujeme za nezávislé.

6.3 Příklad.

Na $n = 200$ odlitcích byla zjišťována přítomnost dvou druhů vad, řekněme A a B. Z $n = 200$ odlitků jich $n(A \cap \overline{B}) = 10$ mělo jen vadu $A, n(\overline{A} \cap B = 15$ jen vadu $B, n(A \cap B) = 60$ mělo obě vady současně. Zde máme $n(A) = n(A \cap B) + n(A \cap \overline{B}) = 60 + 10 = 70, n(B) = n(A \cap B) + n(\overline{A} \cap B) = 60 + 15 = 75$. Tedy relativní četnost výskytu vady A je $h(A) = \frac{70}{200} = 0,35$, zatímco podmíněná relativní četnost výskytu vady A při výskytu vady B je

$$h(A|B) = \frac{60}{75} = 0,80,$$

Jevy „odlitek má vadu A“ a „odlitek má vadu B“ tedy asi nejsou navzájem nezávislé. [Bylo by úlohou statistické analýzy posoudit, zda pozorovaný rozdíl mezi $h(A)$ a $h(A|B)$ je tak velký, že dosti přesvědčivě prokazuje vzájemnou závislost obou druhů vad.]

6.4 Podmíněná pravděpodobnost.

Relativní četnost jevu A podmíněnou jevem B lze zapsat také takto:

$$h(A|B) = \frac{n(A \cap B)/n}{n(B)/n} = \frac{h(A \cap B)}{h(B)}. \tag{6.4.1}$$

S rostoucí délkou posloupnosti realizací pokusu se relativní četnost $h(A \cap B)$ jevu $A \cap B$ blíží číslu $P(A \cap B)$ a relativní četnost $h(B)$ jevu B číslu $P(B)$ (viz odst. 1.2). Pro dvojice jevů A a B takové, že $P(B) \neq 0$, definujeme tedy *pravděpodobnost jevu A podmíněnou jevem B jako podíl*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{6.4.2}$$

K tomuto číslu „se blíží“ relativní četnosti jevu A podmíněné jevem B při rostoucím počtu realizací pokusu.

6.5 Vlastnosti podmíněných pravděpodobností.

Podmíněné pravděpodobnosti mají obdobné vlastnosti jako nepodmíněné pravděpodobnosti. Důkazy plynou snadno z tvrzení uvedených v odst. 4.3 a 4.4.

6.5.1

Pro libovolný jev A je

$$0 \leq P(A|B) \leq 1. \tag{6.5.1}$$

6.5.2

Je-li $A_1, A_2, \ldots$ libovolný konečný nebo spočetný systém disjunktních jevů, pak

$$P(\bigcup_i A_i|B) = \sum_i P(A_i|B). \tag{6.5.2}$$

6.5.3

Jestliže jev B implikuje jev A, pak pravděpodobnost jevu A podmíněná jevem B je rovna 1;

$$B \subset A \Longrightarrow P(A|B) = 1. \tag{6.5.3}$$

6.5.4

Jestliže jev A_1 implikuje jev A_2, pak

$$P(A_1|B) \leq P(A_2|B). \tag{6.5.4}$$

6.5.5

Pravděpodobnost rozdílu $B \backslash A$ je rovna doplňku podmíněné pravděpodobnosti jevu A do 1;

$$P(B \backslash A|B) = 1 - P(A|B). \tag{6.5.5}$$

6.6 Pravděpodobnost průniku náhodných jevů.

Přímo z definice podmíněné pravděpodobnosti (6.4.2) plyne pro pravděpodobnost průniku dvou jevů výraz

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B). \tag{6.6.1}$$

Vzorec (6.6.1) lze snadno zobecnit na průnik libovolného počtu n jevů $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$P(\bigcap_{j=1}^{n} A_j) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n|\bigcap_{j=1}^{n-1} A_j. \tag{6.6.2}$$

6.7 Příklady.

6.7.1

Určité zařízení může mít v časovém intervalu dané délky zcela náhodnou poruchu. Za podmínky, že v příslušném období nenastanou extrémní povětrnostní podmínky (např. mráz), má taková náhodná porucha pravděpodobnost Q. Jestliže nastanou extrémní povětrnostní podmínky, selhává zařízení zcela jistě. Pravděpodobnost výskytu nepříznivých klimatických podmínek v daném období nechť je R. Pravděpodobnost bezporuchového provozu zařízení v daném časovém intervalu je rovna pravděpodobnosti průniku dvou jevů, totiž B „klimatické podmínky budou po celou dobu normální“ a A „nedojde k náhodné poruše“. Pravděpodobnost bezporuchového provozu za normálních podmínek je $P(A|B) = 1-Q$, pravděpodobnost trvání normálních podmínek je $P(B) = 1 - R$. Podle (6.6.1) je pravděpodobnost bezporuchového chodu po dobu celého daného intervalu rovna

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = (1 - Q)(1 - R).$$

6.7.2

Předpokládejme, že určitý systém obsahuje n elektronických bloků. Pravděpodobnost bezporuchového provozu i-tého bloku za normálních podmínek nechť je $P_i, i = 1, 2, \ldots, n$. Za normálních podmínek jsou také poruchy různých bloků navzájem nezávislé. Jestliže se však vyskytne určitá kritická situace, pak všechny bloky selžou. Pravděpodobnost výskytu takové kritické situace budiž R. Pravděpodobnost, že celý systém bude pracovat bez závad, je rovna pravděpodobnosti průniku dvou jevů, totiž „žádný z n bloků nebude mít náhodnou poruchu“ a „po celé období budou normální podmínky“. Pravděpodobnosti P_i bezporuchového chodu zařízení za normálních podmínek jsou vlastně podmíněné pravděpodobnosti jevů A_i „i-ty blok nebude mít poruchu“ při daném jevu B „podmínky provozu jsou normální“. Pravděpodobnost bezporuchového provozu celého systému je

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \cap B) = P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|B)P(B) = (1 - R)\prod_{i=1}^{n} P_i.$$

6.8 Nezávislost jevů.

Jevy A a B nazýváme *navzájem nezávislými*, jestliže platí

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \tag{6.8.1}$$

Je-li $P(B) > 0$, plyne pro nezávislé jevy A a B z rovnice (6.4.2) vztah

$$P(A|B) = P(A), \tag{6.8.2}$$

a podobně při $P(A) > 0$

$$P(B|A) = P(B). \tag{6.8.3}$$

Ze vztahů (6.8.2) a (6.8.3) a z výkladu o podmíněných relativních četnostech je ihned zřejmá motivace definice nezávislosti vztahem (6.8.1).

Vzájemnou nezávislost většího počtu jevů než dvou definujeme takto: Řekneme, že *jevy* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *jsou navzájem nezávislé*, jestliže pro libovolnou skupinu indexů $(k_1, k_2, \ldots, k_r)$, kde $r < n$, platí

$$P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \ldots \cap A_{k_r} = P(A_{k_1})P(A_{k_2} \ldots P(A_{k_r}). \tag{6.8.4}$$

Jestliže skupina jevů $A_1, A_2, \ldots A_n$ splňuje tuto podmínku, pak pro dvě disjunktní skupiny indexů $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ a $(j_1, j_2, \ldots, j_s)$ zřejmě platí

$$P\left(\bigcap_{v=1}^{r} A_{i_v} \,|\, \bigcap_{v=1}^{s} A_{j_v}\right) = P\left(\bigcap_{v=1}^{r} A_{i_v}\right). \tag{6.8.5}$$

Jsou-li tedy jevy $A_1, A_2, \ldots, A_n$ navzájem nezávislé ve smyslu definice (6.8.4), pak pravděpodobnost průniku libovolné podskupiny těchto jevů podmíněná výskytem jakékoliv jiné podskupiny je rovna nepodmíněné pravděpodobnosti. V příkladě 6.9.6 uvidíme, že mohou nastat situace, kdy libovolné dva jevy ze skupiny jevů jsou navzájem nezávislé, avšak skupina jako celek není skupinou navzájem nezávislých jevů.

6.9 Příklady.

6.9.1

Nechť náhodný pokus spočívá ve vytažení dvou karet po sobě z dobře zamíchané hry 32 karet. Jaká je pravděpodobnost jevu A „druhá vytažená karta je eso“, podmíněná jevem B „první vytažená karta je eso“?

Prostor elementárních jevů má $32 \cdot 31$ prvků. Jevu B je příznivo $4 \cdot 31$ elementárních jevů: První volba je ze čtyř es, která jsou ve hře, druhá volba ze zbývajících 31 karet. Jevu A je příznivých $28 \cdot 4 + 4 \cdot 3$ elementárních jevů. (Jev A může nastat dvěma způsoby: Buď se vyskytne dvojice „eso, eso“, a takových je 4.3, nebo dvojice „libovolná jiná karta, eso“, a takových je $28 \cdot 4$).

Konečně průniku $A \cap B$ je příznivých 4.3 elementárních jevů.

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{28 \cdot 4 + 4 \cdot 3}{32 \cdot 31} = \frac{31}{8 \cdot 31} = \frac{1}{8}, \\ P(B) &= \frac{4 \cdot 31}{32 \cdot 31} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}, \\ P(A \cap B) &= \frac{4 \cdot 3}{32 \cdot 31} = \frac{3}{8 \cdot 31} = \frac{3}{248}. \end{aligned}$$

Je ihned vidět, že jevy A a B nejsou navzájem nezávislé, neboť

$$P(A \cap B) = \frac{3}{248} \neq \frac{1}{64} = P(A)P(B).$$

Pravděpodobnost jevu A podmíněná jevem B je rovna

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{3}{31}.$$

6.9.2

Nechť náhodný pokus spočívá ve vytažení jedné karty ze hry 32 karet, nechť A značí jev „vytažená karta je červená“, B jev „vytažená karta je král“. Jaké jsou pravděpodobnosti jevů $A, B, A \cap B$? Jsou jevy A a B nezávislé?

Prostor elementárních jevů má 32 prvků. Z nich při 8 nastává jev A, při čtyřech jev B a při jednom jev $A \cap B$. Tedy

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{8}{32} = \frac{1}{4}, \\ P(B) &= \frac{4}{32} = \frac{1}{8}, \\ P(A \cap B) &= \frac{1}{32} = P(A)P(B). \end{aligned}$$

Jev A a jev B jsou navzájem nezávislé. Pravděpodobnost jevu A podmíněná jevem B je

$$P(A|B) = P(A) = \frac{1}{4}$$

[přímým výpočtem podle definice $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{32}}{\frac{4}{32}} = \frac{1}{4}$.]

6.9.3

Představme si zařízení, které je složeno z m bloků, a předpokládejme, že pro bezvadnou funkci zařízení je nutná bezvadná funkce všech bloků současně. Jakmile selže jediný z bloků, je celé zařízení neschopno provozu. (Zařízení s takovou strukturou se nazývá v teorii spolehlivosti *sériovým systémem s m složkami.)* Označme A_i jev „i-tý blok splní bezvadně svou funkci“. Pravděpodobnost bezvadné funkce celého zařízení je rovna

$$P = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right).$$

Jestliže jednotlivé složky zařízení jsou navzájem nezávislé, tj. jestliže A_i jsou navzájem nezávislé jevy, pak

$$P = \prod_{i=1}^{m} P(A_i) = P(A_1)P(A_2)\dots P(A_m).$$

Pravděpodobnost selhání zařízení je rovna

$$Q = 1 - P = 1 - \prod_{i=1}^{m} P(A_i),$$

jinak zapsáno

$$Q = P\left(\bigcup_{i=1}^{m} \overline{A}_i\right) = 1 - P\left[\overline{\left(\bigcup_{i=1}^{m} \overline{A}_i\right)}\right] = 1 - P\left[\bigcap_{i=1}^{m} \overline{(\overline{A}_i)}\right] = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{m} A_i\right).$$

6.9.4

Představme si opět zařízení složené z m bloků, avšak s takovou strukturou, že zařízení splní svou funkci, když aspoň jeden z bloků bude schopen provozu. Taková zařízení se v teorii spolehlivosti nazývají *paralelní systémy o m složkách*; typickým příkladem je zařízení, vybavené ještě $m-1$ záložními zařízeními stejného druhu. Označme opět A_i jev „i-tý blok splní bezvadně svou funkci“. Spolehlivost celého zařízení (pravděpodobnost jeho provozuschopnosti) je

$$P = P\Big(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\Big) = P\left[\overline{\Big(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\Big)}\right] = 1 - P\Big(\bigcap_{i=1}^{m} \overline{A}_i\Big).$$

Jsou-li jednotlivé podsystémy navzájem nezávislé, pak

$$P = 1 - \prod_{i=1}^{m} P\big(\overline{A}_i\big) = 1 - \prod_{i=1}^{m} \big[1 - P(A_i)\big].$$

6.9.5

Představme si konečně zařízení, složené z m článků spojených sériově, avšak pro zvýšení pravděpodobnosti bezvadné funkce je i-tý článek $(i = 1, 2, \ldots, m)$ paralelním systémem r_i identických bloků. Celý systém tedy splní bezvadně svou funkci, pokud v každém článku bude aspoň jeden bezvadně fungující blok. Označme A_{ij} jev „j-tý blok v i-tém článku plní svou funkci bez závad“. Pravděpodobnost bezvadné funkce celého systému je

$$P = P\Big[\bigcap_{i=1}^{m}\Big(\bigcup_{j=1}^{r_i} A_{ij}\Big)\Big].$$

Za předpokladu nezávislosti jevů A_{ij} je tato pravděpodobnost rovna

$$P = \prod_{i=1}^{m} P\Big(\bigcup_{j=1}^{r_i} A_{ij}\Big) = \prod_{i=1}^{m}\Big[1 - P\Big(\overline{\bigcup_{j=1}^{r_i} A_{ij}}\Big)\Big] = \prod_{i=1}^{m}\Big[1 - P\Big(\bigcap_{j=1}^{r_i} \overline{A}_{ij}\Big)\Big] =$$

$$= \prod_{i=1}^{m}\Big[1 - \prod_{j=1}^{r_i} P\big(\overline{A}_{ij}\big)\Big] = \prod_{i=1}^{m}\Big[1 - \prod_{j=1}^{r_i}\big[1 - P(A_{ij})\big]\Big].$$

6.9.6

V osudí jsou čtyři lístky, označené čísly $4, 9, 25, 30$. Náhodný pokus spočívá ve vytažení jednoho lístku tak, aby každý lístek měl stejnou pravděpodobnost býti vybrán. Označme písmenem A jev „vytažené číslo je dělitelné dvěma“, písmenem B jev „vytažené číslo je dělitelné třemi“ a písmenem C jev „vytažené číslo je dělitelné pěti“. Prostor elementárních jevů má čtyři prvky - může být taženo kterékoliv číslo. Každému z jevů A, B, C jsou příznivy dva elementární jevy, tedy

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Každému z průniku $A \cap B, A \cap C, B \cap C$ je příznivý jeden elementární jev, totiž „vytažení lístku s číslem 30“. Pravděpodobnosti průniku $A \cap B, A \cap C, B \cap C$, jsou tedy

$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{4} = \\ = P(A)P(B) = P(A)P(C) = P(B)P(C),$$

takže jevy A, B, C, jsou po dvou nezávislé. Průniku $A \cap B \cap C$ je však příznivý jediný elementární jev, takže

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq P(A)P(B)P(C).$$

Jevy A, B, C nejsou navzájem nezávislé, ačkoliv kterákoli dvojice z nich vybraná je dvojicí navzájem nezávislých jevů.

6.10 Věta o úplné pravděpodobnosti.

Při výpočtu pravděpodobností složitějších jevů je často užitečné následující pravidlo označované někdy jako „věta o úplné pravděpodobnosti“:

Nechť $B_1, B_2, \ldots, B_n$ jsou navzájem disjunktní jevy, jejichž pravděpodobnosti splňují podmínky

$$P(B_i) > 0 \quad \textit{pro všechna} \;\; i = 1, 2, \ldots, n, \tag{6.10.1}$$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) = 1. \tag{6.10.2}$$

Dále nechť A je libovolný jev, jehož pravděpodobnost $P(A|B_i)$ podmíněná jevem B_i je pro každé i známa. Pravděpodobnost jevu A je pak rovna

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i). \tag{6.10.3}$$

Jev A lze vyjádřit jako sjednocení průniků $A \cap B_i, i = 1, 2, \ldots, n$. Tyto průniky jsou disjunktní, protože jevy B_i jsou podle předpokladu disjunktní. Pravděpodobnost jevu A je tedy rovna

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i). \tag{6.10.4}$$

Pravděpodobnost průniku $A \cap B_i$ však je podle (6.6.1)

$$P(A \cap B_i) = P(A|B_i)P(B_i); \tag{6.10.5}$$

dosazením (6.10.5) do výrazu (6.10.4) pro pravděpodobnost jevu A dostaneme (6.10.3).

6.11 Příklady.

6.11.1

Nechť je dáno 10 osudí; v každém 10 koulí, v i-tém je i koulí černých a $10 - i$ bílých. Náhodný pokus spočívá ve výběru jednoho osudí (tak, aby každé mělo stejnou pravděpodobnost být vybráno), a potom ve vytažení jedné koule z vybraného osudí (opět tak, aby každá koule měla stejnou pravděpodobnost být vytažena). Jaká je pravděpodobnost, že vytažená koule bude černá?

Označme A jev „je vytažena černá koule“, B_i jev „v první fázi pokusu je zvoleno osudí s i černými koulemi“. Za těchto podmínek je

$$P(B_1) = P(B_2) = \ldots = P(B_{10}) = \frac{1}{10}.$$

$$P(A|B_i) = \frac{i}{10}, i = 1, 2, \ldots, 10.$$

Odtud plyne

$$P(A) = \sum_{i=1}^{10} P(A|B_i)P(B_i) = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{10} i = \frac{10 \cdot 11}{2 \cdot 100} = 0,55.$$

6.11.2

V osudí je 5 černých koulí a 15 bílých koulí. Z osudí se vytáhne jedna koule (tak, aby všechny koule měly stejnou pravděpodobnost vytažení), vrátí se zpět, přidá se 20 koulí téže barvy, jakou měla vytažená koule, a tah se opakuje. Jaká je pravděpodobnost, že druhá vytažená koule bude černá?

Označme B_1 jev „první vytažená koule je černá“, B_2 jev „první vytažená koule je bílá“, A jev „druhá vytažená koule je černá“. Podle (6.10.3) je pak

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) =$$
$$= \frac{5}{20} \cdot \frac{25}{40} + \frac{15}{20} \cdot \frac{5}{40} = \frac{5 \cdot 40}{20 \cdot 40} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}.$$

Je zajímavé, že pravděpodobnost vytažení černé koule ve druhém tahu je stejná jako pravděpodobnost vytažení černé koule v prvním tahu, přestože složení osudí se mění podle výsledku prvního tahu.

6.12 Bayesova věta.

Nechť $B_1, B_2, \ldots, B_n$ jsou navzájem disjunktní jevy s kladnými pravděpodobnostmi $P(B_i)$ takové, že

$$\sum_{i=1}^{n} P(B_i) = P(\bigcup_{i=1}^{n} B_i) = 1. \tag{6.12.1}$$

Nechť A je libovolný daný jev, jehož pravděpodobnosti podmíněné jevy $B_i, i = 1, 2, \ldots n$, jsou známy. Potom pravděpodobnost jevu B_k podmíněná jevem A je rovna

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}. \tag{6.12.2}$$

Vzorec (6.12.2) vyjadřující podmíněnou pravděpodobnost jevu B_k při daném A pomocí podmíněných pravděpodobností jevu A za podmínky výskytu jevů B_i je znám v teorii pravděpodobnosti jako *Bayesova věta* nebo *věta o pravděpodobnosti hypotéz* nebo *vět o inverzní pravděpodobnosti.* Je v podstatě jednoduchým důsledkem základních vlastností podmíněné pravděpodobnosti:

$$P(B_k|A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)}$$

podle (6.10.3); vyjádřením pravděpodobnosti průniku $A \cap B_k$ pomocí $P(A|B_k)$ a $P(B_k)$ podle (6.6.1) dostaneme odtud ihned (6.12.2).

6.13 Úlohy.

6.13.1

Při kontrole jakosti dodávek průmyslových výrobků se někdy užívá tohoto postupu: Z dodávky se vybere náhodně n_1 kusů; není-li mezi nimi žádný nevyhovující kus, považuje se dodávka za dodávku první jakosti, jsou-li mezi nimi dva vadné kusy nebo více, klasifikuje se jako dodávka druhé jakosti. Je-li

mezi vybranými n_1 kusy jeden vadný kus, vybere se náhodně dalších n_2 kusů; jsou-li všechny bezvadné, klasifikuje se dodávka jako dodávka první jakosti, jinak jako dodávka druhé jakosti. Označte A_x jev „v prvním výběru se najde x vadných kusů“ a B_y jev „ve druhém výběru se najde y vadných kusů“ a určete pomocí věty o úplné pravděpodobnosti (odst. 6.10) pravděpodobnost, že dodávka bude přijata jako dodávka první jakosti.
[Přijetí dodávky jako dodávky první jakosti považujme za jev $C; P(C) = P(A_0) + P(A_1)P(B_0|A_1)$.]

6.13.2

Bylo zjištěno, že u jistého druhu elektrických spotřebičů se s pravděpodobností $\pi = 0,10$ vyskytuje výrobní vada. U výrobků s touto vadou dochází během šestiměsíční záruční lhůty k poruše s pravděpodobností rovnou $Q_V = 0,50$. Výrobky, které nemají zmíněnou vadu, vykazují během stejné doby poruchu jen s pravděpodobností $Q_d = 0,01$. Vypočítejte: a) pravděpodobnost Q, že u náhodně vybraného výrobku nastane v záruční době porucha; b) pravděpodobnost, že výrobek, který se v záruční době porouchá, bude mít dotyčný výrobní vadu. [a) $Q = 0,059$; b) $0,85$.]

Kapitola 7

Axiomatická definice pravděpodobnosti

7.1 Úvod.

V předcházejících odstavcích byly rozvinuty základy teorie pravděpodobnosti s jednoduchými konkrétními pokusy. Pozornost při tom byla věnována hlavně významu a interpretaci pravděpodobnosti. Podobně se v teorii pravděpodobnosti pracovalo v jejích počátcích. S rostoucí složitostí úloh řešených v teorii pravděpodobnosti vznikla potřeba vybudovat obecnou teorii počítání s pravděpodobnostmi, vymezit třídu jevů, kterým lze rozumně přiřadit pravděpodobnosti atd. Tak se zrodila nová matematická disciplína, zabývající se pravděpodobností jako matematickým objektem, jako funkcí podmnožin prostoru elementárních jevů. Pravděpodobnost je v této teorii definována svými základními vlastnostmi, ze kterých se pak ryze deduktivní cestou jako v každé jiné oblasti matematiky vyvodí všechny zákony pravděpodobnosti bez odvolání na konkrétní příklady. V následujících několika odstavcích uvedeme základní pojmy této obecné teorie; důkladnější výklad lze najít v literatuře, např. [22], [23].

7.2 Jevové pole.

Nechť je dána neprázdná množina S a systém $\mathcal{A}$ podmnožin množiny S, který má tyto vlastnosti:

7.2.1

Množina S je prvkem systému $\mathcal{A}$.

7.2.2

Jestliže množina A je prvkem systému $\mathcal{A}$, pak i množina $\overline{A} = S - A$ je prvkem systému $\mathcal{A}$.

7.2.3

Jestliže $A_1, A_2, \ldots$ je konečný nebo spočetný systém množin z $\mathcal{A}$, pak i sjednocení všech A_i je prvkem systému $\mathcal{A}$.

Potom nazveme dvojici $\{S, \mathcal{A}\}$ *jevovým polem* a prvky systému $\mathcal{A}$ *jevy* nebo *náhodnými jevy*.

7.3 Základní vlastnosti jevového pole.

Z podmínek 7.2.1 až 7.2.3 plyne snadno řada dalších. Nejjednodušší z nich jsou:

7.3.1

Systém $\mathcal{A}$ obsahuje prázdnou množinu. To je jednoduchý důsledek podmínek 7.2.1 a 7.2.2, neboť $\emptyset = \overline{S}$.

7.3.2

Jestliže A a B jsou prvky systému $\mathcal{A}$, pak i průnik $A \cap B$ je prvkem systému $\mathcal{A}$.

Z předpokladu $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{A}$ plyne totiž podle 7.2.2 i vztah $\overline{A} \in \mathcal{A}, \overline{B} \in \mathcal{A}$, takže i $\overline{A} \cup \overline{B} \in \mathcal{A}$ (podle 7.2.3) a $A \cap B = S \backslash (\overline{A} \cup \overline{B}$ pak patří do $\mathcal{A}$ podle 7.2.2.

7.3.3

Jestliže $A \in \mathcal{A}$ a $B \in \mathcal{A}$, pak i rozdíl $A \backslash B$ je prvkem systému $\mathcal{A}$. Toto tvrzení plyne z 7.2.2 a z 7.3.2, neboť $A \backslash B = A \cap \overline{B}$.

7.4 Pravděpodobnostní míra.

Nechť je dáno jevové pole $\{S, \mathcal{A}\}$. Budiž $P(.)$ reálná nezáporná funkce definovaná na systému $\mathcal{A}$, která splňuje podmínky

$$P(S) = 1, \tag{7.4.1}$$

$$A_1, A_2, \ldots \text{ konečný nebo spočetný disjunktní systém množin z } \mathcal{A} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(\cup_i A_i) = \sum_i P(A_i). \tag{7.4.2}$$

Potom funkci $P(.)$ na $\mathcal{A}$ nazýváme *pravděpodobnostní mírou na* $\mathcal{A}$ a trojici $\{S, \mathcal{A}, P\}$ *pravděpodobnostním polem.*

7.5 Podmíněná pravděpodobnost.

Budiž $\{S, \mathcal{A}, P\}$ pravděpodobnostní pole a B daná množina z $\mathcal{A}$ s vlastností $P(B) > 0$. Nechť

$$\mathcal{B} = \{A \cap B | A \in \mathcal{A}\}. \tag{7.5.1}$$

Potom $\{B, \mathcal{B}\}$ je také jevovým polem a funkce $P(.|B)$ je definována na $\mathcal{B}$ vztahem

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{7.5.2}$$

je pravděpodobnostní mírou na $\mathcal{B}$. Pravděpodobnostní míru $P(.|B)$ definovanou vztahem (7.5.2) nazveme *podmíněnou pravděpodobností.*

Část III

Náhodné veličiny a rozdělení pravděpodobnosti

Kapitola 8

Náhodná veličina

8.1 Náhodná veličina

Valná většina náhodných pokusů, se kterými se setkáme v technických nebo přírodovědeckých aplikacích, má výsledek vyjádřený číslem; v závěrečné fázi pokusu se cosi měří či počítá, přičemž výsledek měření nebo počítání není jednoznačně určen podmínkami měření či počítání (přinejmenším není jednoznačně určen podmínkami známými a zhodnotitelnými při provedení pokusu). Někdy je nevypočitatelnost výsledků dána existencí „náhodných chyb měření“: Při dosti vysoké jemnosti měření se i výsledky měření fyzikální konstanty (jako např. vzdálenosti mezi dvěma body, úhel mezi dvěma směry, gravitační konstanta atd.) jeden od druhého liší, i když se usiluje všemožně o dodržení stálých podmínek. Jindy je zase náhodnost či nahodilost výsledků zakleta přímo v podstatě pokusů; např. při tzv. radiometrických metodách měření se hustota zemin zjišťuje pomocí množství impulsů, které zeminou proniknou a je třeba počítat s tím, že každý zdroj radioaktivního záření vysílá impulsy v nepravidelných, náhodných intervalech. Při zkouškách farmaceutických výrobků velikost reakce organismu závisí na individuálních vlastnostech jedince, které se liší v určitých mezích i mezi jedinci majícími shodné všechny zjistitelné charakteristiky jako věk, tělesnou váhu atd.

Ve všech takových a podobných případech máme co dělat s náhodným pokusem, jehož prostor elementárních jevů S je množina reálných čísel $\mathbb{R}$ nebo některá její podmnožina. Výsledek náhodného pokusu, daný reálným číslem, je hodnotou veličiny X, která se nazývá náhodnou veličinou.

Jiným případem jsou náhodné pokusy, jejichž výsledek má kvalitativní charakter (např. dobrý nebo vadný výrobek, pohlaví narozeného dítěte apod.). V takovýchto pokusech můžeme každému výsledku (elementárnímu jevu $E \in S$) přiřadit reálné číslo (např. dobrému výrobku 0 a vadnému 1), které považujeme za hodnotu náhodné veličiny X.

Formálně lze tedy náhodnou veličinu definovat takto: Mějme pravděpodobnostní pole $(S, \mathcal{A}, P)$. *Náhodná veličina* X je reálná funkce $X(E)$ prvků E prostoru elementárních jevů S taková, že pro každé reálné x je množina $\{E \in S | X(E) \leq x\}$ náhodným jevem (tj. prvkem systému $\mathcal{A}$).

Jedním z úkolů teorie pravděpodobnosti je vybudovat matematický aparát, pomocí kterého by bylo možno přiřadit všem prakticky zajímavým a důležitým podmnožinám množiny reálných čísel $\mathbb{R}$ příslušné pravděpodobnosti, např. říci „pravděpodobnost, že výsledek pokusu nabude hodnoty z daného intervalu $(a, b\rangle$, je rovna $0,30$“ nebo „pravděpodobnost, že výsledek pokusu překročí dané číslo c, je rovna $\exp{-\lambda c}$, kde λ je určité číslo“ apod. Je-li takový vztah mezi podmnožinami množiny R a jejich pravděpodobnostmi dán, říkáme, že je dáno *rozdělení pravděpodobnosti* příslušné náhodné veličiny.

Obecným zákonům popisu rozdělení náhodných veličin je věnována tato kapitola. V celé kapitole budou velká písmena z konce abecedy značit náhodné veličiny, jim odpovídající malá písmena jejich možné hodnoty. Symbol $P(X \leq x)$ bude značit pravděpodobnost jevu „náhodná veličina X nepřekročí hodnotu x“. Při dané množině $A \subset \mathbb{R}$ bude $P(X \in A)$ značit pravděpodobnost jevu „náhodná veličina X nabude hodnoty z A“ apod.

8.2 Distribuční funkce

Jednou z možností popisu rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny X je určit distribuční funkci této náhodné veličiny. *Distribuční funkcí náhodné veličiny* X nazveme reálnou funkci $F(x)$ definovanou pro každé reálné x vztahem

$$F(x) = P(X \leq x). \tag{8.2.1}$$

Distribuční funkce $F(x)$ v bodě x tedy vyjadřuje pravděpodobnost, že náhodná veličina X nabude hodnoty menší nebo rovné x.

V řadě prací, např. [2, 10, 25] se distribuční funkce definuje vztahem

$$F(x) = P(X < y), -\infty < x < \infty.$$

Námi uvažovaná definice je zavedena především s ohledem na tabulky distribučních funkcí diskrétních rozdělení (viz dále odst. 9.2).

8.3 Vlastnosti distribuční funkce

Distribuční funkce libovolné náhodné veličiny má tyto vlastnosti:

8.3.1

$$0 \leq F(x) \leq 1 \quad \textit{pro každé reálné } x.$$

Tato vlastnost vyplývá bezprostředně z vlastností pravděpodobnosti náhodných jevů.

8.3.2

$F(x_1) \leq F(x_2)$ *pro každé reálné* $x_1 < x_2$, tj. *distribuční funkce je neklesající.*

Náhodný jev $\{X \leq x_2\}$ je sjednocením dvou disjunktních jevů $\{X \leq x_1\}$ a $\{x_1 < X \leq x_2\}$. Tudíž

$$P(X \leq x_2) = P(X \leq x_1) + P(x_1 < X \leq x_2), \tag{8.3.1}$$

takže

$$P(X \leq x_2) - P(X \leq x_1) = F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 < X \leq x_2) \geq 0,$$

neboť pravděpodobnost libovolného náhodného jevu je nezáporné číslo.

8.3.3

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} F(x) = F(\infty) = 1.$$

8.3.4

Distribuční funkce je zprava spojitá a má nejvýš spočetně mnoho bodů nespojitosti.

Vlastnosti 8.3.3 a 8.3.4 jsou dokázány v [5].

Shrneme-li tedy, je distribuční funkce $F(x)$ neklesající, zprava spojitá funkce, která má nejvýš spočetně mnoho bodů nespojitosti a v $-\infty$ a ∞ nabývá hodnoty 0 a 1.

Naopak lze ukázat (viz [23], str. 161), že každou reálnou funkci, která má vlastnosti 8.3.1 až 8.3.4, lze považovat za distribuční funkci nějaké náhodné veličiny.

Přepišme vztah (8.3.1) na tvar

$$P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1), \quad -\infty < x_1 < x_2 < \infty. \tag{8.3.2}$$

Tento důležitý vztah říká: *Pravděpodobnost, že náhodná veličina X nabude hodnoty z intervalu $(x_1, x_2\rangle$, je rovna rozdílu hodnot distribuční funkce $F(X)$ v krajních bodech tohoto intervalu.*

Uvažujme nyní pro libovolné reálné číslo x pravděpodobnost $P(X = x)$. Zřejmě

$$P(X = x) = P(X \leq x) - P(x < x) = F(x) - F(x - 0), \tag{8.3.3}$$

kde $F(x-0) = lim_{h\to 0^+} F(x-h)$ značí limitu funkce F v bodě x zleva.

Na obr. 1 je znázorněna distribuční funkce $F(x)$ náhodné veličiny X, která nabývá hodnoty 0 s pravděpodobností $P(X = 0) = 1 - \pi$ a hodnoty 1 s pravděpodobností $P(X = 1) = \pi$, kde π je dané číslo z intervalu $(0, 1)$. Tato distribuční funkce má skoky v bodech $x = 0$ a $x = 1$.

8.4 Úlohy.

8.4.1

Znázorněte distribuční funkci náhodné veličiny X, která nabývá hodnot $x_j = 1, 2, \dots 6$ s pravděpodobnostmi $P(X = x_j) = \frac{1}{6}, j = 1, 2, \dots, 6$.

8.4.2

Nechť náhodná veličina X může nabýt hodnot pouze z intervalu $(a, b\rangle$, kde $-\infty < a < b < \infty$. Ukažte, že $F(x) = 0$ pro všechna $x \leq a$ a $F(x) = 1$ pro všechna $x \geq b$.

8.4.3

Nechť náhodná veličina X má distribuční funkci $F(x) = 0$ pro $x \leq 0$ a $F(x) = 1 - e^{-2x}$ pro $x > 0$. Stanovte hodnoty pravděpodobností $P(1 < X \leq 2), P(-2 < X \leq 1), P(X = 1)$. [0,117; 0,865; 0.]

Kapitola 9

Rozdělení diskrétního a spojitého typu

9.1

V aplikacích se zpravidla setkáváme s náhodnými veličinami dvojího typu:

a. Náhodná veličina X může nabývat jen hodnot z nějaké konečné nebo spočetné množiny $\{x_1, x_2, \ldots\}$. Takové jsou zejména náhodné veličiny celočíselné, např.:

- počet částic, odštěpených radioaktivním zářičem za jednotku času; X může nabývat hodnot $0, 1, 2, \ldots$;
- počet vadných výrobků mezi n náhodně vybranými výrobky z dodávky; X může nabývat hodnot $0, 1, \ldots, n$;
- součet počtu ok při hodu dvěma hracími kostkami; X může nabývat hodnot $2, 3, \ldots, 12$.

b. Náhodná veličina X může nabývat všech hodnot z určitého intervalu. Příklady takovýchto veličin jsou:

- doba bezporuchového chodu zařízení; X může nabývat kladných reálných hodnot $x \in (0, \infty)$;
- náhodná chyba měření; X může nabývat hodnot z intervalu $\langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle$, $0 < \varepsilon < \infty$, kde ε je maximální absolutní hodnota náhodné chyby.

V případech a) říkáme, že náhodná veličina X má rozdělení diskrétního typu, v případech b) jde zpravidla o tzv. rozdělení spojitého typu, jež bude přesněji definováno v odst. 9.4.

9.2 Rozdělení diskrétního typu

Náhodná veličina X má *rozdělení diskrétního typu*, existuje-li konečná nebo spočetná množina reálných čísel $\{x_1, x_2, \ldots\}$ taková, že pro každé x_j z této množiny je pravděpodobnost $P(X = x_j > 0$ a součet těchto pravděpodobností přes všechna x_j z této množiny je roven jedné,

$$\sum_{x_j} P(X = x_j) = 1. \tag{9.2.1}$$

Nejjednodušší způsob zadání takovéhoto rozdělení je ten, že udáme množinu $\{x_1, x_2, \ldots\}$ možných hodnot náhodné veličiny X a pravděpodobnosti (vzorcem, tabulkou, grafem, rekurentním předpisem) $P(X = x_j)$ pro všechny tyto hodnoty.

Funkce $P(X = x)$ se nazývá *pravděpodobnostní funkce* náhodné veličiny X. Distribuční funkce náhodné veličiny X je rovna

$$F(x) = \sum_{x_j \leq x} P(X = x_j), -\infty < x < \infty. \tag{9.2.2}$$

Distribuční funkce (9.2.2) má skoky v bodech $x_1, x_2, \ldots$ a je konstantní v intervalu $\langle x_j, x_{j+1}, j = 1, 2, \ldots$. Přitom v bodě x_j je velikost skoku rovna hodnotě $P(X = x_j), j = 1, 2, \ldots$.

9.3 Příklady.

9.3.1

Nechť náhodná veličina X nabývá hodnot $0, 1, \ldots, M-1$ s pravděpodobnostmi

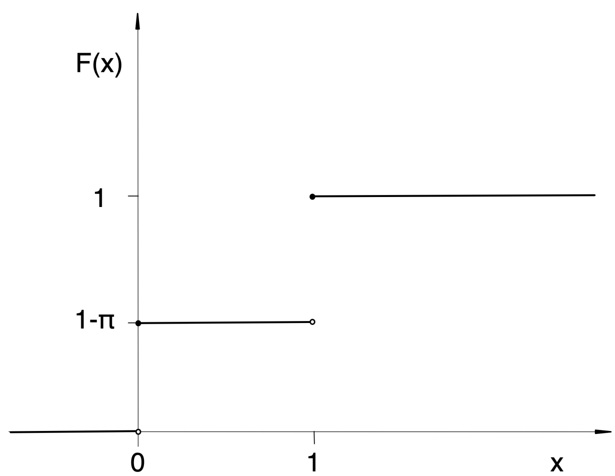
$$P(X = x) = \frac{1}{M}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, M-1. \tag{9.3.1}$$

Příklady této náhodné veličiny jsou:

pro $M = 2$ veličina, jejíž distribuční funkce je znázorněna na 9.3.1, pro případ $\pi = \frac{1}{2}$;
pro $M = 10, 100, 1\,000, \ldots$ jedno-, dvou-, tří-, ...-ciferná pseudonáhodná čísla.

Distribuční funkce této náhodné veličiny je rovna

$$\begin{aligned} F(x) &= 0, \qquad x < 0, \\ &= \frac{k}{M}, \qquad k-1 \le x < k, \quad k = 1, 2, \ldots, M-1, \\ &= 1, \qquad x \ge M-1. \end{aligned} \tag{9.3.2}$$



Obr. 1: Graf distribuční funkce

Rozdělení s distribuční funkcí (9.3.2) se nazývá diskrétní rovnoměrné (rektangulární) rozdělení.

9.3.2

Speciálním případem rozdělení diskrétního typu je rozdělení nabývající hodnoty μ s pravděpodobností $P(X = \mu) = 1$, přičemž $P(X = x) = 0$ pro všechna $x \neq \mu$.

Toto rozdělení se nazývá *degenerované*.

9.4 Rozdělení spojitého typu

Náhodná veličina X má rozdělení spojitého typu, existuje-li nezáporná reálná funkce $f(x)$ taková, že pro všechna reálná x se dá distribuční funkce $F(x)$ vyjádřit ve tvaru

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad -\infty < x < \infty. \tag{9.4.1}$$

Funkce $f(x)$ se nazývá hustota pravděpodobnosti (nebo stručněji hustota) náhodné veličiny X.

Distribuční funkce (9.4.1) je spojitá pro všechna reálná x. Ve všech bodech, kde existuje derivace distribuční funkce, je

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}. \tag{9.4.2}$$

V odstavci 8.3 jsme uvedli, že distribuční funkce $F(x)$ jednoznačně charakterizuje rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny X. Pro náhodné veličiny se spojitým rozdělením lze jejich rozdělení pravděpodobnosti charakterizovat též hustotou pravděpodobnosti $f(x)$.

Z (8.3.1) a (9.4.1) vyplývá, že pro všechna reálná $x_1 < x_2$ platí

$$P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{9.4.3}$$

To znamená, že pravděpodobnost náhodného jevu $x_1 < X \leq x_2$ je rovna velikosti plochy pod křivkou hustoty pravděpodobnosti $f(x)$ mezi $x = x_1$ a $x = x_2$ (viz obr. 2).

Ze vztahů (9.4.3) a vlastnosti 8.3.3 distribuční funkce vyplývá, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1. \tag{9.4.4}$$

Je-li $f(x) = 0$ pro všechna $x \leq A$ a pro všechna $x > B$, pak je

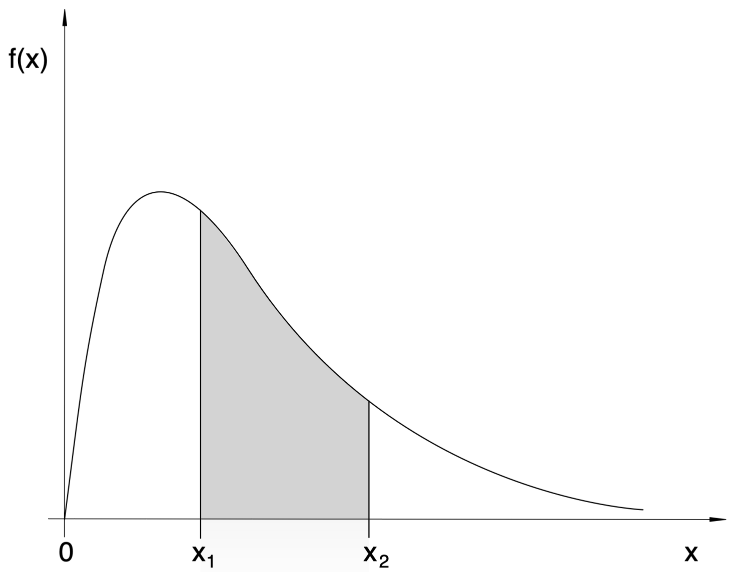
$$\int_{A}^{B} f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Dále z (8.3.3) vyplývá, že pro náhodné veličiny se spojitým rozdělením platí

$$P(X = x) = 0 \tag{9.4.5}$$

pro každé reálné x. Tudíž pro všechna reálná $x_1 < x_2$ je

$$P(x_1 < X \le x_2) = P(x_1 \le X < x_2) = \\ P(x_1 \le X \le x_2) = P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x. \quad (9.4.6)$$



Obr. 2: Pravděpodobnost $P(x_1 < X \le x_2)$

9.5 Příklady

9.5.1

Nechť náhodná veličina X má distribuční funkci

$$\begin{aligned} F(x) &= 0, & x &\le \mu - h, \\ &= \frac{1}{2h}(x - \mu + h), & \mu - h < x &< \mu + h, \\ &= 1, & x &\ge \mu + h, \end{aligned}$$

kde μ a h jsou parametry, které mohou nabýt hodnot $-\infty < \mu < \infty$ a $h > 0$.

Hustota pravděpodobnosti $f(x) = \mathrm{d}F(x)/\mathrm{d}x$ je rovna

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2h}, \quad \mu - h < x < \mu + h, \\ &= 0, \quad \text{jinak.} \end{aligned} \tag{9.5.1}$$

Rozdělení s touto hustotou pravděpodobnosti se nazývá *rovnoměrné (rektangulární) rozdělení* na intervalu $(\mu - h, \mu + h)$.

Speciálním případem je rovnoměrné rozdělení na intervalu $(0, 1)$, (tj. s parametry $\mu = \frac{1}{2}$ a $h = \frac{1}{2}$), jemuž přísluší hustota pravděpodobnosti

$$\begin{aligned} f(x) &= 1, \quad 0 < x < 1, \\ &= 0, \quad \text{jinak.} \end{aligned} \tag{9.5.2}$$

9.5.2

Nechť náhodná veličina X má hustotu pravděpodobnosti

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{\lambda^2 + (x - \theta)^2}, \quad -\infty < x < \infty, \tag{9.5.3}$$

kde λ a θ jsou parametry, které mohou nabývat hodnot $\lambda > 0$ a $-\infty < \theta < \infty$.

Distribuční funkce je

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{x - \theta}{\lambda}\right), \quad -\infty < x < \infty.$$

Rozdělení s touto hustotou pravděpodobnosti se nazývá *Cauchyovo rozdělení.*

9.6 Úlohy

9.6.1

Ověřte, zda funkce

$$\begin{aligned} F(x) &= 0, \quad x < 1, \\ &= \frac{1}{6}, \quad -1 \leq x < 1, \\ &= \frac{1}{2}, \quad 1 \leq x < 2, \\ &= 1, \quad x \geq 2, \end{aligned}$$

je distribuční funkce a stanovte pravděpodobnostní funkci $P(X = x)$.

$$\left[P(X=-1)=\tfrac{1}{6}, P(X=1)=\tfrac{1}{3}, P(X=2)=\tfrac{1}{2}.\right]$$

9.6.2

Nechť náhodná veličina X má hustotu pravděpodobnosti

$$\begin{aligned} f(x) &= 12x^2(1-x), \quad 0<x<1, \\ &= 0, \qquad\qquad\quad \text{jinak.} \end{aligned}$$

Stanovte distribuční funkci této náhodné veličiny a pomocí ní určete pravděpodobnost $P(0,2 < X < 0,8)$.

$$\left[\begin{array}{lll} F(x) = & 0, & x \le 0, \\ \quad\;\; = & x^3(4-3x), & 0<x<1, \\ \quad\;\; = & 1, & x \ge 1, \\ \multicolumn{3}{c}{P(0,2 < X < 0,8) = 0,792.} \end{array}\right]$$

9.6.3

Nechť náhodná veličina X má distribuční funkci

$$\begin{aligned} F(x) &= 0, \qquad\qquad\quad x \le 0, \\ &= 1-\mathrm{e}^{(-\lambda x)}, \quad x>0, \lambda>0. \end{aligned}$$

Stanovte hustotu pravděpodobnosti této náhodné veličiny.

$$\left[\begin{array}{lll} f(x) = & 0, & x \le 0, \\ \quad\;\; = & \lambda e^{(-\lambda x)}, & x>0. \end{array}\right]$$

Kapitola 10

Číselné charakteristiky náhodných veličin

10.1

Rozdělení pravděpodobnosti libovolné náhodné veličiny X charakterizuje její distribuční funkce $F(x)$. Rozdělení diskrétního typu lze též charakterizovat pravděpodobnostní funkcí $P(X = x)$ a rozdělení spojitého typu hustotou pravděpodobnosti $f(x)$.

Uvedené funkce nám podávají o náhodné veličině X úplnou informaci. V řadě případů nám však postačí shrnout informaci do několika čísel. Tato čísla nazýváme *charakteristiky náhodné veličiny* X (nebo *charakteristiky* příslušného *rozdělení)*. V dalším uvedeme nejpoužívanější z těchto charakteristik.

10.2 Střední hodnota

Nejdůležitější charakteristikou náhodné veličiny X je *střední hodnota* (někdy též nazývaná *očekávaná hodnota* nebo *matematická naděje*) $E(X)$.

Má-li náhodná veličina X diskrétní rozdělení, tj. nabývá-li hodnot x_1, x_2, $\ldots$ s pravděpodobnostmi $P(X = x_j), j = 1, 2, \ldots$, přičemž platí vztah (9.2.1), je střední hodnota $E(X)$ definována výrazem

$$E(X) = \sum_{x_j} x_j P(X = x_j). \tag{10.2.1}$$

Má-li náhodná veličina X hustotu pravděpodobnosti $f(x)$, je střední hodnota $E(X)$ definována jako integrál

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, \mathrm{dx}. \tag{10.2.2}$$

Jestliže hustota $f(x) > 0$ na nekonečném intervalu, je střední hodnota definována jen tehdy, když existuje $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\, \mathrm{dx}$.

10.3 Příklady

10.3.1

Stanovme střední hodnoty náhodných veličin X uvažovaných v příkl. 9.3.1 a 9.3.2.

Pro diskrétní rovnoměrné rozdělení je

$$E(X) = \sum_{x=0}^{M-1} x P(X = x) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} x = \frac{1}{M} \frac{M(M-1)}{2} = \frac{M-1}{2},$$

zatímco pro degenerované rozdělení je

$$E(X) = \mu P(X = \mu) = \mu.$$

10.3.2

Stanovte střední hodnoty náhodných veličin X uvažovaných v příkl. 9.5.1 a 9.5.2.

Pro rovnoměrné rozdělení je

$$E(X) = \int_{\mu-h}^{\mu+h} x \frac{1}{2h}\, \mathrm{d}x = \frac{(\mu+h)^2 - (\mu-h)^2}{4h} = \mu.$$

Má-li X Cauchyovo rozdělení, je

$$E(X) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda x}{\lambda^2 + (x - \vartheta)^2}\, \mathrm{dx}.$$

Tento integrál však neexistuje, takže pro Cauchyovo rozdělení neexistuje střední hodnota.

10.4 Momenty

Uvažujme funkci $h(x)$ náhodné veličiny X. Definujme střední hodnotu funkce $h(X)$ (pokud tato střední hodnota existuje) výrazem [1]

$$E\big[h(X)\big] = \sum_{x_j} h(x_j)P(X = x_j) \tag{10.4.1}$$

pro náhodnou veličinu X s diskrétním rozdělením a

$$E\big[h(X)\big] = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x)\,\mathrm{dx} \tag{10.4.2}$$

pro náhodnou veličinu se spojitým rozdělením.

V předchozím odstavci jsme uvažovali případ $h(X) = X$. Položíme-li $h(X) = X^r$, dostaneme charakteristiku, která se nazývá *r-tý obecný moment*

$$\mu'_r(X) = E(X^r), r = 0, 1, 2, \ldots \tag{10.4.3}$$

Pro $h(X) = [X - E(X)]^r$ dostáváme tzv. *r-tý centrální moment*

$$\mu_r(X) = E\Big[\big[X - E(X)\big]^r\Big], r = 0, 1, 2 \ldots \tag{10.4.4}$$

Protože

$$\big[X - E(X)\big]^r = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{r}{j} X^{r-j}\big[E(X)\big]^j,$$

vyplývá z (10.4.1) a (10.4.4) a z vlastností [2] součtů a integrálů, že

$$\mu_r(X) = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{r}{j} \mu'_{r-j}(X)\big[E(X)\big]^j, j = 0, 1, 2, \ldots. \tag{10.4.5}$$

[1] Protože $h(X)$ je také náhodná veličina, měla by se její střední hodnota určit podle (10.2.1), příp. (10.2.2). Lze ukázat, že použitím těchto vztahů se dospěje k výrazům (10.4.1), příp. (10.4.2).

[2] Součet nebo integrál lineární kombinace je roven téže lineární kombinaci součtu nebo integrálů.

Zejména

$$\begin{aligned}
\mu_0(X) &= 1, \\
\mu_1(X) &= 0, \\
\mu_2(X) &= \mu_2'(X) - \big[E(X)\big]^2, \\
\mu_3(X) &= \mu_3'(X) - 3\mu_2'(X)E(X) + 2\big[E(X)\big]^2, \\
\mu_4(X) &= \mu_4'(X) - 4\mu_3'(X)E(X) + 6\mu_2'(X)\big[E(X)\big]^2 - 3\big[E(X)\big]^4.
\end{aligned} \tag{10.4.6}$$

Druhý centrální moment

$$\operatorname{var}(X) = \mu_2(X) = E\Big[\big[X - E(X)\big]^2\Big] = \mu_2'(X) - \big[E(X)\big]^2 \tag{10.4.7}$$

se nazývá *rozptyl* (nebo *variance)*. Odmocnina z rozptylu se nazývá *směrodatná odchylka.*

Zatímco střední hodnota představuje číslo, kolem něhož náhodná veličina X kolísá, je rozptyl charakteristikou velikosti tohoto kolísání. Protože platí $[x - E(X)]^2 \geq 0$ a $P(X = x) \geq 0$ nebo $f(x) \geq 0$ pro všechna reálná x,je $\operatorname{var}(X) \geq 0$.

Uvažujme nyní případ

$$h(X) = aX + b,$$

kde a a b jsou reálná čísla. Z (10.4.1) a (10.4.2) a z vlastností součtů a integrálů vyplývá, že

$$E(aX + B) = aE(x) + b. \tag{10.4.8}$$

Speciálně pro $a = 0$ vyplývá, že střední hodnota konstanty b je rovna této konstantě.

Stanovme rozptyl $\operatorname{var}(aX + b)$. Podle definice rozptylu je

$$\operatorname{var}(aX + b) = E\Big[\big[aX + b - aE(X) - b\big]^2\Big] = a^2E\Big[\big[X - E(X)\big]^2\Big],$$

takže

$$\operatorname{var}(aX + b) = a^2\operatorname{var}(X), \tag{10.4.9}$$

tzn. rozptyl $aX + b$ nezávisí na konstantě b. Speciálně, rozptyl konstanty b, $\operatorname{var}(b) = 0$.

10.5 Příklady

10.5.1

Stanovme rozptyly náhodných veličin X uvažovaných v příkl. 9.3.1 a 9.3.2.

Pro diskrétní rovnoměrné rozdělení je

$$\mu_2'(X) = \sum_{x=0}^{M-1} x^2 \frac{1}{M} = \frac{1}{M} \frac{M(M-1)(2M-1)}{6},$$

takže

$$\operatorname{var}(X) = \frac{(M-1)(2M-1)}{6} - \frac{(M-1)^2}{4} = \frac{M^2-1}{12}.$$

Pro degenerované rozdělení je $\mu_r'(X) = \mu^r, r = 1, 2, \ldots$ a centrální momenty

$$\mu_r(X) = E[(X-\mu)^r] = (\mu-\mu)^r P(X=\mu) = 0, r = 1, 2, \ldots.$$

Tudíž i $\operatorname{var}(X) = 0$.

10.5.2

Stanovmě rozptyly náhodných veličin X uvažovaných v příkl. 10.5.1 a 10.5.2.

Pro rovnoměrné rozdělení

$$\mu_2'(X) = \frac{1}{2h} \int_{\mu-h}^{\mu+h} x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{(\mu+h)^3 - (\mu-h)^3}{6h} = \mu^2 + \frac{h^2}{3},$$

takže

$$\operatorname{var}(X) = \mu_2'(X) - \mu^2 = \frac{h^2}{3}.$$

Má-li veličina X Cauchyovo rozdělení, existuje r-tý obecný moment

$$\mu_r'(X) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda x^r}{\lambda^2 + (x-\vartheta)^2} \,\mathrm{d}x$$

jen pro $r = 0$. Tudíž rozptyl $\operatorname{var}(X)$ pro toto rozdělení neexistuje.

10.6 Charakteristická funkce

Jedním z prostředků, jak nalézt momenty náhodné veličiny X, je určit její charakteristickou funkci. Charakteristická funkce je důležitým nástrojem při studiu vlastností rozdělení náhodných veličin vůbec, např. při řešení asymptotických úloh (funkce velkého počtu náhodných veličin) nebo při studiu rozdělení lineárních funkcí.

Charakteristická funkce $\psi_X(t)$ náhodné veličiny X (nebo příslušného rozdělení) je definována výrazem

$$\psi_X(t) = E\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}\right], \tag{10.6.1}$$

kde $\mathrm{i} = (-1)^{\frac{1}{2}}$ a t je reálná proměnná.

Je tedy

$$\psi_X(t) = \sum_{x_j} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx_j} P(X = x_j) \tag{10.6.2}$$

pro náhodnou veličinu s diskrétním rozdělením a

$$\psi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} f(x)\,\mathrm{dx} \tag{10.6.3}$$

pro náhodnou veličinu X se spojitým rozdělením.

Obdobně je *momentová vytvořující funkce* $M_X(t)$ definována výrazem

$$M_X(t) = E\left[\mathrm{e}^{(tX)}\right]. \tag{10.6.4}$$

V bodě $t = 0$ má charakteristická funkce hodnotu 1. Protože platí

$$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}| = |\cos tx + \mathrm{i}\sin tx| = 1,$$

je $|\psi_X(t)| \leq 1$. Charakteristická funkce $\psi_X(t)$ tedy existuje pro každou náhodnou veličinu X a pro všechna reálná t. Pro momentovou vytvořující funkci $M_X(t)$ to obecně neplatí.

Možnost stanovení obecných momentů náhodné veličiny X pomocí charakteristické funkce vyplývá z této věty:

Jestliže existuje prvních n obecných momentů $\mu'_r(X), r = 1, \ldots, n$ náhodné veličiny X, má její charakteristická funkce $\psi_X(t)$ prvních n derivací a platí

$$\frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}t^r}\psi_X(t)\Big|_{t=0} = \mathrm{i}^r \mu'_r(X), \quad r = 1, \ldots, n \tag{10.6.5}$$

Dále platí

$$\psi_X(t) = \sum_{r=0}^{n} \frac{(\mathrm{i}t)^r}{r!}\mu_r(X) + Z_n(t), \tag{10.6.6}$$

kde

$$\lim_{t\longrightarrow 0} \frac{Z_n(t)}{t^n} = 0. \tag{10.6.7}$$

D ů k a z viz [23], str. 266 – 267. Důkaz je založen na záměně pořadí derivování a integrování, takže

$$\frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}t^r} E\big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}\big] = E\left[\frac{\partial^r}{\partial t^r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}\right] = \mathrm{i}^r E\big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}\big].$$

Pro $t = 0$ pak dostáváme vztah (10.6.5).

Uvažujme nyní náhodnou veličinu $Y = aX + b$, kde a a b jsou reálná čísla a X je náhodná veličina. Charakteristická funkce $\psi_Y(t)$ veličiny Y je rovna

$$\psi_Y(t) = E\big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}tY}\big] = E\big[\mathrm{e}^{[\mathrm{i}t(aX+b)]}\big]$$

takže

$$\psi_Y(t) = \mathrm{e}^{(\mathrm{i}tb)}\psi_X(at). \tag{10.6.8}$$

Známe-li rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny X, umíme určit charakteristickou funkci $\psi_X(t)$ této náhodné veličiny. Vzniká otázka, zda je možný obrácený postup, totiž ze znalosti $\psi_X(t)$ stanovit rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny X. Platí tato věta:

Jestliže $\psi_X(t)$ je charakteristická funkce, která odpovídá distribuční funkci $F(x)$ a jsou-li x_1 a x_2, $x_1 < x_2$, body spojitosti distribuční funkce $F(x)$, pak platí

$$F(x_2) - F(x_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\psi_X(t)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx_1} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx_2}}{2it} - \psi_X(-t)\frac{\mathrm{e}^{-itx_1} - \mathrm{e}^{-itx_2}}{2it}\right]\mathrm{d}t. \tag{10.6.9}$$

Odtud vyplývá jednoznačná korespondence mezi charakteristickou funkcí a distribuční funkcí.

D ů k a z viz [23], str. 272.

Mají-li tedy náhodné veličiny stejné rozdělení, mají tutéž charakteristickou funkci. Naopak veličiny se stejnou charakteristickou funkcí mají totéž rozdělení pravděpodobnosti; jeho distribuční funkce se určí pomocí vztahu (10.6.9). Nakonec uvedeme ještě *limitní větu pro charakteristické funkce:*

Mějme posloupnost distribučních funkcí $F_1(x), F_2(x), \ldots$ a jim odpovídající posloupnost charakteristických funkcí $\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots$. Posloupnost $F_1(x)$, $F_2(x), \ldots$ konverguje k určité distribuční funkci $F(x)$ ve všech bodech spojitosti funkce $F(x)$ tehdy a jen tehdy, když posloupnost odpovídajících charakteristických funkcí $\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots$ konverguje pro všechna t k nějaké funkci $\psi(t)$, která je spojitá v bodě $t = 0$. Limitní funkce $\psi(t)$ je pak charakteristická funkce odpovídající distribuční funkci $F(x)$ a posloupnost $\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots$ konverguje k $\psi(t)$ stejnoměrně v každém konečném intervalu.

D ů k a z viz [23], str. 276.

Této limitní věty využijeme v dalších kapitolách při hledání limitních rozdělení pravděpodobnosti.

10.7 Příklady

10.7.1

Náhodná veličina X mající degenerované rozdělení uvažované v příkl. 9.3.2 má charakteristickou funkci

$$\psi_X(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\mu} \tag{10.7.1}$$

10.7.2

Charakteristická funkce náhodné veličiny X mající rovnoměrné rozdělení (9.5.1) (stručněji se též říká: charakteristická funkce rovnoměrného rozdělení) je rovna

$$\psi_X(t) = \frac{1}{2h}\int_{\mu-h}^{\mu+h} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\mathrm{d}x = \frac{1}{2hit}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(\mu+h)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t(\mu-h)}\right].$$

10.8 Kvantily

Další důležitou charakteristikou náhodné veličiny X jsou kvantily.

$100P\%$ *kvantilem* (nebo též P-*kvantilem*) náhodné veličiny X (nebo příslušného rozdělení) nazveme číslo x_P takové, že pro dané $P, 0 < P < 1$, platí

$$F(x_P) \leq P, \quad F(x_P + 0) \geq P. \tag{10.8.1}$$

Těmito podmínkami není obecně $100P\%$ kvantil jednoznačně určen, neboť může existovat ohraničený interval hodnot x_P splňujících podmínky (10.8.1).

Má-li veličina X spojité rozdělení, platí pro x_P vztah

$$F(x_P) = P. \tag{10.8.2}$$

Pro distribuční funkce spojité a rostoucí ve všech $x \in \mathbb{R}$ jsou všechny kvantily jednoznačně určeny.

Některé kvantily mají speciální názvy:

$x_{0,5}$	*medián*,
$x_{0,25}$	*dolní kvartil*,
$x_{0,75}$	*horní kvartil*,
$x_{k/10}, \quad k = 1, \ldots, 9,$	k-*tý decil*,
$x_{k/100}, \quad k = 1, \ldots, 99$	k-*tý percentil*.

Rozdíl $x_{0,75} - x_{0,25}$ se nazývá *mezikvartilové rozpětí* (nebo *mezikvartilová odchylka)*.

10.9 Příklady

10.9.1

Nechť náhodná veličina má pravděpodobnostní funkci

$$\begin{aligned} P(X = x) &= \frac{1}{6}, \quad && x = 1, 2, \ldots, 6, \\ &= 0, && \text{jinak.} \end{aligned}$$

Střední hodnota této veličiny

$$E(X) = \frac{1}{6}\sum_{x=1}^{6} x = 3,5.$$

Podle definice (10.8.1) je medián $x_{0,5}$ každé číslo z intervalu $\langle 3; 4)$, neboť pro tato x je $P(X \leq x) = 0,5$ a $P(X \leq x + 0) \geq 0,5$.

10.9.2

Jak jsme ukázali v příkl. 10.3.2, neexistuje střední hodnota Cauchyova rozdělení (**??**). Kvantily tohoto rozdělení však existují; x_P se určí ze vztahu

$$\frac{1}{2} + \mathrm{arctg}\frac{x_P - \theta}{\lambda} = P,$$

takže

$$x_P = \theta + \lambda \mathrm{tg}\big[\pi(P - \frac{1}{2})\big], \quad 0 < P < 1.$$

Speciálně medián $x_{0,5} = \theta$.

10.10 Charakteristiky polohy a variability

Základními charakteristikami popisujícími rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny X jsou charakteristiky polohy a charakteristiky variability.

Má-li náhodná veličina X_1 distribuční funkci $F(x)$, pak náhodná veličina $X_2 = X_1 + b$ má distribuční funkci $P(X_2 \leq x) = P(X_1 \leq x - b) = F(x - b)$, tj. graf distribuční funkce $P(X_2 \leq x)$ náhodné veličiny X_2 získáme posunutím grafu distribuční funkce $P(X_1) \leq x$ náhodné veličiny X_1 o hodnotu b (viz obr. 3).

Říkáme, že *rozdělení* těchto dvou náhodných veličin *se od sebe liší jen polohou.* Ve shodě s tím nazýváme *charakteristikou polohy* takovou charakteristiku ξ, pro niž platí

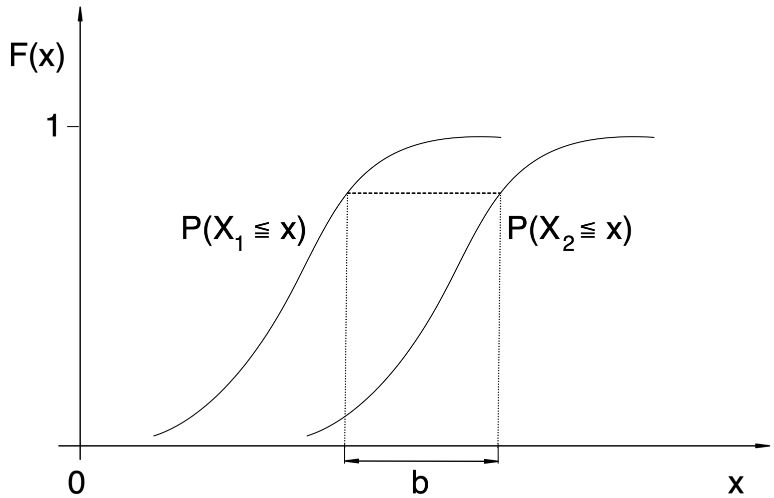
$$\xi(X + b) = \xi(X) + b. \tag{10.10.1}$$

Tuto vlastnost má např. střední hodnota $E(X)$ nebo kvantil $x_P, 0 < P < 1$.

Další charakteristikou polohy je *modus* $\widehat{x}$.

Má-li veličina X diskrétní rozdělení, je $\widehat{x}$ bod, pro který platí

$$P(X = \widehat{x}) \geq P(X = x_j), \quad j = 1, 2, \ldots. \tag{10.10.2}$$



Obr. 3: Distribuční funkce dvou rozdělení lišících se polohou

Má-li veličina X spojité rozdělení s hustotou pravděpodobnosti $f(x)$, je $\widehat{x}$ bod, pro který platí

$$f(\widehat{x}) \geq f(x), -\infty < x < \infty. \tag{10.10.3}$$

Je vidět, že modus, obdobně jako kvantil, není jednoznačně určen.

Charakteristikou variability nazýváme takovou charakteristiku η, pro niž platí

$$\eta(aX + b) = a^2\eta(X) \tag{10.10.4}$$

nebo

$$\eta(aX + b) = |a|\eta(X) \tag{10.10.5}$$

Je vidět, že změnou polohy zůstává charakteristika variability nezměněna, neboť $\eta(X + b) = \eta(X)$.

Nejužívanější charakteristiky variability jsou rozptyl $\mathrm{var}(X)$ a směrodatná odchylka $\left[\mathrm{var}(X)\right]^{\frac{1}{2}}$.

Charakteristikou variability je též *mezikvartilové rozpětí* $x_{0,75} - x_{0,25}$ nebo *mezidecilové rozpětí* $x_{0,9} - x_{0,1}$ či *mezipercentilové rozpětí* $x_{0,99} - x_{0,01}$.

Někdy se též jako charakteristika variability používá

$$E(|X - \mu|), \tag{10.10.6}$$

kde za μ se volí buď střední hodnota $E(X)$, nebo medián $x_{0,5}$. Charakteristika (10.10.6) se nazývá *střední odchylka* (též *průměrná* nebo *absolutní odchylka).*

10.11 Charakteristiky šikmosti a špičatosti

Další důležitá třída charakteristik se týká symetrie či asymetrie rozdělení náhodné veličiny X. Od *charakteristiky šikmosti* τX se požaduje, aby:

- pro symetrické rozdělení bylo $\tau(X) = 0$;
- pro rozdělení protáhlejší směren napravo než směrem nalevo (viz obr. 2) bylo $\tau(X) > 0$ a naopak pro rozdělení protáhlejší směrem nalevo než napravo (viz obr. 4) bylo $\tau(X) < 0$;
- platilo

$$\tau(aX + b) = \tau(X), a \neq 0. \tag{10.11.1}$$

Obr. 4: Rozdělení s $\tau(X) < 0$

Nejčastěji používanou charakteristikou šikmosti je *koeficient šikmosti*

$$\alpha_3(X) = \frac{\mu_3(X)}{\left[\mathrm{var}(X)\right]^{\frac{3}{2}}} \tag{10.11.2}$$

Jelikož $\mu_3(aX+b) = E\Big[\big[aX+b-aE(X)-b\big]^3\Big] = a^3\mu_3(X)$ a $\mathrm{var}(aX+b) = a^2\mathrm{var}X$, platí (10.11.1).

Jinou charakteristikou šikmosti je charakteristika

$$\frac{(x_{0,75}-x_{0,5})-(x_{0,5}-x_{0,25})}{(x_{0,75}-x_{0,5})+(x_{0,5}-x_{0,25})} = \frac{x_{0,75}+x_{0,25}-2x_{0,5}}{x_{0,75}-x_{0,25}} \tag{10.11.3}$$

založená na mediánu a kvartilech.

Jako *charakteristiky špičatosti* (či *plochosti*) se používá charakteristiky

$$\alpha_4(X) = \frac{\mu_4(X)}{\big[var(X)\big]^2} - 3, \tag{10.11.4}$$

která se nazývá *koeficient špičatosti.*

Pro normální rozdělení (viz článek 18) je $\alpha_4(X)$ rovno nule.

Má-li veličina X symetrické rozdělení a je-li $\alpha_4(X) > 0$ $[\alpha_4(X) < 0]$, znamená to, že na svých koncích je pravděpodobností funkce $P(X = x)$ nebo hustota pravděpodobnosti $f(x)$ této veličiny X větší [menší] než hustota pravděpodobnosti normálního rozdělení se stejnou střední hodnotou a stejným rozptylem.

Protože $\mu_4(aX+b) = E\{[aX+b-aE(X)-b]^4\} = a^4\mu_4(X)$, platí

$$\alpha_4(aX+b) = \alpha_4(X), a \neq 0. \tag{10.11.5}$$

Charakteristiky $\alpha_4(X)$ se používá i pro nesymetrická rozdělení.

10.12 Příklady

10.12.1

Uvažujme rovnoměrné rozdělení (9.5.1). Protože $E(X) = \mu$, platí pro r-tý centrální moment.

$$\mu_r(X) = \frac{1}{2h}\int_{\mu-h}^{\mu+h} (x-\mu)^r \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2h}\int_{h}^{-h} y^r \,\mathrm{dy},$$

tj.

$$\begin{aligned} \mu_r(x) &= 0, & r = 1, 3, \ldots, \\ &= \frac{h^r}{r+1}, & r = 2, 4, \ldots. \end{aligned}$$

Tudíž $\alpha_3(X) = 0$ a $\alpha_4(X) = -\frac{6}{5}$.

Z příkladu 9.5.1 a ze vztahu (10.8.2) vyplývá, že $100P\%$ kvantil

$$x_P = \mu + h(2P - 1), 0 < P < 1.$$

Charakteristika (10.11.3) nabývá hodnoty

$$\frac{(\mu + 0,5h) + (\mu - 0,5h) - 2\mu}{(\mu + 0,5h) - (\mu - 0,5h)} = 0,$$

což je v souladu s tím, že rovnoměrné rozdělení je symetrické.

10.12.2

Je-li rozdělení náhodné veličiny X symetrické, je $\mu_3(X)$ a tudíž i $\alpha_3(X)$ je rovno nule. Na druhé straně, je-li $\alpha_3(X) = 0$, nemusí být rozdělení symetrické. Např. nabývá-li veličina X hodnot $-2, 1$ a 3 s pravděpodobnostmi $P(X = -2) = \frac{2}{5}$, $P(X = 1) = \frac{1}{2}$ a $P(X = 3) = \frac{1}{10}$, je

$$E(X) = -\frac{4}{5} + \frac{1}{2} + \frac{3}{10} = 0$$

a

$$\mu_3(X) = -\frac{16}{5} + \frac{1}{2} + \frac{27}{10} = 0,$$

takže $\alpha_3(X) = 0$, ačkoliv rozdělení je asymetrické.

10.13 Symetrické rozdělení

V předchozím odstavci jsme několikrát hovořili o symetrickém rozdělení. Rozvedeme nyní poněkud tento pojem.

Řekneme, že náhodná veličina X má *spojité rozdělení symetrické podle bodu* μ, jestliže pro její hustotu pravděpodobnosti $f(x)$ platí

$$f(\mu - x) = f(\mu + x), \quad -\infty < x < \infty, \tag{10.13.1}$$

neboli

$$f(x) = f(2\mu - x), \quad -\infty < x < \infty \tag{10.13.2}$$

Pro distribuční funkci $F(x)$ pak platí

$$F(x) = 1 - \int_x^\infty f(v)\,\mathrm{d}v = 1 - \int_x^\infty f(2\mu - v)\,\mathrm{d}v = 1 - \int_{-\infty}^{2\mu - x} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

takže

$$F(x) = 1 - F(2\mu - x), \quad -\infty < x < \infty. \tag{10.13.3}$$

Pro kvantil x_P platí

$$P = F(x_P) = 1 - F(2\mu - x_P), \quad 0 < P < 1,$$

a ze vztahu $F(2\mu - x_P) = 1 - P$ vyplývá, že $2\mu - x_P = x_{1-P}$, takže

$$x_{1-P} = 2\mu - x_P, \quad 0 < P < 1. \tag{10.13.4}$$

Odtud pro $P = 0,5$ vyplývá, že medián $x_{0,5} = \mu$.

Pro střední hodnotu $E(X)$ platí

$$\begin{aligned} E(X) = \int_{-\infty}^\infty x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^\infty x f(2\mu - x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^\infty (2\mu - y) f(y)\,\mathrm{d}y = \\ = 2\mu - E(X), \end{aligned}$$

takže

$$E(X) = \mu. \tag{10.13.5}$$

Pro r-tý centrální moment je

$$\mu_r(X) = \int_{-\infty}^\mu (x-\mu)^r f(x)\,\mathrm{d}x + \int_\mu^\infty (x-\mu)^r f(x)\,\mathrm{d}x, r = 1, 2, \ldots.$$

Avšak

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\mu (x-\mu)^r f(x)\,\mathrm{d}x &= (-1)^r \int_{-\infty}^\mu [(2\mu - x) - \mu]^r f(2\mu - x)\,\mathrm{d}x = \\ &= (-1)^r \int_\mu^\infty (y-\mu)^r f(y)\,\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

takže

$$\begin{aligned} \mu_r(X) &= 0, \quad r = 1, 3, \ldots, \\ &= 2\int_\mu^\infty (x-\mu)^r f(x)\,\mathrm{d}x, \quad r = 2, 4, \ldots. \end{aligned} \tag{10.13.6}$$

Obdobně řekneme, že náhodná veličina X má *diskrétní rozdělení symetrické podle bodu* μ, jestliže pro její pravděpodobností funkci $P(X = x)$ platí

$$P(X = x) = P(X = 2\mu - x), -\infty < x < \infty. \tag{10.13.7}$$

Takováto náhodná veličina X má střední hodnotu $E(X) = \mu$ a všechny liché centrální momenty rovny nule.

10.14 Úlohy

10.14.1

Stanovte střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X, která má hustotu pravděpodobnosti

$$\begin{aligned} f(x) &= \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, \quad x > 0, \lambda > 0, \\ &= 0, \qquad\qquad \text{jinak.} \end{aligned}$$

$\left[E(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathrm{var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.\right]$

10.14.2

Stanovte kvantil x_P náhodné veličiny X, která má hustotu pravděpodobnosti

$$\begin{aligned} f(x) &= 2(1 - x), \quad 0 < X < 1, \\ &= 0, \qquad\qquad \text{jinak.} \end{aligned}$$

$\left[x_P = 1 - \sqrt{1 - P}, 0 < P < 1.\right]$

10.14.3

Stanovte hodnotu charakteristiky (10.11.3) pro Cauchyovo rozdělení (9.5.3).

[0.]

10.14.4

Určete, zda náhodná veličina X, jíž přísluší pravděpodobnostní funkce

$$P(X = x) = \frac{1}{6}$$

pro:
a) $x = -2, -1, 0, 1, 2, 3,$
b) $x = -2, -1, 0, 1, 3, 4,$
má symetrické rozdělení. [a) Má; b) nemá.]

10.14.5

Nechť náhodná veličina X má spojité rozdělení symetrické podle bodu μ. Nechť $F(x)$ je distribuční funkce této veličiny. Ukažte, že platí

$$P(|X - \mu| \neq x) = 2F(x + \mu) - 1, x > 0.$$

Kapitola 11

Náhodný vektor

11.1

Dosud jsme uvažovali případy, kdy výsledek náhodného pokusu je vyjádřen reálným číslem (nebo kdy výsledku kvalitativního charakteru přiřadíme reálné číslo). Často je však výsledkem pokusu n-tice reálných čísel; např. u vzorku oceli měříme obsah n chemických prvků nebo zjišťujeme obsah uhlíku a pevnost tohoto vzorku atd. Jindy zase měříme n rozměrů výrobku nebo zjišťujeme současně teplotu a tlak apod.

Je tedy zapotřebí zabývat se též situacemi, kdy uvažujeme n náhodných veličin $X_1, \ldots, X_n$. n-tici náhodných veličin označíme $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ a nazveme ji *náhodný vektor* nebo též *n-rozměrná náhodná veličina.*

Je-li dán vztah mezi podmnožinami n-rozměrného euklidovského prostoru $\mathbb{R}^n$ a jejich pravděpodobnostmi, říkáme, že je dáno *sdružené rozdělení pravděpodobnosti* veličin $X_1, \ldots, X_n$.

11.2 Distribuční funkce

Distribuční funkcí náhodného vektoru $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ nazveme reálnou funkci $F(x_1, \ldots, x_n$ definovanou pro každou n-tici reálných čísel $x_1, \ldots, x_n$ vztahem

$$F(x_1, \ldots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n). \tag{11.2.1}$$

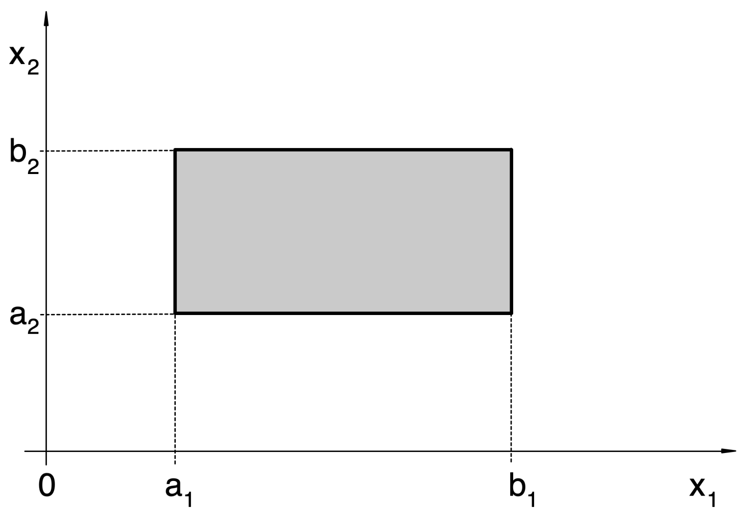
Přitom pravděpodobnost na pravé straně (11.2.1) značí pravděpodobnost průniku náhodných jevů $X_j \leq x_j,\ j = 1, \ldots, n$ takže $F(x_1, \ldots, x_n)$ vyjadřuje pravděpodobnost, že veličina X_1 nabude hodnoty menší nebo rovné x_1 a současně X_2 nabude hodnoty menší nebo rovné $x_2, \ldots$ a současně X_n nabude hodnoty menší nebo rovné x_n. Místo o distribuční funkci náhodného vektoru $\mathbf{X}$ se též hovoří o *sdružené distribuční funkci náhodných veličin* $X_1, \ldots, X_n$. Distribuční funkce náhodného vektoru $\mathbf{X}$ má obdobné vlastnosti jako distribuční funkce náhodné veličiny X:

(a) $0 \leq F(x_1, \ldots, x_n) \leq 1$ pro každou n-tici reálných čísel $x_1, \ldots, x_n$.

(b) $F(x_1, \ldots, x_n$ je neklesající funkce každé své proměnné.

(c) $\lim_{x_j \longrightarrow -\infty} F(x_1, \ldots, x_n) = F(x_1, \ldots, x_{j-1}, -\infty, x_{j+1}, \ldots, x_n = 0$ pro každé $j = 1, \ldots, n$ a $\lim_{x_j \longrightarrow \infty} F(x_1, \ldots, x_n) = F(\infty, \ldots, \infty) = 1$.

(d) $F(x_1, \ldots, x_n)$ je zprava spojitá v každé své proměnné.



Obr. 5: Oblast pro výpočet pravděpodobnosti $P(a_1 < X_1 \leq b_1, a_2 < X_2 \leq b_2)$

Uvažujme nyní dvourozměrnou náhodnou veličinu $\mathbf{X} = (X_1, X_2)'$ a stanovme pravděpodobnost

$$P(a_1 < X_1 \leq b_1, a_2 < X_2 \leq b_2), \quad -\infty < a_1 < b_1 < \infty, \quad -\infty < a_2 < b_2 < \infty,$$

tj. – v geometrické interpretaci – pravděpodobnost, že náhodný bod (X_1, X_2) je v obdélníku vymezeném nerovnostmi $a_1 < x_1 \leq b_1, \quad a_2 < x_2 \leq b_2$ (viz obr. 5).

Tato pravděpodobnost je rovna

$$P(X_1 \le b_1, X_2 \le b_2) - P(X_1 \le b_1, X_2 \le a_2) - \\ - P(X_1 \le a_1, X_2 \le b_2) + P(X_1 \le a_1, X_2 \le a_2),$$

takže

$$P(a_1 < X_1 \le b_1, a_2 < X_2 \le b_2) = F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2). \tag{11.2.2}$$

11.3 Rozdělení diskrétního a spojitého typu

Náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ má *rozdělení diskrétního typu*, existuje-li konečná nebo spočetná množina n-tic reálných čísel $x_1, \dots, x_n$ taková, že pro každý prvek této množiny je pravděpodobnost $P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) > 0$ a součet pravděpodobností pro všechny prvky této množiny je roven jedné,

$$\sum_{x_1} \dots \sum_{x_n} P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = 1. \tag{11.3.1}$$

Funkce $P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$ se nazývá *pravděpodobnostní funkce náhodného vektoru* $\mathbf{X}$ nebo *sdružená pravděpodobnostní funkce náhodných veličin* $X_1, \dots, X_n$.

Distribuční funkce je

$$F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{t_1 \le x_1} \dots \sum_{t_n \le x_n} P(X_1 = t_1, \dots, X_n = t_n). \tag{11.3.2}$$

Náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ má *rozdělení spojitého typu,* existuje-li nezáporná reálná funkce $f(x_1, \dots, x_n)$ taková, že pro všechna reálná $x_1, \dots,$ x_n platí

$$F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, \dots, t_n)\, \mathrm{d}t_1 \dots \mathrm{d}t_n. \tag{11.3.3}$$

Funkce $f(x_1, \dots, x_n)$ se nazývá *hustota pravděpodobnosti* (stručněji *hustota)* *náhodného vektoru* $\mathbf{X}$ nebo *sdružená hustota pravděpodobnosti náhodných veličin* $X_1, \dots, X_n$.

V bodech, kde existuje derivace, platí

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, \dots, x_n}{\partial x_1 \dots \partial x_n}. \tag{11.3.4}$$

Dále platí

$$P(a_1 < X_1 \leq b_1, \dots, a_n < X_n \leq b_n) = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) \, \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n \tag{11.3.5}$$

pro každé $-\infty < a_j < b_j < \infty, j = 1, \dots, n$ a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) \, \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n = 1. \tag{11.3.6}$$

Obdobně jako v (9.4.3) nezáleží na tom, zda v (11.3.5) uvažujeme nerovnost $<$ nebo $\leq$.

11.4 Příklady

11.4.1

Má-li $\mathbf{X} = (X_1, X_2)'$ rozdělení diskrétního typu, lze hodnoty, jichž nabývá, a sdružené pravděpodobnosti $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$ pro tyto hodnoty zapsat do dvourozměrné tabulky. Ukažme to na příkladě, kdy uvažujeme šest dvojic hodnot $(0; 0), (0; 1), (0; 2), (1; 0), (1; 1), (1; 2)$. V následující tabulce jsou uvedeny hodnoty pravděpodobnosti $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$ a jejich řádkové a sloupcové součty.

	$x_2 =$			
	0	1	2	$P(X_1 = x_1)$
$x_1 = 0$	0,42	0,12	0,06	0,6
1	0,28	0,08	0,04	0,04
$P(X_2 = x_2)$	0,7	0,2	0,1	1

Odtud snadno určíme hodnoty distribuční funkce $F(x_1, x_2)$ pro dané (x_1, x_2). Např.

$$F(1, 1) = P(X_1 \leq 1,\ X_2 \leq 1) = 0,42 + 0,12 + 0,28 + 0,08 = 0,9.$$

11.4.2

Nechť náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2) ='$ má hustotu pravděpodobnosti

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= e^{-x_1-x_2}, \quad x_1 > 0, x_2 > 0, \\ &= 0, \quad \text{jinak.} \end{aligned} \tag{11.4.1}$$

Distribuční funkce

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) &= \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} e^{-y_1-y_2} \, \mathrm{d}y_1 \, \mathrm{d}y_2 = (1 - e^{-x_1})(1 - e^{-x_2}), x_1 > 0, x_2 > 0, \\ &= 0, \quad \text{jinak.} \end{aligned}$$

Stanovme nyní pravděpodobnost $P(X_1 > x_1, X_2 > x_2)$ pro $x_1 > 0, x_2 > 0$. Z (11.2.2) vyplývá, že

$$\begin{aligned} &P(x_1 < X_1 < \infty, x_2 < X_2 < \infty) = \\ &\quad = F(\infty, \infty) - F(\infty, x_2) - F(x_1, \infty) + F(x_1, x_2) = \\ &\quad = 1 - (1 - \mathrm{e}^{-x_2}) - (1 - \mathrm{e}^{-x_1}) + (1 - \mathrm{e}^{-x_1})(1 - \mathrm{e}^{-x_2}) = \\ &\quad = \mathrm{e}^{-x_1-x_2}, \quad x_1 > 0, x_2 > 0. \end{aligned}$$

11.4.3

Nechť náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2) ='$ má hustotu pravděpodobnosti

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= x_1 + x_2, \quad 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1, \\ &= 0, \quad \text{jinak.} \end{aligned}$$

Distribuční funkce

$$\begin{aligned} F(x_1, \ x_2) &= 0, \quad x_1 \le 0 \quad \text{nebo} \quad x_2 \le 0 \\ &= \int_0^{x_1} \left[\int_0^{x_2} (t_1 + t_2) \mathrm{d}t_2 \right] \mathrm{d}t_1 = \frac{x_1 x_2 (x_1 + x_2)}{2}, \ 0 < x_1 < 1, \ 0 < x_2 < 1, \\ &= \int_0^{1} \left[\int_0^{x_1} (t_1 + t_2) \mathrm{d}t_1 \right] \mathrm{d}t_2 = \frac{x_1 (x_1 + 1)}{2}, \quad 0 < x_1 < 1, \quad x_2 \ge 1, \\ &= \int_0^{1} \left[\int_0^{x_2} (t_1 + t_2) \mathrm{d}t_2 \right] \mathrm{d}t_1 = \frac{x_2 (x_2 + 1)}{2}, \quad x_1 \ge 1, \ 0 < x_2 < 1, \\ &= 1, \quad x_1 \ge 1, \quad x_2 \ge 1. \end{aligned}$$

11.5 Marginální rozdělení

Uvažujme dvourozměrnou náhodnou veličinu $\mathbf{X} = (X_1, X_2) ='$. Kromě sdruženého rozdělení veličin X_1 a X_2 nás zajímají rozdělení jednotlivých náhodných veličin X_1 a X_2. Tato rozdělení se nazývají marginální.

Je-li $F(x_1, x_2)$ sdružená distribuční funkce veličin X_1, X_2, je *marginální distribuční funkce* $F_1(x_1)$ veličiny X_1 dána výrazem

$$\begin{aligned} F_1(x_1) &= P(X_1 \le x_1) = \lim_{x_2 \to \infty} P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2) = \\ &= \lim_{x_2 \to \infty} F(x_1, x_2) = F(x_1, \infty), \quad -\infty < x_1 < \infty. \end{aligned} \tag{11.5.1}$$

Obdobně pro marginální distribuční funkci $F_2(x_2)$ veličiny X_2 platí

$$F_2(x_2) = F(\infty, x_2), \quad -\infty < x_2 < \infty. \tag{11.5.2}$$

Má-li $\mathbf{X} = (X_1, X_2)'$ rozdělení diskrétního typu a je-li $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$ sdružená pravděpodobnostní funkce veličin X_1, X_2, jsou marginální pravděpodobnostní funkce veličiny X_1, přip. veličiny X_2, dány výrazy

$$P(X_1 = x_1) = \sum_{x_2} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2), \tag{11.5.3}$$

příp.

$$P(X_2 = x_2) = \sum_{x_1} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2). \tag{11.5.4}$$

Je-li $f(x_1, x_2)$ hustota pravděpodobnosti náhodného vektoru $\mathbf{X} = (X_1, X_2)'$, platí pro marginální hustoty veličiny X_1, příp. veličiny X_2,

$$f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_2, \quad -\infty < x_1 < \infty, \tag{11.5.5}$$

příp.

$$f_2(x_2) \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1, -\infty < x_2 < \infty. \tag{11.5.6}$$

V případě náhodného vektoru $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ o $n \ge 3$ složkách nás zajímají marginální rozdělení veličin $X_{j_1}, \ldots, X_{j_k}, 1 \le k < n$, kde $J = \{j_1, \ldots, j_k\}$ je podmnožina množiny $\{1, \ldots, n\}$. Např. pro $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4)'$ nás mohou zajímat marginální rozdělení veličin $X_j, j = 1, \ldots, 4$ nebo sdružené marginální rozdělení veličin X_1, X_4 nebo veličin X_2, X_3, X_4 apod.

Je-li $F(x_1, \ldots, x_n)$ sdružená distribuční funkce veličin $X_1, \ldots, X_n$, dostaneme sdruženou marginální distribuční funkci $F_{j_1,\ldots,j_k}(x_{j_1}, \ldots, x_{j_k})$ veličin $X_{j_1}, \ldots, X_{j_n}$ tak, že všechna x_j pro $j \notin J$ nahradíme ∞. Např.

$$F_1(x_1) = F(x_1, \infty, \ldots, \infty)$$

nebo

$$F_{1,n}(x_1, x_n) = F(x_1, \infty, \ldots, \infty, x_n).$$

Marginální sdruženou hustotu pravděpodobnosti $f_{j_1,\ldots,j_k}(x_{j_1}, \ldots, x_{j_k})$ veličin $X_{j_1}, \ldots, X_{j_k}$ dostaneme tak, že $f(x_1, \ldots, x_n)$ integrujeme přes proměnné x_j pro všechna $j \notin J$. Např.

$$f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n$$

nebo

$$f_{1,n}(x_1, x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_{n-1}.$$

Obdobně *sdruženou marginální pravděpodobnostní funkci*

$$P(X_{j_1} + x_{j_1}, \ldots, X_{j_k} = x_{j_k}$$

dostaneme tak, že $P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$ sečteme přes proměnné x_j pro všechna $j \notin J$. Např.

$$P(X_1 = x_1) = \sum_{x_2} \ldots \sum_{x_n} P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$$

nebo

$$P(X_1 = x_1, X_n = x_n) = \sum_{x_2} \ldots \sum_{x_{n-1}} P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n).$$

11.6 Příklady

11.6.1

Pro rozdělení uvažované v příkl. 11.4.1 jsou hodnoty marginální pravděpodobnostní funkce $P(X_1 = x_1)$, příp. $P(X_2 = x_2)$ uvedeny v součtovém sloupci, příp. řádku.

11.6.2

Nechť náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2)'$ má hustotu pravděpodobnosti (11.4.1). Pak marginální distribuční funkce $F_1(x_1)$ a $F_2(x_2)$ veličin X_1 a X_2 jsou dány výrazy

$$\begin{aligned} F_1(x_1) = F(x_1, \infty) &= 1 - \mathrm{e}^{-x_1}, \quad && x_1 > 0, \\ &= 0, && x_1 \leq 0, \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} F_2(x_2) = F(\infty, x_2) &= 1 - \mathrm{e}^{-x_2}, \quad && x_2 > 0, \\ &= 0, && x_2 \leq 0. \end{aligned}$$

Pro marginální hustoty platí

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &= \int_0^\infty f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_2 = \frac{\mathrm{d}F_1(x_1)}{\mathrm{d}x_1} = \mathrm{e}^{-x_1}, \quad && x_1 > 0, \\ &= 0, && x_1 \leq 0 \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} f_2(x_2) &= \int_0^\infty f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1 = \frac{\mathrm{d}F_2(x_2)}{\mathrm{d}x_2} = \mathrm{e}^{-x_2}, \quad && x_2 > 0, \\ &= 0, && x_2 \leq 0. \end{aligned}$$

11.6.3

Nechť náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2)'$ má hustotu pravděpodobnosti (**??**). Pak marginální hustoty

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &= \int_0^1 (x_1 + x_2)\,\mathrm{d}x_2 = x_1 + \frac{1}{2}, \quad && 0 < x_1 < 1, \\ &= 0, && \text{jinak}, \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} f_2(x_2) &= \int_0^1 (x_1 + x_2)\,\mathrm{d}x_1 = x_1 + \frac{1}{2}, \quad && 0 < x_2 < 1, \\ &= 0, && \text{jinak}. \end{aligned}$$

11.7 Charakteristiky

Obdobně jako v případě náhodné veličiny X nás zajímají číselné charakteristiky, které shrnují informaci o pravděpodobnostním chování náhodného vektoru $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$.

Uvažujme funkci $h(X_1, \ldots, X_n)$ náhodných veličin $X_1, \ldots, X_n$. Definujme *střední hodnotu této funkce* (pokud střední hodnota existuje) výrazem

$$E\big[h(X_1, \ldots, X_n)\big] = \sum_{x_1} \ldots \sum_{x_n} h(x_1, \ldots, x_n) P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) \tag{11.7.1}$$

pro náhodný vektor $\mathbf{X}$ s diskrétním rozdělením a

$$E\big[h(X_1, \ldots, X_n)\big] = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} h(x_1, \ldots, x_n) f(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n \tag{11.7.2}$$

pro náhodný vektor $\mathbf{X}$ se spojitým rozdělením.

Položíme-li $h(X_1, \ldots, X_n) = X_j^r$, dostáváme v případě diskrétního rozdělení

$$\begin{aligned} E(X_j^r) &= \sum_{x_1} \ldots \sum_{x_{j-1}} \sum_{x_j} \sum_{x_{j+1}} \ldots \sum_{x_n} x_j^r P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \\ &= \sum_{x_j} x_j^r \Big[\sum_{x_1} \ldots \sum_{x_{j-1}} \sum_{x_{j+1}} \ldots \sum_{x_n} P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) \Big] = \\ &= \sum_{x_j} x_j^r P(X_j = x_j), \end{aligned}$$

kde $P(X_j = x_j)$ je marginální pravděpodobnostní funkce veličiny X_j. Výsledný výraz je vzhledem k (10.4.3) r-tý obecný moment veličiny X_j. Podobně to platí v případě spojitého rozdělení vektoru $\mathbf{X}$.

Pomocí (11.7.1) nebo (11.7.2) můžeme tedy určit obecné a centrální momenty, případně jiné charakteristiky (např. směrodatné odchylky, koeficienty šikmosti a špičatosti) marginálních rozdělení veličin $X_j, j = 1, \ldots, n$. Nejužívanější charakteristiky náhodných veličin $X_1, \ldots, X_n$ jsou jejich střední hodnoty $E(X_1), \ldots, E(X_n)$ a rozptyly $\mathrm{var}(X_1), \ldots, \mathrm{var}(X_n)$.

Vektor $\big(E(X_1), \ldots, E(X_n)\big)'$ středních hodnot veličin $X_1, \ldots, X_n$ se nazývá *střední hodnota náhodného vektoru* $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$.

Kromě charakteristik jednotlivých náhodných veličin $X_j, j = 1, \ldots, n$ nás zajímají charakteristiky dvourozměrných náhodných veličin $(X_j, X_l)', 1 \leq j < l \leq n$.

Z nich pak především charakteristika zvaná *kovariance náhodných veličin* X_j a X_l, definovaná výrazem

$$\mathrm{cov}(X_j, X_l) = E\big[[X_j - E(X_j)][X_l - E(X_l)]\big], \quad j, l = 1, \ldots, n. \tag{11.7.3}$$

Označíme-li

$$\sigma_{jl} = \mathrm{cov}(X_j, X_l), \quad j, l = 1, \ldots, n, \tag{11.7.4}$$

můžeme sestavit matici

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}, & \sigma_{12}, & \ldots, & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21}, & \sigma_{22}, & \ldots, & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1}, & \sigma_{n2}, & \ldots, & \sigma_{nn} \end{pmatrix} \tag{11.7.5}$$

která se nazývá *kovarianční matice* (někdy též *varianční matice) náhodného vektoru* $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$.

Matice $\mathbf{\Sigma}$ je typu (n, n) a je symetrická, neboť vzhledem k definici eqrefeq:11.7.3 platí $\mathrm{cov}(X_j, X_l) = \mathrm{cov}(X_l, X_j), \quad j, l = 1, \ldots, n$. Pro $l = j$ je

$$\mathrm{cov}(X_j, X_j) = E\Big[\big[X_j - E(X_j)\big]^2\Big] = \mathrm{var}(X_j), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{11.7.6}$$

takže diagonální prvky matice $\sum$ jsou rozptyly veličin $X_1, \ldots, X_n$.

Z (11.7.3), z vlastností součtů a integrálů a z (10.4.8) vyplývá, že

$$\begin{aligned} \mathrm{cov}(X_j, X_l) &= E\big[X_j X_l - X_j E(X_l) - X_l E(X_j) + E(X_j)E(X_l)\big] = \\ &= E(X_j X_l) - E(X_l)E(X_j) - E(X_j)E(X_l) + E(X_j)E(X_l), \end{aligned}$$

takže $\mathrm{cov}(X_j, X_l)$ se dá též vyjádřit ve tvaru

$$\mathrm{cov}(X_j, X_l) = E(X_j X_l) - E(X_j)E(X_l), j, \quad l = 1, \ldots, n; \tag{11.7.7}$$

pro $j = l$ dostáváme již známý vztah (10.4.7).

Pro $var(X_j) > 0, var(X_l) > 0$ se charakteristika

$$\rho(X_j, X_l) = \frac{\mathrm{cov}(X_j, X_l)}{\big[\mathrm{var}(X_j)\mathrm{var}(X_l)\big]^{\frac{1}{2}}}, \quad j, l = 1, \ldots, n, \tag{11.7.8}$$

nazývá *koeficient korelace náhodných veličin* X_j a X_l. Této charakteristiky se používá jako míry lineární závislosti veličin X_j a X_l. Je-li

$$X_l = aX_j + b,$$

kde a a b jsou reálná čísla, $a \neq 0$, je

$$\operatorname{cov}(X_j, X_l) = E\Big[\big[X_j - E(X_j)\big]\big[aX_j + b - E(aX_j + b)\big]\Big] = a\operatorname{var}(X_j),$$

takže

$$\rho(X_j, X_l) = \frac{a\operatorname{var}(X_j)}{\big[a^2\operatorname{var}(X_j)\big]^{\frac{1}{2}}} = \begin{cases} \ \ 1, & \text{je- li} \ \ a > 0, \\ -1, & \text{je- li} \ \ a < 0. \end{cases}$$

Koeficient korelace nabývá hodnot $-1 \leq \rho(X_j, X_l) \leq 1$ (viz příkl. 11.9.4). Je-li $cov(X_j, X_l) = 0$ [takže $\rho(X_j, X_l) = 0$], říkáme, že *náhodné veličiny* X_j a X_l jsou *nekorelované.*

Sestavíme-li koeficienty korelace $\rho(X_j, X_l), j, l = 1, \ldots, n$, do matice, dostáváme symetrickou matici typu (n, n) s diagonálními prvky rovnými 1, neboť $\rho(X_j, X_l) = \rho(X_l, X_j),\ j, l = 1, \ldots, n$ a $\rho(X_j, X_j) = 1,\ j = 1, \ldots, n$. Tato matice se nazývá *korelační matice náhodného vektoru* $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$. Platí-li $\rho(X_j, X_l) = 0$ pro všechna $j, l = 1, \ldots, n, j \neq l$, tj. jsou-li všechny veličiny $X_1, \ldots, X_n$ nekorelované, je korelační matice jednotkovou maticí.

Uvažujme ještě funkci

$$h(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{j=1}^{n} a_j X_j + b,$$

kde $a_1, \ldots, a_n, b$ jsou reálná čísla. Z (11.7.1), (11.7.2) a z definice marginálních rozdělení veličin $X_1, \ldots, X_n$ vyplývá, že

$$E\Big(\sum_{j=1}^{n} a_j X_j + b\Big) = \sum_{j=1}^{n} a_j E(X_j) + b. \tag{11.7.9}$$

Ukažme to na případě dvourozměrné náhodné veličiny $(X_1, X_2)'$ mající sdruženou hustotu pravděpodobnosti $f(x_1, x_2)$. Platí

$$E(a_1X_1 + a_2X_2 + b) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(a_1x_1 + a_2x_2 + b)f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 =$$

$$= a_1\int_{-\infty}^{\infty} x_1\Big[\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_2\Big]\mathrm{d}x_1 + a_2\int_{-\infty}^{\infty} x_2\Big[\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1\Big]\mathrm{d}x_2 +$$

$$+ b\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(X_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 =$$

$$= a_1\int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_1(x_1)\,\mathrm{d}x_1 + a_2\int_{-\infty}^{\infty} x_2 f_2(x_2)\,\mathrm{d}x_2 + b = a_1E(X_1) + a_2E(X_2) + b.$$

Speciálním případem vztahu (11.7.9) je vztah (10.4.8) pro $n = 1, X_1 = X$, $a_1 = a$ nebo odvozování vztahu (11.7.7), kde $n = 3$, $X_1 = X_j X_l$, $a_1 = 1$, $X_2 = X_j$, $a_2 = -E(X_j)$, $X_3 = X_l$, $a_3 = -E(X_l)$, $b = E(X_j)E(X_l)$. Dále uvažujme funkci

$$h(X_1, \ldots, X_n) = \Big[\sum_{j=1} a_j X_j + b - E\big[\sum_{j=1}^{n} a_j X_j + b\big]\Big]^2 =$$

$$\Big[\sum_{j=1} a_j \big[X_j - E(X_j)\big]\Big]^2 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_j a_l \big[X_j - E(X_j)\big]\big[X_l - E(X_l)\big].$$

Střední hodnota $E\big[h(X_1, \ldots, X_n)\big]$ je rovna rozptylu $\mathrm{var}\Big[\sum_{j=1}^{n}(a_j X_j + b)\Big]$. Tudíž

$$\mathrm{var}\Big[\sum_{j=1}^{n}(a_j X_j + b)\Big] = \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_j a_l \,\mathrm{cov}(X_j, X_l). \tag{11.7.10}$$

Pro $n = 2$ je

$$\mathrm{var}(a_1 X_1 + a_2 X_2 + b) = a_1^2 \,\mathrm{var}(X_1) + a_2^2 \,\mathrm{var}(X_2) + 2a_1 a_2 \,\mathrm{cov}(X_1, x_2). \tag{11.7.11}$$

Jsou-li veličiny X_j, X_l nekorelované pro všechna $j, l = 1, \ldots, n, j \neq l$, je

$$\mathrm{var}\Big[\sum_{j=1}^{n}(a_j X_j + b)\Big] = \sum_{j=1}^{n} a_j^2 \,\mathrm{var}(X_j). \tag{11.7.12}$$

11.8 Charakteristická funkce

Charakteristická funkce $\psi_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{t})$ náhodného vektoru $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ je definována výrazem

$$\psi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = E\Big[\exp\big(\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n} t_j X_j\big)\Big] = E\big[\exp(\mathrm{i}\mathbf{t}'\mathbf{X})\big], \tag{11.8.1}$$

kde $\mathrm{i} = (-1)^{\frac{1}{2}}$ a $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n)'$ je vektor n reálných proměnných $t_1, \ldots, t_n$.

Tudíž

$$\psi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \sum_{x_1} \ldots \sum_{x_n} \exp\big(\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n} t_j X_j\big)\, P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) \tag{11.8.2}$$

pro náhodný vektor $\mathbf{X}$ s diskrétním rozdělením a

$$\psi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\big(\mathrm{i} \sum_{j=1}^{n} t_j X_j\big)\, f(x_1, \dots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n \qquad (11.8.3)$$

pro náhodný vektor $\mathbf{X}$ se spojitým rozdělením.

Charakteristická funkce $\psi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})$ náhodného vektoru $\mathbf{X}$ má obdobné vlastnosti jako charakteristická funkce náhodné veličiny X (viz odst. 10.6). Zejména $\psi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})$ jednoznačně určuje rozdělení vektoru $\mathbf{X}$.

Existuje-li střední hodnota $E\big(X_1^{r_1} X_2^{r_2} \dots X_n^{r_n}\big)$, platí

$$E\big(X_1^{r_1} X_2^{r_2} \dots X_n^{r_n}\big) = \frac{1}{\mathrm{i}^{(r_1+r_2+\dots+r_n)}} \frac{\partial^{(r_1+r_2+\dots+r_n)}}{\partial_{t_1}^{r_1} \partial_{t_2}^{r_2} \dots \partial_{t_n}^{(} r_n)} \psi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) \Bigg|_{t_1=\dots=t_n=0}, \qquad (11.8.4)$$

např.

$$E(X_j X_l) = \frac{1}{\mathrm{i}^2} \frac{\partial^2}{\partial t_j \partial t_l} \psi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) \Bigg|_{t_1=\dots=t_n=0}.$$

Charakteristická funkce marginálního rozdělení veličin $X_{j1}, \dots, X_{j_k}, 1 \leq k < n$, kde $J = \{j_1, \dots, j_k\}$ je podmnožina množiny $\{1, 2, \dots, n\}$, se dostane tak, že v $\psi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})$ položíme $t_j = 0$ pro všechna $j \notin J$. Např.

$$\psi_{X_1}(t_1) = \psi_{\mathbf{X}}(t_1, 0, \dots, 0)$$

nebo

$$\psi_{X_1, X_n}(t_1, t_n) = \psi_{\mathbf{X}}(t_1, 0, \dots, 0, t_n).$$

11.9 Příklady

11.9.1

Pro rozdělení uvažované v příkl. 11.4.1 je

$$\begin{aligned}
&E(X_1) = 0,4, && E(X_2) = 0,2 + 2 \cdot 0,1 = 0,4,\\
&\mathrm{var}(X_1) = 0,4 - 0,4^2 = 0,24, && \mathrm{var}(X_2) = 0,2 + 4 \cdot 0,1 - 0,4^2 = 0,44\\
&\mathrm{cov}(X_1, X_2) = 0,08 + 2 \cdot 0,04 - 0,4 \cdot 0,4 = 0,
\end{aligned}$$

takže $\rho(X_1, X_2) = 0$, tj. veličiny X_1 a X_2 jsou nekorelované.

11.9.2

Stanovme charakteristickou funkci vektoru $\mathbf{X} = (X_1, X_2)'$, který má hustotu pravděpodobnosti 11.4.1. Tato charakteristická funkce

$$\psi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \int_O^\infty \int_O^\infty \exp(\mathrm{i}t_1x_1 + \mathrm{i}t_2x_2 - x_1 - x_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = \big[(1-\mathrm{i}t_2)(1-\mathrm{i}t_2)\big]^{-1}.$$

Odtud charakteristické funkce marginálního rozdělení veličin X_1 a X_2 jsou rovny

$$\psi_{X_1}(t_1) = \psi_{\mathbf{X}}(t_1, 0) = (1-\mathrm{i}t_1)^{-1}, \quad \psi_{X_2}(t_2) = \psi_{\mathbf{X}}(0, t_2) = (1-\mathrm{i}t_2)^{-1}.$$

S využitím vztahu (11.8.4) dostáváme

$$\begin{aligned} E(X_1) &= \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial\psi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})}{\partial t_1}\Bigg|_{t_1=t_2=0} = \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i}t_1)^2(1-\mathrm{i}t_2)}\Bigg|_{t_1=t_2=0} = 1, \\ E(X_1^2) &= \frac{1}{i^2}\frac{\partial^2\psi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})}{\partial t_1^2}\Bigg|_{t_1=t_2=0} = \frac{1}{\mathrm{i}^2}\frac{2\mathrm{i}^2}{(1-\mathrm{i}t_1)^3(1-\mathrm{i}t_2)}\Bigg|_{t_1=t_2=0} = 2, \end{aligned}$$

takže

$$\mathrm{var}(X_1) = 1$$

a obdobně

$$E(X_2) = 1, \quad \mathrm{var}(X_2) = 1.$$

Dále

$$E(X_1X_2) = \frac{1}{\mathrm{i}^2}\frac{\partial^2\psi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})}{\partial t_1\partial t_2}\Bigg|_{t_1=t_2=0} = \frac{1}{\mathrm{i}^2}\frac{\mathrm{i}^2}{(1-\mathrm{i}t_1)^2(1-\mathrm{i}t_2)^2}\Bigg|_{t_1=t_2=0} = 1,$$

takže

$$\mathrm{cov}(X_1, X_2) = 1 - 1^2 = 0, \quad \rho(X_1, X_2) = 0.$$

11.9.3

Nechť náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2)'$ má hustotu pravděpodobnosti (11.4.1). Stanovme střední hodnotu a rozptyl veličiny $Y = h(X_1, X_2) = X_1 - X_2$.

S využitím výsledků příkl. 11.6.3 zjistíme, že

$$E(X_1) = \int_0^1 x_1\left(x_1 + \frac{1}{2}\right) \mathrm{d}x_1 = \frac{7}{12}, \quad E(X_1^2) = \int_0^1 x_1^2\left(x_1 + \frac{1}{2}\right) \mathrm{d}x_1 = \frac{5}{12},$$

takže

$$\mathrm{var}(X_1) = \frac{5}{12} - \frac{49}{144} = \frac{11}{144}.$$

Obdobně

$$E(X_2) = \frac{7}{12}, \quad \mathrm{var}(X_2) = \frac{11}{144}.$$

Dále

$$E(X_1X_2) = \int_0^1 \int_0^1 x_1x_2(x_1 + x_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = \frac{1}{3}$$

takže

$$\mathrm{cov}(X_1, X_2) = \frac{1}{3} - \frac{49}{144} = -\frac{1}{144}.$$

Odtud

$$E(X_1 - X_2) = 0, \quad \mathrm{var}(X_1 - X_2) = \frac{2 \cdot 11}{144} + \frac{2}{144} = \frac{1}{6}.$$

11.9.4

Uvažujme vztah (11.7.11) pro $a_1 = \big[\mathrm{var}(X_1)\big]^{-\frac{1}{2}},\ a_2 = \pm\big[var(X_2)\big]^{-\frac{1}{2}},\ b = 0.$ Pak

$$\mathrm{var}\left[\frac{X_1}{\sqrt{\mathrm{var}(X_1)}} \pm \frac{X_2}{\sqrt{\mathrm{var}(X_2)}}\right] = 1 + 1 \pm 2\rho(X_1, X_2) \geq 0,$$

neboť rozptyl je nezáporné číslo. Odtud vyplývá, že $-1 \leq \rho(X_1, X_2) \leq 1$.

11.10 Úlohy

11.10.1

Nechť náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2)'$ má pravděpodobnostní funkci

$$\begin{aligned} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) &= \frac{1}{15}(x_1 + x_2 + 1), \quad && x_1 = 0, 1, 2, \quad x_2 = 0, 1, \\ &= 0, && \text{jinak.} \end{aligned}$$

Stanovte marginální pravděpodobnostní funkce $P(X_1 = x_1)$ a $P(X_2 = x_2)$. Dále stanovte hodnotu $\rho(X_1, X_2)$.

$$\left[\begin{array}{lll} P(X_1 = x_1) = \frac{2x_1+3}{15}, & x_1 = 0, 1, 2, & \\ P(X_2 = x_2) = \frac{x_2+2}{5}, & x_2 = 0, 1, & \rho(X_1, X_2) = -0,07. \end{array}\right]$$

11.10.2

Nechť náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)'$ má hustotu pravděpodobnosti

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= 8x_1x_2x_3 \exp(-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2), \quad x_j > 0, \quad j = 1, 2, 3 \\ &= 0, \quad \text{jinak.} \end{aligned}$$

Stanovte marginální hustoty pravděpodobnosti $f_j(x_j)$ veličin $X_j, j = 1, 2, 3$. Dále stanovte kovarianční matici $\mathbf{\Sigma} = (\sigma_{jl}), \quad j, l = 1, 2, 3$.

$$\left[\begin{array}{lll} f_j(x_j) = 2x_j \exp(-x_j^2), & x_j > 0, & \\ = 0, & x_j \le 0, & j = 1, 2, 3, \end{array} \quad \mathbf{\Sigma} = \frac{4-\pi}{\pi} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

11.10.3

Ukažte, že pro dvourozměrnou náhodnou veličinu $\mathbf{X} = (X_1, X_2)'$ platí

$$P(a_1 < X_1 \le b_1,\ X_2 \le b_2) = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2)$$

pro všechna reálná $a_1, b_1, b_2, a_1 < b_1$.

Kapitola 12

Nezávislost náhodných veličin

12.1 Podmíněné rozdělení

V odstavci 6.4 jsme uvažovali podmíněnou pravděpodobnost $P(A|B)$ náhodného jevu A za podmínky, že nastal náhodný jev B. Tato podmíněná pravděpodobnost je dána výrazem (6.4.2), jestliže $P(B) > 0$.

Mějme nyní dvourozměrnou náhodnou veličinu $\mathbf{X} = (X_1, X_2)'$ mající rozdělení diskrétního typu se sdruženou pravděpodobnostní funkcí $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$.

Ve shodě s (6.4.2) definujme *podmíněnou pravděpodobností funkci*

$$P(X_1 = x_1|X_2 = x_2)$$

veličiny X_1 *za podmínky, že veličina* X_2 nabyla hodnoty x_2, výrazem

$$P(X_1 = x_1|X_2 = x_2) = \frac{P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)}{P(X_2 = x_2)}, \tag{12.1.1}$$

jestliže $P(X_2 = x_2) > 0$. Přitom

$$P(X_2 = x_2) = \sum_{x_1} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$$

je marginální pravděpodobnostní funkce veličiny X_2.

Vztah (12.1.1) můžeme přepsat na tvar

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = P(X_2 = x_2)P(X_1 = x_1|X_2 = x_2), \tag{12.1.2}$$

jestliže $P(X_1 = x_1) > 0$, a obdobně je

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = P(X_1 = x_1)P(X_2 = x_2|X_1 = x_1), \qquad (12.1.3)$$

jestliže $P(X_1 = x_1) > 0$.

Lze tedy sdruženou pravděpodobnostní funkci veličin X_1 a X_2 vyjádřit jako součin marginální pravděpodobnostní funkce jedné z těchto veličin a podmíněné pravděpodobnostní funkce druhé veličiny.

Má-li vektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2)'$ rozdělení spojitého typu se sdruženou hustotou pravděpodobnosti $f(x_1, x_2)$, je *podmíněná hustota pravděpodobnosti* $f(x_1|x_2)$ veličiny X_1 za podmínky $X_2 = x_2$ dána výrazem

$$f(x_1|x_2) = \frac{f(x_1, x_2)}{f_2(X_2}), \qquad (12.1.4)$$

jestliže $f_2(x_2) > 0$. Zde

$$f_2(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1$$

je marginální hustota pravděpodobnosti veličiny X_2.

Vztahům (12.1.2) a (12.1.3) odpovídají vztahy

$$f(x_1, x_2) = f_2(x_2) f(x_1|x_2), \qquad (12.1.5)$$

jestliže $f_2(x_2) > 0$, a

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) f(x_1|x_2), \qquad (12.1.6)$$

jestliže $f_1(x_1) > 0$.

Z těchto dvou vztahů vyplývá, že

$$f_2(x_2|x_1) = \frac{f(x_1|x_2) f_2(x_2)}{f_1(x_1)} \qquad (12.1.7)$$

kde vzhledem k (12.1.5) je

$$f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_2 = \int_A f(x_1|x_2) f_2(x_2)\,\mathrm{d}x_2, \qquad (12.1.8)$$

přičemž obor $A = \{x_2 | f_2(x_2) > 0\}$.

Obdobně pro veličiny diskrétního typu vyplývá z (12.1.2) a (12.1.3), že

$$P(X_2 = x_2|X_1 = x_1) = \frac{P(X_1 = x_1|X_2 = x_2)P(X_2 = x_2)}{P(X_1 = x_1)} \tag{12.1.9}$$

kde

$$P(X_1 = x_1) = \sum_A P(X_1 = x_1|X_2 = x_2)P(X_2 = x_2), \tag{12.1.10}$$

přičemž $A = \{x_2|P(X_2 = x_2) > 0\}$.

Vztah (12.1.7), příp. (12.1.9) se nazývá *Bayesův vzorec* pro náhodné veličiny spojitého, přip. diskrétního typu.

12.2 Podmíněné střední hodnoty a rozptyly

Střední hodnota podmíněného rozdělení se nazývá *podmíněná střední hodnota.* Označíme ji $E(X_1|X_2 = x_2)$. Je tedy

$$E(X_1|X_2 = x_2) = \sum_{x_1} x_1 P(X_1 = x_1|X_2 = x_2) \tag{12.2.1}$$

v případě diskrétního rozdělení a

$$E(X_1|X_2 = x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f(x_1|x_2)\,\mathrm{d}x_1 \tag{12.2.2}$$

v případě spojitého rozdělení.

Podmíněná střední hodnota veličiny X_2 závisí na zvolené hodnotě x_2 veličiny X_2 a je tedy její funkcí. Nazývá se *regresní funkce veličiny X_1 na veličině X_2.*

Podmíněný rozptyl je definován takto:

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(X_1|X_2 = x_2) &= E\{[X_1 - E(X_1|X_2 = x_2)]^2|X_2 = x_2\} = \\ &= E(X_1^2|X_2 = x_2)\mathrm{e}^2(X_1|X_2 = X_2). \end{aligned} \tag{12.2.3}$$

12.3 Příklady

12.3.1

Nechť náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2)'$ má hustotu pravděpodobnosti (11.4.1). Pak podmíněná hustota pravděpodobnosti

$$f(x_1|x_2) = \frac{f(x_1,x_2)}{f_2(x_2)} = \frac{\mathrm{e}^{-x_1-x_2}}{\mathrm{e}^{-x_2}} = \mathrm{e}^{-x_1}, \quad x_1 > 0.$$

Obdobně

$$f(x_2|x_1) = \mathrm{e}^{-x_2}, \quad x_2 > 0.$$

12.3.2

Nechť náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2)'$ má hustotu pravděpodobnosti (**??**). Pak

$$f(x_1|x_2) = \frac{x_1+x_2}{x_2+0,5}, \quad 0 < x_1 < 1, \quad 0 < x_2 < 1,$$

a

$$f(x_2|x_1) = \frac{x_1+x_2}{x_1+0,5}, \quad 0 < x_1 < 1, \quad 0 < x_2 < 1.$$

Výraz pro $f(x_2|x_1)$ jsme mohli též obdržet použitím vztahu (12.1.7), neboť (viz příkl. 11.6.3)

$$f(x_2|x_1) = \frac{f(x_1|x_2)f_2(x_2)}{f_1(x_1)} = \frac{x_1+x_2}{x_2+0,5}\,\frac{x_2+0,5}{x_1+0,5}, \quad 0 < x_1 < 1, \quad 0 < x_2 < 1.$$

Podmíněná střední hodnota

$$E(X_1|X_2 = x_2) = \int_0^1 x_1 \frac{x_1+x_2}{x_2+0,5}\,\mathrm{d}x_1 = \frac{3x_2+2}{6x_2+3}, \quad 0 < x_2 < 1.$$

Dále

$$E(X_1^2|X_2 = x_2) = \int_0^1 x_1^2 \frac{x_1+x_2}{x_2+0,5}\,\mathrm{d}x_1 = \frac{4x_2+3}{12x_2+6}, \quad 0 < x_2 < 1,$$

takže podmíněný rozptyl

$$\mathrm{var}(X_1|X_2 = x_2) = \frac{6x_2^2+6x_2+1}{2(6x_2+3)^2}, \quad 0 < x_2 < 1.$$

12.4 Nezávislé náhodné veličiny

V odstavci 6.8 jsme zavedli pojem nezávislosti náhodných jevů. Náhodné jevy A a B jsou nezávislé, jestliže pravděpodobnost jejich průniku $A \cap B$ je rovna součinu pravděpodobností jednotlivých jevů. V souladu s tím budeme definovat nezávislost náhodných veličin. Nechť dvourozměrná náhodná veličina $\mathbf{X} = (X_1, X_2)'$ má sdruženou distribuční funkci $F(x_1, x_2)$ a nechť $F_1(x_1)$ a $F_2(x_2)$ jsou marginální distribuční funkce veličin X_1 a X_2. Řekneme, že *náhodné veličiny* X_1 a X_2 jsou *nezávislé*, když a jen když

$$F(x_1, x_2) = F_1(x_1)F_2(x_2) \tag{12.4.1}$$

pro všechna reálná x_1 a x_2.

Použijeme-li vztahů (11.2.2) a (12.4.1), zjistíme, že pak

$$\begin{aligned}
&P(a_1 < X_1 \le b_1, a_2 < X_2 \le b_2) = \\
&\quad = F_1(b_1)F_2(b_2) - F_1(b_1)F_2(a_2) - F_1(a_1)F_2(b_2) + F_1(a_1)F_2(a_2) = \\
&\qquad\qquad \big[F_1(b_1) - F_1(a_1)\big]\big[F_2(b_2) - F_2(a_2)\big],
\end{aligned}$$

takže pro nezávislé náhodné veličiny X_1 a X_2 platí

$$P(a_1 < X_1 \le b_1, a_2 < X_2 \le b_2) = P(a_1 < X_1 \le b_1)P(a_2 < X_2 \le b_2) \tag{12.4.2}$$

pro všechna reálná $a_1 < b_1$ a $a_2 < b_2$.

Má-li $\mathbf{X} = (X_1, X_2)'$ rozdělení diskrétního typu, je-li $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$ sdružená pravděpodobností funkce a jsou-li $P(X_1 = x_1)$ a $P(x_2 = x_2)$ marginální pravděpodobnostní funkce veličin X_1 a X_2, jsou veličiny X_1 a X_2 nezávislé, když a jen když

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = P(X_1 = x_1)P(x_2 = x_2) \tag{12.4.3}$$

pro všechna reálná x_1 a x_2.

Má-li $\mathbf{X} = (X_1, X_2)'$ sdruženou hustotu pravděpodobnosti $f(x_1, x_2)$ a jsou-li $f_1(x_1)$ a $f_2(x_2)$ marginální hustoty pravděpodobnosti veličin X_1 a X_2, jsou veličiny X_1 a X_2 nezávislé, když a jen když

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(X_2) \tag{12.4.4}$$

pro všechna reálná x_1 a x_2.

Tento vztah vyplývá z (12.4.1) a (11.3.4).

Porovnejme nyní vztahy (12.1.5) a (12.4.4). Je vidět, že pro nezávislé náhodné veličiny X_1 a X_2 platí pro všechna x_2, pro která $f_2(x_2) > 0$,

$$f(x_1|x_2) = f_1(x_1), \tag{12.4.5}$$

tj. podmíněná hustota pravděpodobnosti veličiny X_1 za podmínky $X_2 = x_2$ je rovna nepodmíněné (marginální) hustotě pravděpodobnosti veličiny X_1.

Obdobně z porovnání (12.1.6) a (12.4.4) vyplývá, že pro nezávislé náhodné veličiny X_1 a X_2 je pro všechna x_1, pro která $f_1(x_1) > 0$,

$$f(x_2|x_1) = f_2(x_2). \tag{12.4.6}$$

Stejně tak pro nezávislé náhodné veličiny X_1 a X_2 s diskrétními rozděleními platí pro všechna x_2, pro která $P(X_2 = x_2) > 0$, příp. pro všechna x_1, pro která $P(X_1 = x_1) > 0$,

$$\begin{aligned} P(X_1 = x_1|X_2 = x_2) &= P(X_1 = x_1), \\ P(X_2 = x_2|X_1 = x_1) &= P(X_2 = x_2). \end{aligned} \tag{12.4.7}$$

Jsou-li náhodné veličiny X_1 a X_2 nezávislé, platí

$$E(X_1^{r_1} X_2^{r_2}) = E(X_1^{r_1})E(X_2^{r_2}), \tag{12.4.8}$$

pokud příslušné střední hodnoty existují.

Ukažme platnost tohoto vztahu pro veličiny s diskrétním rozdělením (pro veličiny se spojitým rozdělením je důkaz analogický). Zřejmě

$$\begin{aligned} E\big(X_1^{r_1} X_2^{r_2}\big) &= \sum_{x_1} \sum_{x_2} x_1^{r_1} x_2^{r_2} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = \\ &= \sum_{x_1} \sum_{x_2} x_1^{r_1} x_2^{r_2} P(X_1 = x_1) P(X_2 = x_2) = \\ \Big[\sum_{x_1} x_1^{r_1} P(X_1 = x_1)\Big] &\Big[\sum_{x_2} x_2^{r_2} P(X_2 = x_2)\Big] = E\big(X_1^{r_1}\big) E(X_2^{r_2}). \end{aligned}$$

Speciálně pro X_1 a X_2, splňující vztah (12.4.8), pak platí $E(X_1 X_2) = E(X_1)E(X_2)$, takže

$$\operatorname{cov}(X_1, X_2) = E(X_1 X_2) - E(X_1)E(X_2) = 0, \tag{12.4.9}$$

tzn. jsou-li veličiny X_1 a X_2 nezávislé, jsou vždy nekorelované. Opak však obecně neplatí.

Uvažujme nyní n-rozměrnou náhodnou veličinu $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$. Řekneme, že *náhodné veličiny* $X_1, \dots, X_n$ jsou *vzájemně nezávislé*, když a jen když

$$F(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \dots F_n(x_n) \tag{12.4.10}$$

pro všechna reálná $x_1, \dots, x_n$. Zde $F(x_1, \dots, x_n)$ je sdružená distribuční funkce a $F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)$ jsou marginální distribuční funkce veličin $X_1, \dots, X_n$.

Obdobně jako v případě $n = 2$ jsou náhodné veličiny $X_1, \dots, X_n$ vzájemně nezávislé, když a jen když

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \dots P(X_n = x_n) \tag{12.4.11}$$

v případě diskrétních rozdělení, případně když a jen když

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \dots f_n(x_n) \tag{12.4.12}$$

v případě spojitých rozdělení.

Jsou-li náhodné veličiny $X_1, \dots X_n$ vzájemně nezávislé, platí

$$E(X_1^{r_1} \dots X_n^{r_n}) = E(X_1^{r_1}) \dots E(X_n^{r_n}), \tag{12.4.13}$$

pokud příslušné střední hodnoty existují. Speciálně $E(X_j X_l) = E(X_j)E(X_l)$ pro všechna $j, l = 1, \dots n,\ j \neq l$. Koční matice vzájemně nezávislých náhodných veličin $X_1, \dots, X_n$ je tedy diagonální maticí.

Uvažujeme-li místo mocnin $X_j^{r_j}$ funkce $h_j(X_j)$ veličin $X_j, j = 1, \dots, n$, pak v případě vzájemné nezávislosti náhodných veličin platí

$$E\big[h_1(X_1) \dots h_n(X_n)\big] = E\big[h_1(X_1)\big] \dots E\big[h_n(X_n)\big], \tag{12.4.14}$$

pokud příslušné střední hodnoty existují.

Položme $h_j(X_j) = \exp(\mathrm{i} t_j X_j)$. Pak

$$E\Big[\exp\big(\mathrm{i}\sum_{j=1}^{1} t_j X_j\big)\Big] = \prod_{j=1}^{n} E\big[\exp(\mathrm{i} t_j X_j)\big]$$

neboli

$$\psi_{\mathbf{X}}(t) = \psi_{\mathbf{X}_1}(t_1) \dots \psi_{\mathbf{X}_n}(t_n). \tag{12.4.15}$$

Jsou-li tedy veličiny $X_1, \dots, X_n$ vzájemně nezávislé, je charakteristická funkce náhodného vektoru $\mathbf{X} = (X_1, X_2)'$ rovna součinu charakteristických funkcí jednotlivých náhodných veličin. Naopak ze vztahu (12.4.15) plyne vzájemná nezávislost náhodných veličin $X_1, \dots, X_n$ (viz [23], str. 300).

Uvažujme ještě náhodnou veličinu $X = \sum_{j=1}^{n} a_j X_j + b$, kde $X_1, \dots, X_n$ jsou vzájemně nezávislé náhodné veličiny a $a_1, \dots a_n, b$ reálná čísla. Pak charakteristická funkce veličiny X

$$\psi_{\mathbf{X}}(t) = E\big[\exp(\mathrm{i}tX)\big] = \exp(itb) E\Big[\exp\big(\mathrm{i}t \sum_{j=1}^{n} a_j X_j\big)\Big] =$$

$$= \exp(\mathrm{i}tb) \prod_{j=1}^{n} E\big[\exp(\mathrm{i}t a_j X_j)\big]$$

neboli

$$\psi_{\mathbf{X}}(t) = \exp(\mathrm{i}tb) \prod_{j=1}^{n} \psi_{X_j}(a_j t). \tag{12.4.16}$$

Speciálně pro $X = \sum_{j=1}^{n} X_j$ platí

$$\psi_{\mathbf{X}}(t) = \prod_{j=1}^{n} \psi_{\mathbf{X}_j}(t). \tag{12.4.17}$$

12.5 Příklady

12.5.1

Nechť náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2)'$ má hustotu pravděpodobnosti (11.4.1). Z výsledků příkl. 11.4.2 a 11.6.2 zjistíme, že platí

$$F(x_1, x_2) = F_1(x_1) F_2(x_2), \quad -\infty < x_1 < \infty, \ \ -\infty < x_2 < \infty,$$

a

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2), \quad -\infty < x_1 < \infty, \ \ -\infty < x_2 < \infty,$$

Dále z příkl. 11.9.2 je zřejmé, že pro charakteristické funkce platí

$$\psi_{\mathbf{X}}(t_1, t_2) = \psi_{X_1}(t_1) \psi_{X_2}(t_2).$$

Z každého z těchto tří vztahů vyplývá, že veličiny X_1 a X_2 jsou nezávislé.

12.5.2

Jsou-li náhodné veličiny X_1 a X_2 nezávislé, platí pro podmíněnou střední hodnotu a podmíněný rozptyl

$$E(X_1|X_2 = x_2) = E(X_1), \mathrm{var}(X_1|X_2 = x_2) = \mathrm{var}(X_1),$$

kde $E(X_1)$ a $\mathrm{var}(X_1)$ jsou střední hodnota rozptyl marginálního rozdělení veličiny X_1.

Tyto vztahy vyplývají bezprostředně z (12.2.1) a z (12.2.3), použijeme-li v nich vztahů (12.4.7) a (12.4.5).

12.5.3

Nechť náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2)'$ má hustotu pravděpodobnosti

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= 2x_1(x_2 + x_3), \quad 0 < x_j < 1, \quad j = 1, 2, 3, \\ &= 0, \qquad \text{jinak.} \end{aligned}$$

Zjistěme, zda náhodné veličiny X_1, X_2, X_3 jsou vzájemně nezávislé.

Marginální hustoty pravděpodobnosti $f_j(x_j), j = 1, 2, 3$ jsou rovny

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &= 2x_1 \int_0^1 \left[\int_0^1 (x_2 + x_3)\, \mathrm{d}x_3 \right] \mathrm{d}x_2 = 2x_1, && 0 < x_1 < 1, \\ &= 0, && \text{jinak,} \\ f_2(x_2) &= 2 \int_0^1 x_1 \left[\int_0^1 (x_2 + x_3)\, \mathrm{d}x_3 \right] \mathrm{d}x_1 = x_2 + \frac{1}{2}, && 0 < x_2 < 1, \\ &= 0, && \text{jinak,} \\ f_3(x_3) &= 2 \int_0^1 x_1 \left[\int_0^1 (x_2 + x_3)\, \mathrm{d}x_2 \right] \mathrm{d}x_1 = x_3 + \frac{1}{2}, && 0 < x_3 < 1, \\ &= 0, && \text{jinak.} \end{aligned}$$

Protože neplatí $f(x_1, x_2, x_3) = f_1(x_1)f_2(x_2)f_3(x_3)$ pro všechna reálná x_1, x_2, x_3 nejsou veličiny X_1, X_2, X_3 vzájemně nezávislé.

12.6 Úlohy

12.6.1

Stanovte podmíněnou pravděpodobnostní funkci $P(X_1 = x_1|X_2 = x_2)$ pro rozdělení uvažované v úloze 11.10.1.

$$\left[P(X_1 = x_1|X_2 = x_2) = \tfrac{x_1+x_2+1}{3(x_2+2)}, \quad x_1 = 0,1,2, \quad x_2 = 0,1.\right]$$

12.6.2

Ukažte, že pro podmíněnou hustotu pravděpodobnosti $f(x_1|x_2)$, danou výrazem (12.1.4), platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1|x_2)\,\mathrm{d}x_1 = 1$$

pro všechna x_2, pro která je $f_2(x_2) > 0$.

12.6.3

Nechť náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2)'$ má hustotu pravděpodobnosti

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= c(1 + x_1 + x_2)^{-a}, \quad && x_1 > 0, \quad x_2 > 0, a > 2, \\ &= 0, && \text{jinak}, \end{aligned}$$

Stanovte konstantu c a dále hustoty $f_1(x_1)$ a $f(x_2|x_1)$.

$$\left[\begin{array}{l} c = (a-1)(a-2), f_1(x_1) = (a-2)(1+x_1)^{-a+1}, x_1 > 0, \\ f(x_2|x_1) = (a-1)(1+x_1)^{-a+1}(1+x_1+x_2)^{-a}, x_1 > 0, x_2 > 0. \end{array}\right]$$

12.6.4

Ukažte, že pro nezávislé náhodné veličiny X_1, X_2 platí

$$\mathrm{var}(X_1X_2) = \mathrm{var}(X_1)\mathrm{var}(X_2) + \mathrm{e}^2(X_1)\mathrm{var}(X_2) + \mathrm{e}^2(X_2)\mathrm{var}(X_1).$$

Kapitola 13

Funkce náhodných veličin

13.1 Funkce náhodné veličiny

V řadě problémů nás zajímá rozdělení pravděpodobnosti určité funkce $Y = h(X)$ náhodné veličiny X, známe-li rozdělení pravděpodobnosti veličiny X.

Omezíme se na případy, kde veličina X má rozdělení spojitého typu s distribuční funkcí $F(x)$ a hustotou pravděpodobnosti $f(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}$.

13.2 Ryze monotónní funkce

Je-li funkce $y = h(x)$ na množině možných hodnot x veličiny X ryze monotónní [tj. je-li $h(x)$ buď rostoucí, nebo klesající funkcí x], má náhodná veličina $Y = h(X)$ hustotu pravděpodobnosti

$$g(y) = f\big[h^{-1}(y)\big]\left|\frac{\mathrm{d}h^{-1}(y)}{\mathrm{d}y}\right|, \tag{13.2.1}$$

kde $x = h^{-1}(y)$ je inverzní funkce k funkci $y = h(x)$.

Důkaz. Pro rostoucí funkci $h(x)$ je distribuční funkce veličiny Y rovna $G(y) = P(Y \leq y) = P\big[h(X) \leq y\big] = P\big[X \leq h^{-1}(y)\big] = F\big[h^{-1}(y)\big]$.

Odtud

$$g(y) = \frac{\mathrm{d}G(y)}{\mathrm{d}y} = f\big[h^{-1}(y)\big]\frac{\mathrm{d}h^{-1}(y)}{\mathrm{d}y}.$$

Obdobně pro klesající funkci $h(x)$ je

$$G(y) = 1 - P\big[h(X) \geq y\big] = 1 - P\big[X \leq h^{-1}(y)\big] = 1 - F\big[h^{-1}(y)\big]$$

a

$$g(y) = -f\left[h^{-1}(y)\right]\frac{\mathrm{d}h^{-1}(y)}{\mathrm{d}y}.$$

13.3 Příklady

13.3.1

Nechť $Y = aX + b, a \neq 0$. Pak

$$g(x) = f\left(\frac{y-b}{a}\right)\frac{1}{|a|}. \tag{13.3.1}$$

Např. má-li $f(x)$ tvar

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty,$$

má veličina $Y = \frac{(X-\mu)}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}X - \frac{\mu}{\sigma}$ hustotu pravděpodobnosti

$$g(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{y^2}{2}}, \quad -\infty < y < \infty.$$

13.3.2

Nechť veličina X má hustotu $f(x) \geq 0$ pro $x > 0$ a $f(x) = 0$ pro $x \leq 0$. Pak veličina $Y = a\ln X, a \neq 0$, má hustotu

$$g(y) = f(\mathrm{e}^{\frac{y}{a}}\frac{1}{|a|}\,\mathrm{e}^{\frac{y}{a}}). \tag{13.3.2}$$

Např. jestliže pro $c > 0$ je

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{c}, \quad 0 < x < c, \\ &= 0, \quad \text{jinak}, \end{aligned}$$

má veličina $Y = -\ln X$ hustotu

$$\begin{aligned} g(y) &= \frac{1}{c}\,\mathrm{e}^{-y} = \mathrm{e}^{-(y+\ln c)}, \quad y > -\ln c, \\ &= 0, \quad \text{jinak}. \end{aligned}$$

13.3.3

Nechť opět veličina X má hustotu $f(x) \geq 0$ pro $x > 0$ a $f(x) = 0$ pro $x \leq 0$. Pak veličina $Y = X^r$ má hustotu

$$g(y) = f(y^{\frac{1}{r}} \frac{1}{|r|} y^{\frac{1-r}{r}} \tag{13.3.3}$$

Např. jestliže

$$\begin{aligned} f(x) &= x\mathrm{e}^{-x}, \quad x > 0, \\ &= 0, \qquad\quad x \leq 0, \end{aligned}$$

má veličina $Y = X^{\frac{1}{2}}$ hustotu

$$\begin{aligned} g(y) &= 2y^3\mathrm{e}^{-y^2}, \quad y > 0 \\ &= 0, \qquad\qquad y \leq 0. \end{aligned}$$

13.4 Případ, kdy $h(x)$ není ryze monotónní

Není-li funkce $y = h(x)$ ryze monotónní, určíme pro dané y hodnotu distribuční funkce $G(y)$ veličiny Y tak, že stanovíme všechny intervaly $I_1(y), I_2(y), \ldots$ na ose x, pro které platí $h(x) \leq y$ (viz obr. 6). Pro tyto intervaly pak vyjádříme pravděpodobnosti $P[X \in I_j(y)] = \int_{I_j} f(x)\,\mathrm{d}x$, $j = 1, 2, \ldots$. Protože tyto intervaly jsou disjunktní, je pro dané y hodnota $G(y)$ rovna

$$G(y) = \sum_j P\big[X \in I_j(y)\big] = \sum_j \int_{I_j} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{13.4.1}$$

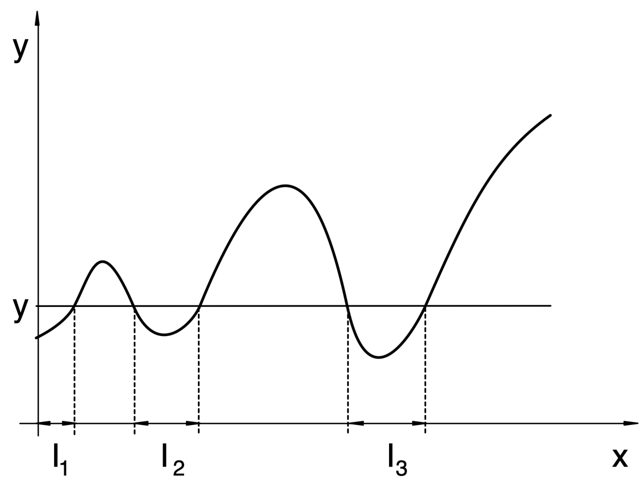
Hustota pravděpodobnosti $g(y)$ pak dostaneme derivaci distribuční funkce $G(y)$. V některých případech nerovnosti $h(x) \leq y$ odpovídá jen jeden interval $I(y)$. Pak $G(y) = P[X \in I(y)]$. Takovou situaci popisují následující dva příklady.

13.5 Příklady

13.5.1

Nechť $Y = X^2$. Pak

$$\begin{aligned} G(y) &= P(Y \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = F(\sqrt{y} - F(-\sqrt{y}), \quad y > 0 \\ &= 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad y \leq 0, \end{aligned}$$



Obr. 6: Intervaly $I_j(y)$

a

$$g(y) = \frac{\mathrm{d}G(y)}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}[f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})], \quad y > 0, \qquad (13.5.1)$$
$$g(y) = 0, \qquad y \leq 0.$$

13.5.2

Nechť $Y = |X|$. Pak

$$G(y) = P(-y \leq X \leq y) = F(y) - F(-y), \quad y > 0,$$
$$= 0, \qquad y \leq 0,$$

takže

$$g(y) = f(y) + f(-y), \quad y > 0, \qquad (13.5.2)$$
$$= 0, \qquad y < 0.$$

Např. jestliže

$$f(x) = 1, \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2},$$
$$= 0, \quad \text{jinak},$$

pak veličina $Y = |X|$ má hustotu

$$\begin{aligned} g(y) &= 2, \quad 0 < y < \frac{1}{2} \\ &= 0, \quad \text{jinak.} \end{aligned}$$

13.6 Funkce n náhodných veličin

Nechť n-rozměrná náhodná veličina $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ má sdruženou hustotu pravděpodobnosti $f(x_1, \ldots, x_n)$. Distribuční funkci $G(y)$ náhodné veličiny $Y = h(X_1, \ldots, X_n)$ stanovíme tak, že $f(x_1, \ldots, x_n)$ integrujeme přes obor $h(x_1, \ldots, x_n) \leq y$, tj.

$$g(y) = P(Y \leq y) = \int_{h(x_1,\ldots,x_n)\leq y} \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n. \qquad (13.6.1)$$

V následujícíh příkladech budeme uvažovat tři důležité funkce dvourozměrné náhodné veličiny $\mathbf{X} = (X_1, X_2)'$.

13.7 Příklady

13.7.1

Pro distribuční funkci veličiny $Y = X_1 + X_2$ platí

$$\begin{aligned} G(y) = &\iint_{x_1+x_2\leq y} f(x_1, x_2)\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 = \\ &\int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{y-x_2} f(x_1, x_2)\, \mathrm{d}x_1 \right] \mathrm{d}x_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{y-x_1} f(x_1, x_2)\, \mathrm{d}x_2 \right] \mathrm{d}x_1. \end{aligned}$$

Jsou-li náhodné veličiny X_1 a X_2 nezávislé, tj. platí-li $f(x_1, x_2) = f_1(x_1)$ $f_2(x_2)$ pro všechna reálná x_1 a x_2, je

$$G(y) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(y - x_2) f_2(x_2)\, \mathrm{d}x_2 = \int_{-\infty}^{\infty} F_2(y - x_1) f_1(x_1)\, \mathrm{d}x_1 \qquad (13.7.1)$$

a hustota pravděpodobnosti $g(y) = \frac{\mathrm{d}G(y)}{\mathrm{d}y}$ je rovna

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y - x_2) f_2(x_2)\, \mathrm{d}x_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(y - x_1) f_1(x_1)\, \mathrm{d}x_1. \qquad (13.7.2)$$

13.7.2

Nechť náhodné veličiny X_1 a X_1 jsou nezávislé. Pak náhodná veličina $Y = X_1X_2$ má distribuční funkci

$$
\begin{aligned}
G(y) &= \iint_{x_1x_2\le y} f_1(x_1)f_2(x_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = \\
&= \int_{-\infty}^{0}\left[\int_{\frac{y}{x_2}}^{\infty} f_1(x_1)f_2(x_2)\mathrm{d}x_1\right]\mathrm{d}x_2 + \int_{0}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\frac{y}{x_2}} f_1(x_1)f_2(x_2)\mathrm{d}x_1\right]\mathrm{d}x_2 \\
&= \int_{-\infty}^{0} f_2(x_2)\left[1 - F_1\left(\frac{y}{x_2}\right)\right]\mathrm{d}x_2 + \int_{0}^{\infty} f_2(x_2)F_1\left(\frac{y}{x_2}\right)\mathrm{d}x_2
\end{aligned}
$$

Hustota pravděpodobnosti

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1\left(\frac{y}{x_2}\right)f_2(x_2)\frac{1}{|x_2|}\,\mathrm{d}x_2. \qquad (13.7.3)$$

13.7.3

Nechť veličiny X_1 a X_2 jsou nezávislé, přičemž $f_2(x_2) = 0$ pro $x_2 \le 0$.

Pak náhodná veličina $Y = \frac{X_1}{X_2}$ má distribuční funkci

$$
\begin{aligned}
G(y) &= \iint_{\frac{x_1}{x_2}\le y} f_1(x_1)f_2(x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = \int_{0}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{x_2y} f_1(x_1)f_2(x_2)\mathrm{d}x_1\right]\mathrm{d}x_2 = \\
&= \int_{0}^{\infty} f_2(x_2)F_1(x_2y), \mathrm{d}x_2
\end{aligned}
$$

a hustotu pravděpodobnosti

$$g(y) = \int_{0}^{\infty} y f_1(x_2)f_2(x_2)\,\mathrm{d}x_2. \qquad (13.7.4)$$

13.8 n funkcí n náhodných veličin

Nakonec uvažujme ještě případ, kdy máme n-rozměrnou náhodnou veličinu $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$, která má sdruženou hustotu pravděpodobnosti $f(x_1, \ldots, x_n)$. Hledejme sdruženou hustotu pravděpodobnosti $g(y_1, \ldots, y_n)$ n-rozměrné náhodné veličiny $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)'$, kde

$$Y_j = h_j(X_1, \ldots, X_n), \quad j = 1, \ldots, n. \qquad (13.8.1)$$

Uvažujme případy, kdy transformace vektoru $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)'$ na vektor $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)'$ je jednoznačná, takže existují inverzní funkce

$$x_j = h_j^{-1}(y_1, \ldots, y_n), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{13.8.2}$$

Předpokládejme, že inverzní funkce mají spojité první parciální derivace a že determinant (jakobián)

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1^{-1}}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial h_1^{-1}}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_n^{-1}}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial h_n^{-1}}{\partial y_n} \end{vmatrix} \tag{13.8.3}$$

je nenulový. Pak

$$g(y_1, \ldots, y_n) = f\left[h_1^{-1}(y_1, \ldots, y_n), \ldots, h_n^{-1}(y_1, \ldots, y_n\right]\left|J\right|. \tag{13.8.4}$$

Často lze s výhodou využít toho, že platí

$$\frac{1}{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

13.9 Příklady

13.9.1

Uvažujme případ $n = 2$ a

$$Y_1 = X_1 + X_2, \quad Y_2 = X_2$$

Inverzní funkce jsou $x_1 = y_1 - y_2, x_2 = y_2$ a jakobián

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1}, & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1}, & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & -1 \\ 0, & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Tudíž

$$g(y_1, y_2) = f(y_1 - y_2, y_2).$$

Marginální hustota veličiny $Y_1 = X_1 + X_2$ je

$$g_1(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1 - y_2,\, y_2)\,\mathrm{d}y_2.$$

13.9.2

Mějme dvourozměrnou náhodnou veličinu $\mathbf{X} = (X_1, X_2)'$. Nechť marginální hustota pravděpodobnosti $f_2(x_2) = 0$ pro $x_2 \leq 0$. Stanovme sdruženou hustotu pravděpodobnosti veličin

$$Y_1 = \frac{X_1}{X_2}, \quad Y_2 = X_2.$$

Inverzní funkce jsou $x_1 = y_1 y_2, x_2 = y_2$ a jakobián

$$J = \begin{vmatrix} y_2, & y_1 \\ 0, & 1 \end{vmatrix} = y_2.$$

Tudíž

$$g(y_1, y_2) = f(y_1 y_2, y_2) y_2.$$

Marginální hustota veličiny $Y_1 = \frac{X_1}{X_2}$ je

$$g_1(y_1) = \int_0^\infty y_2\, f(y_1 y_2, y_2)\, \mathrm{d}y_2.$$

13.10 Úlohy

13.10.1

Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení na intervalu $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. Stanovte hustotu pravděpodobnosti veličiny $Y = \mathrm{tg} X$.

$$\left[g(y) = \tfrac{1}{\pi(1+y^2)}, \quad -\infty < y < \infty. \right]$$

13.10.2

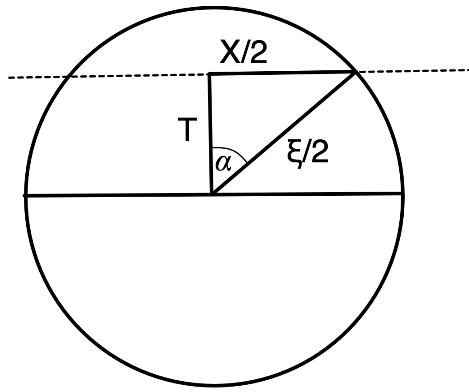
Uvažujme kulovou částici o průměru ξ. Řezná rovina protne tuto částici v kruhu o průměru X. Označme T vzdálenost řezné roviny od středu částice. Nechť T je náhodná veličina mající hustotu pravděpodobnosti $f(t) = \frac{2}{\xi}$, $0 < t < \frac{\xi}{2}$, $f(t) = 0$, jinak.

Stanovte marginální hustoty pravděpodobnosti veličiny X a úhlu α (viz obr. 7).

$$\left[g(x) = \tfrac{x}{\xi\sqrt{\xi^2 - x^2}}, \quad 0 < x < \xi, \quad h(\alpha) = \sin\alpha, \quad 0 < \alpha < \tfrac{\pi}{2}. \right]$$

13.10.3

Stanovte hustotu pravděpodobnosti veličiny $Y = X_1 + X_2$, jestliže X_1 a X_2 jsou nezávislé náhodné veličiny a každá má rovnoměrné rozdělení (9.5.1).



Obr. 7: Řez kulovou částicí

$$\left[\begin{array}{lll} g(y) & = 0, & y \leq 2(\mu - h) \text{ nebo } y \geq 2(\mu + h), \\ & = \frac{y-2(\mu-h)}{4h^2}, & 2(\mu - h) < y \leq 2\mu, \\ & = \frac{2(\mu+h)-y}{4h^2}, & 2\mu \leq y < 2(\mu + h). \end{array}\right]$$

13.10.4

Nechť náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2)'$ má hustotu pravděpodobnosti

$$\begin{array}{rcll} f(x_1, x_2) & = & x_1 \mathrm{e}^{-x_1 - x_2}, & x_1 > 0, \quad x_2 > 0, \\ & = & 0, & \text{jinak.} \end{array}$$

Stanovte hustotu pravděpodobnosti náhodného vektoru $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)'$, kde

$$Y_1 = \frac{X_1}{X_1 + X_2}, Y_2 = X_1 + X_2.$$

Zjistěte, zda Y_1 a Y_2 jsou nezávislé náhodné veličiny.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{array}{lll} [g(y_1, y_2) & = y_1 y_2^2 \mathrm{e}^{-y_2}, & 0 < y_1 < 1, y_2 > 0, \\ & = 0, & \text{jinak.} \end{array} \\ \text{Veličiny } Y_1 \text{ a } Y_2 \text{ jsou nezávislé – platí } g(y_1, y_2) = \\ g_1(y_1)\, g_2(y_2) \text{ pro všechna reálná } y_1 \text{ a } y_2. \end{array}\right]$$

Část IV

Některá důležitá rozdělení

Kapitola 14

Binomické rozdělení

14.1

Náhodná veličina X *binomické rozdělení s parametry* n *a* π, *jestliže*

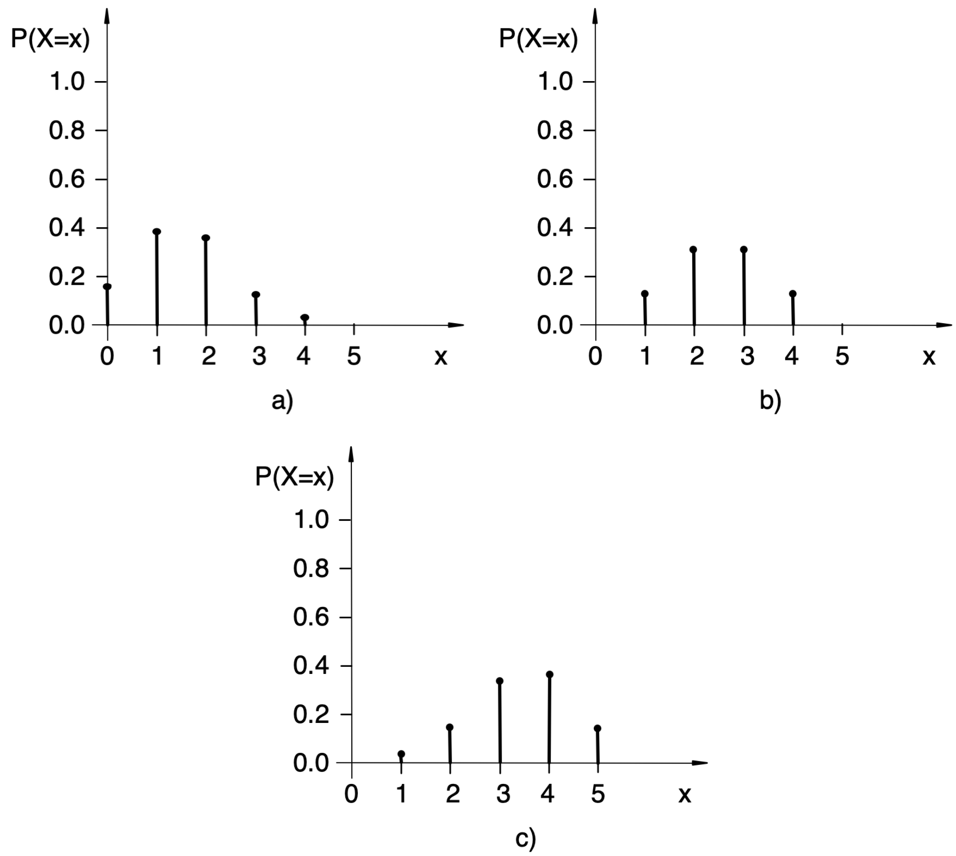
$$\begin{aligned} P(X=x) &= \binom{n}{x}\pi^x(1-\pi)^{n-x}, \quad x=0,1,\ldots,n \\ &= 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{jinak} \end{aligned} \tag{14.1.1}$$

kde n je přirozené číslo a $0 < \pi < 1$. Toto rozdělení budeme dále stručně označovat $\mathrm{Bi}(n,\pi)$. Název rozdělení pochází ze skutečnosti, že výraz (14.1.1) je obecný člen binomického rozvoje $[(1-\pi)+\pi]^n$. Odtud též bezprostředně vyplývá, že

$$\sum_{x=0}^{n} P(X=x) = \sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}\pi^x(1-\pi)^{n-x} = 1.$$

Rozdělením $\mathrm{Bi}(n,\pi)$ se řídí počet výskytů X určitého jevu A v n nezávislých pokusech, jestliže pravděpodobnost výskytu tohoto jevu A v každém jednotlivém pokusu je rovna témuž číslu π. Pravděpodobnost, že v prvních x pokusech nastane jev A, zatímco ve zbývajících $n-x$ pokusech jev A nenastane, je vzhledem k nezávislosti pokusů rovna $\pi^x(1-\pi)^{n-x}$. Počet různých možností, při nichž v n pokusech nastane jev A právě n-krát, je dán kombinačním číslem $\binom{n}{x}$. Tudíž pravděpodobnost, že v n nezávislých pokusech nastane jev A právě x-krát, je dána výrazem (14.1).

Příkladem náhodné veličiny X mající rozdělení $\mathrm{Bi}(n,\pi)$ je počet proražených izolátorů z n nezávisle zkoušených izolátorů, počet úspěšných zkoušek přístroje z n nezávislých zkoušek, počet vadných výrobků z n nezávisle vyrobených výrobků apod.



Obr. 8: Pravděpodobnosti $P(X = x)$ pro binomické rozdělení $\mathrm{Bi}(5, \pi)$; a) $\pi = 0,3$; b) $\pi = 0,5$; c) $\pi = 0,7$.

Uvažujme nyní vztah

$$P(X = x) = P(X = x - 1)\,\frac{n - x + 1}{x}\,\frac{\pi}{1 - \pi}, \quad x = 1, \ldots, n. \qquad (14.1.2)$$

Odtud vyplývá, že $P(X = x) \geq P(X = x - 1)$ pro $x \leq (n + 1)\pi$ a $P(X = x) \geq P(X = x + 1)$ pro $x \geq (n + 1)\pi - 1$. Pro modus $\widehat{x}$ rozdělení $\mathrm{Bi}(n, \pi)$ tedy platí

$$(n + 1)\pi - 1 \leq \widehat{x} \leq (n + 1)\pi. \qquad (14.1.3)$$

Pro $(n+1)\pi < 1$ je $\widehat{x} = 0$, takže v tomto případě pravděpodobnosti $P(X = x)$ klesají s rostoucím x. Je-li $(n+1)\pi \geq 1$, pravděpodobnosti $P(X = x)$ s rostoucím x až do modální hodnoty $\widehat{x}$ určené vztahem a pak klesají. Je-li $(n+1)\pi$ přirozené číslo, má rozdělení dvě modální hodnoty $\widehat{x} = (n+1)\pi - 1$ a $\widehat{x} = (n+1)\pi$. Označíme-li pravděpodobnosti jako $P(X = x|n\pi)$, pak zřejmě

$$P(X = x|n, \pi) = P(X = n - x|n, 1 - \pi), \quad x = 0, 1, \ldots, n. \tag{14.1.4}$$

Pro $\pi = \frac{1}{2}$ tedy platí

$$P\big(X = x|n, \frac{1}{2}\big) = P\big(X = n - x|n, \frac{1}{2}\big), \quad x = 0, 1, \ldots, n,$$

takže rozdělení $\mathrm{Bi}(n, \frac{1}{2})$ je symetrické.

Jelikož vztah $P(X = x|n, \pi) = P(X = n - x|n, \pi)$ platí jen pro $\pi = \frac{1}{2}$, je pro $\pi \neq \frac{1}{2}$ rozdělení $\mathrm{Bi}(n, \pi)$ asymetrické.

Na obr. 8 jsou znázorněny pravděpodobnosti $P(X = x)$ pro rozdělení $\mathrm{Bi}(n, \pi)$ v případech $n = 5$, $\pi = 0,3;\ 0,5$ a $0,7$.

14.2 Alternativní rozdělení

Speciálním případem rozdělení $\mathrm{Bi}(n, \pi)$ je rozdělení $\mathrm{Bi}(1, \pi)$, které nazveme *alternativní rozdělení* a označíme $\mathrm{A}(\pi)$. Pro toto rozdělení platí

$$P(X = x) = \pi^x (1 - \pi)^{1-x}, \quad x = 0, 1, \tag{14.2.1}$$

neboli

$$P(X = 0) = 1 - \pi, \quad P(X = 1) = \pi. \tag{14.2.2}$$

14.3 Distribuční funkce

Distribuční funkce $F(x) = P(X \leq x)$ rozdělení $\mathrm{Bi}(n, \pi)$ je rovna

$$\begin{aligned} F(x) &= 0, & x < 0, \\ &= \sum_{t=0}^{[x]} \binom{n}{t} \pi^t (1 - \pi)^{n-t}, & 0 \leq x < n, \\ &= 1, & x \geq n, \end{aligned} \tag{14.3.1}$$

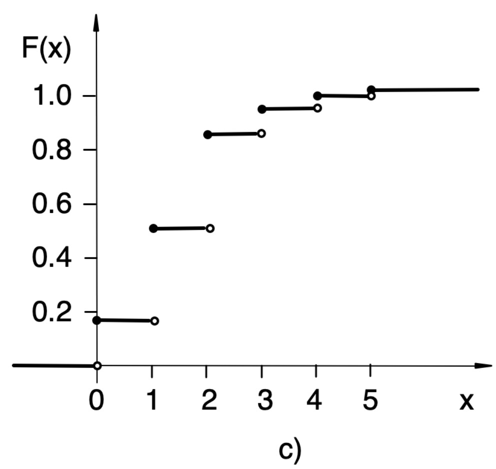
kde $[x]$ značí celou část nezáporného čísla x.

Pro určení hodnot $F(x)$ slouží tabulky; např. v [19] jsou uvedeny hodnoty $F(x)$ pro $n = 2(1)30(5)50, x = 0(1)n$ a $\pi \leq 0,5$. Z těchto tabulek se dají určit též pravděpodobnosti (14.1.1) jako rozdíly

$$P(X = x) = F(x) - F(x-1), \quad x = 0, 1, \ldots, n. \tag{14.3.2}$$

Označíme-li (14.3.1) jako $F(x|\,n, \pi)$, pak vzhledem k (14.1.4) platí pro $x = 0, 1, \ldots, n$

$$\begin{aligned} F(x|\,n,\pi) &= \sum_{t=0}^{x} P(X = t|\,n,\pi) = \sum_{t=0}^{x} P(X = n-t|\,n, 1-\pi) = \qquad (14.3.3) \\ &= \sum_{v=n-x}^{n} P(X = v|\,n, 1-\pi) = 1 - F(n-x-1|\,n, 1-\pi). \end{aligned}$$



Obr. 9: Distribuční funkce binomického rozdělení Bi$(5; 0,3)$.

Tabulek [19] lze tedy použít pro stanovení hodnot distribuční funkce $F(x)$ a pravděpodobností $P(X = x)$ i pro $\pi > 0,5$. Tak např.

$$F(3,2|\,8; 0,9) = F(3|\,8; 0,9) = 1 - F(4|\,8; 0,1) = 0,00043$$

a

$$P(X = 3|\,8; 0,9) = P(X = 4|\,8; 0,1) = F(4|\,8; 0,1) - F(3|\,8; 0,1) = 0,00559$$

Na obr.9 je znázorněna distribuční funkce (14.3.1) pro $n = 5$ a $\pi = 0,3$.

14.4 Momenty

Charakteristická funkce $\Psi_X(t)$ rozdělení $\mathrm{Bi}(n,\pi)$ je dána výrazem

$$\begin{aligned}\Psi_X(t) &= \sum_{x=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} P(X=x) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (\pi \mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^x (1-\pi)^{n-x} = \\ &= (1-\pi+\pi\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^n. \end{aligned} \tag{14.4.1}$$

Použitím vztahů (10.6.5) nalezneme výrazy pro první čtyři obecné momenty a ze vztahů (10.4.6) pak zjistíme, že střední hodnota

$$E(X) = n\pi, \tag{14.4.2}$$

rozptyl

$$\mathrm{var}(X) = n\pi(1-\pi) \tag{14.4.3}$$

koeficient šikmosti

$$\alpha_3(X) = \frac{1-2\pi}{\left[n\pi(1-\pi)\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{14.4.4}$$

a koeficient špičatosti

$$\alpha_4(X) = \frac{1-6\pi(1-\pi)}{n\pi(1-\pi)} \tag{14.4.5}$$

Pro $\pi = 1/2$ je $\mathrm{var}(X) = n/4,\ \alpha_3(X) = 0$ a $\alpha_4(X) = -2/n$.

Speciálně pro rozdělení $\mathrm{A}(\pi)$ je $\mathrm{d}^r\Psi_X(t)/\mathrm{d}t^r = \pi\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, takže $\mu_r'(X) = \pi,\ r = 1, 2, \ldots$. Tudíž pro rozdělení $\mathrm{A}(\pi)$ je

$$E(X) = \pi, \quad \mathrm{var}(X) = \pi(1-\pi). \tag{14.4.6}$$

14.5 Rozdělení součtu nezávislých veličin

Nechť náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_k$ jsou vzájemně nezávislé, přičemž veličina X_j má rozdělení $Bi(n_j,\pi), j = 1, \ldots, k \geq 2$ (tzn. všechny veličiny X_j mají binomické rozdělení s týmž parametrem π). Pak náhodná veličina $X = \sum_{j=1}^{k} X_j$ má rozdělení $Bi(\sum_{j=1}^{k} n_j, \pi)$.

D ů k a z. Náhodná veličina $X = \sum_{j=1}^{k} X_j$ má vzhledem k (12.4.17) a (14.4.1) charakteristickou funkci

$$\Psi_X(t) = \prod_{j=1}^{k} \Psi_{X_j}(t) = \prod_{j=1}^{k} (1-\pi+\pi\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^{nj} = (1-\pi+\pi\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^{\sum_{j=1}^{k} n_j},$$

což je charakteristická funkce rozdělení $\mathrm{Bi}(\sum_{j=1}^{k} n_j, \pi)$. Protože charakteristická funkce jednoznačně určuje distribuční funkci, má veličina X rozdělení $\mathrm{Bi}(\sum_{j=1}^{k} n_j, \pi)$.

Speciální případ nastává, když $k = n$ a $n_j = 1, j = 1, \ldots, n$. Odtud vyplývá, že binomické rozdělení $\mathrm{Bi}(n, \pi)$ je rozdělením součtu n vzájemně nezávislých náhodných veličin, z nichž má každá alternativní rozdělení s týmž parametrem π.

14.6 Podmíněné rozdělení

Mějme dvě nezávislé náhodné veličiny X_1 a X_2, přičemž X_1 má rozdělení $\mathrm{Bi}(n_1, \pi)$ a X_2 rozdělení $\mathrm{Bi}(n_2, \pi)$. Potom pro rozdělení X_1 podmíněné $X_1 + X_2 = x$ platí

$$\begin{aligned} P(X_1 = x_1 | X_1 + X_2 = x) &= \\ &= \frac{\binom{n_1}{x_1}\pi^{x_1}(1-\pi)^{n_1-x_1}\binom{n_2}{x-x_1}\pi^{x-x_1}(1-\pi)^{n_2-(x-x_1)}}{\binom{n_1+n_2}{x}\pi^{x}(1-\pi)^{n_1+n_2-x}} = \frac{\binom{n_1}{x_1}\binom{n_2}{x-x_1}}{\binom{n_1+n_2}{x}}, \\ &\max(0, x-n_2) \le x_1 \le \min(n_1, x), \end{aligned} \tag{14.6.1}$$

což je hypergeometrické rozdělení (viz dále článek 16) s parametry $N = n_1 + n_2, M = n_1, n = x$.

14.7 Příklady

14.7.1

Uvažujme náhodnou veličinu $P = \frac{X}{n}$, kde X má rozdělení $\mathrm{Bi}(n, \pi)$. Veličina P představuje relativní četnost výskytu jevu A v n nezávislých pokusech, jestliže pravděpodobnost výskytu jevu A v každém jednotlivém pokusu je rovna π. Z (14.4.2) a (14.4.3) a ze vztahů (10.4.8) a (10.4.9) vyplývá, že

$$E(P) = \pi, \quad \mathrm{var}(P) = \frac{\pi(1-\pi)}{n}. \tag{14.7.1}$$

Protože pro $0 < \pi < 1$ je $0 < \pi(1-\pi) \le \frac{1}{4}$, je $\mathrm{var}(P) \le \frac{1}{4n}$.

14.7.2

Mějme systém obsahující n stejných prvků. Nechť systém je provozuschopný, pracuje-li aspoň r prvků. Předpokládá se, že každý z prvků pracuje nezávisle na ostatních a že jeho životnost má totéž spojité rozdělení pravděpodobnosti. Pravděpodobnost, že systém je provozuschopný v dané době T od zahájení provozu, je dána výrazem

$$\sum_{x=r}^{n} \binom{n}{x} \pi^x (1-\pi)^{n-x} = 1 - F(r-1|\, n, \pi),$$

kde $\pi = 1 - G(T)$, přičemž $G(.)$ je distribuční funkce životnosti každého z n prvků systému. Např. pro $n = 10, r = 4, T = 100 hodin$ a $\pi = 1 - G(100) = 0,3$ je pravděpodobnost, že systém je provozuschopný po době $T = 100$, rovna

$$\sum_{x=4}^{10} \binom{10}{x} (0,3)^x (0,7)^{10-x} = 1 - F(3|\, 10; 0,3) = 0,35039.$$

14.7.3

Uvažujme nezávislé pokusy, z nichž v každém pravděpodobnost výskytu jevu A je rovna témuž číslu π. Stanovme počet pokusů n nutný k tomu, aby pravděpodobnost, že jev A nastane aspoň c-krát, byla alespoň P (pro daná π, c a P, $0 < \pi < 1$, $c \geq 1$,
$0 < P < 1$).

Hledáme tedy n, pro které

$$\sum_{x=c}^{n} \binom{n}{x} \pi^x (1-\pi)^{n-x} \geq P$$

neboli pro které

$$F(c-1|\, n, \pi) \leq 1 - P.$$

Např. pro $\pi = 0,2;\ c = 3;\ P = 0,9$ nalezneme z tabulek [19], že

$$F(2|\, n; 0,2) \leq 0,1 \quad \text{pro} \quad n \geq 25.$$

Pro $c = 1$ je $F(0|\, n, \pi) = (1-\pi)^n$, takže

$$n \geq \frac{\log(1-P)}{\log(1-\pi)}.$$

Např. pro $\pi = 0,2,\ c = 1,\ P = 0,9$ je $n \geq \frac{\log(0,1)}{\log(0,8)} = 10,32$, tj. $n \geq 11$.

14.8 Negativní binomické rozdělení

Náhodná veličina X má *negativní binomické rozdělení* s parametry n a π, $n > 0$, $0 < \pi < 1$, jestliže

$$P(X = x) = \frac{\Gamma(n+x)}{x!\Gamma(n)}\,\pi^n(1-\pi)^x, \quad x = 0, 1, \ldots. \tag{14.8.1}$$

Název pochází z toho, že (14.8.1) je obecný člen rozvoje funkce

$$\pi^n\bigl[1-(1-\pi)\bigr]^{-n}.$$

Odtud vyplývá, že

$$\sum_{x=\infty} P(X = x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+x)}{x!\Gamma(n)}\pi^n(1-\pi)^x = 1.$$

Pro celočíselné hodnoty parametru n je

$$\frac{\Gamma(n+x)}{x!\Gamma(n)} = \frac{(n+x-1)!}{x!(n-1)!} = \binom{n+x-1}{x}$$

a náhodnou veličinu X a pravděpodobnosti $P(X = x)$ lze interpretovat takto: Uvažujme posloupnost nezávislých pokusů, přičemž v každém pokusu pravděpodobnost úspěchu (tj. nastání sledovaného jevu A) je rovna témuž číslu π. Označme X počet neúspěšných pokusů předcházejících n-tému úspěšnému pokusu. Potom pravděpodobnost $P(X = x) = P_1P_2$, kde P_1 značí pravděpodobnost, že z prvních $n - x + 1$ pokusů je jich právě x neúspěšných a $n - 1$ úspěšných, a P_2 je pravděpodobnost, že $(n + x)$-tý pokus je úspěšný. Zřejmě

$$P_1 = \binom{n+x-1}{x}\pi^{n-1}(1-\pi)^x, \quad P_2 = \pi.$$

Pro $n = 1$ vyplývá z (14.8.1), že

$$P(X = x) = \pi(1-\pi)^x, x = 0, 1, \ldots. \tag{14.8.2}$$

Tento speciální případ negativního binomického rozdělení se nazývá *geometrické rozdělení* $\bigl[$neboť pravděpodobnosti $P(X = x)$ tvoří geometrickou posloupnost a_1q^x s $a_1 = \pi$, $q = 1-\pi\bigr]$. V tomto případě $P(X = x)$ vyjadřuje pravděpodobnost, že první úspěch nastane právě v $(x + 1)$-vém pokusu.

Jelikož pro negativní binomické rozdělení je

$$P(X = x) = P(X = x-1)\frac{n+x-1}{x}(1-\pi), \quad x = 1, 2, \ldots, \tag{14.8.3}$$

platí pro modus $\widehat{x}$ tohoto rozdělení

$$a - 1 \le \widehat{a} \le a, \tag{14.8.4}$$

kde

$$a = \frac{(n-1)(1-\pi)}{\pi}. \tag{14.8.5}$$

Pro $a < 1$ je $\widehat{x} = 0$; speciálně to platí pro geometrické rozdělení. Je-li a přirozené číslo, platí $P(X = a-1) = P(X = a)$. Není-li a přirozené číslo, je rozdělení jednovrcholové (tj. rozdělení má jediný modus $\widehat{x}$).

Pro n přirozené platí

$$\sum_{t=0}^{x} \binom{n+t-1}{t} \pi^n (1-\pi)^t = 1 - \sum_{v=0}^{n-1} \binom{n+x}{v} \pi^v (1-\pi)^{n+x-v}, \quad x = 0, 1, \ldots, \tag{14.8.6}$$

neboť jev „nejvýš $n+x$ nezávislých pokusů je zapotřebí k dosažení n úspěchů“ je ekvivalentní jevu „z $n+x$ nezávislých pokusů je jich aspoň n úspěšných“.

Lze tedy pro přirozené n určit hodnoty distribuční funkce negativního binomického rozdělení z tabulek distribuční funkce rozdělení $\mathrm{Bi}(n+x, \pi)$. Např. pro $n = 3,\ \pi = 0,2$ a $x = 5$ je

$$\sum_{t=0}^{5} \binom{3+t-1}{t} (0,2)^3 \cdot (0,8)^t = 1 - \sum_{v=0}^{2} \binom{8}{v} (0,2)^v \cdot (0,8)^{8-v} = 0,20308.$$

Charakteristická funkce negativního binomického rozdělení

$$\Psi_X(t) = \sum_{x=0}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} P(X = x) = \pi^n \big[1 - (1-\pi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\big]^{-n}. \tag{14.8.7}$$

Odtud dostáváme

$$E(X) = \frac{n(1-\pi)}{\pi}, \quad \mathrm{var}(X) = \frac{n(1-\pi)}{\pi^2}, \tag{14.8.8}$$

takže $\mathrm{var}(X) > E(X)$.

14.9 Příklady

14.9.1

Uvažujme situaci, kdy se nějaké zařízení kontroluje v pravidelných časových intervalech. Přitom nechť pravděpodobnost poruchy v každém intervalu je π a výskyt poruchy v každém intervalu nezávisí na průběhu činnosti v předcházejících intervalech (porucha je takového druhu, že je odhalena jedině kontrolou). Pak pravděpodobnost, že porucha bude zjištěna poprvé při $(x+1)$-vé kontrole, je rovna $(1-\pi)^x\pi,\ x=0,1,\ldots$.

14.9.2

Nechť náhodné veličiny $X_1,\ldots,X_k$ jsou vzájemně nezávislé, přičemž veličiny X_j má negativní binomické rozdělení s parametry n_j a $\pi, j=1,\ldots,k\geq 2$.

Stanovte rozdělení náhodné veličiny $X=\sum_{j=1}^k X_j$.

Náhodná veličina X má charakteristickou funkci

$$\Psi_X(t)=\prod_{j=1}^k \Psi_{X_j}(t)=\prod_{j=1}^k \pi^{n_j}\left[1-(1-\pi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right]^{-n_j}=\pi^{\sum_{j=1}^k n_j}\left[1-(1-\pi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right]^{-\sum_{j=1}^k n_j}.$$

Tudíž veličina $X=\sum_{j=1}^k X_j$ má negativní binomické rozdělení s parametry $\sum_{j=1}^k n_j$ a π.

Speciálně pak vyplývá, že pro přirozené n je negativní binomické rozdělení rozdělením součtu n vzájemně nezávislých náhodných veličin, z nichž každá má geometrické rozdělení s týmž parametrem π.

14.9.3

Mějme dodávku výrobků s podílem π zmetků. Vybírejme z dodávky náhodně (s vracením) po jednom výrobku, dokud nedostaneme předem daný počet n zmetků. Dodávku přijmeme, je-li počet vybraných výrobků větší než dané číslo $k\geq$. Stanovme pravděpodobnost přijetí dodávky. Označme X počet vybraných dobrých výrobků před vybráním n-tého zmetku. Pak pravděpodobnost přijetí dodávky je rovna

$$P(X+n>k) = 1 - P(X \le k-n) = \\ 1 - \sum_{t=0}^{n-k} \binom{n+x-1}{t} \pi^n (1-\pi)^t = \sum_{v=0}^{n-1} \binom{k}{v} \pi^v (1-\pi)^{k-v}. \quad (14.9.1)$$

Poslední výraz vyplývá ze vztahu (14.8.6). Následující tabulka uvádí pravděpodobnosti (14.9.1) pro $n = 2, k = 40$ a některé hodnoty π:

π	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
$P(X > 38)$	$0,939\,3$	$0,809\,5$	$0,661\,5$	$0,521\,0$	$0,399\,1$	$0,299\,0$

14.10 Úlohy

14.10.1

Stanovte z tabulek hodnoty D a H takové, že

$$P(X =\le D) \le \alpha, \quad P(X \le D+1) > \alpha$$

a

$$P(X \ge H) \le \beta, \quad P(X \ge H-1) > \beta,$$

má-li veličina X rozdělení $\mathrm{Bi}(n, \pi)$. Uvažujte případy:

a) $n = 10;\ \pi = 0,3;\ \alpha = 0,1;\ \beta = 0,05;$
b) $n = 18;\ \pi = 0,5;\ \alpha = \beta = 0,025;$
c) $n = 30;\ \pi = 0,8;\ \alpha = 0,05;\ \beta = 0,01.$

[a) $D = 0,\ H = 6$; b) $D = 4,\ H = 14$; c) $D = 19,\ H = 30$]

14.10.2

Uvažujte n vzájemně nezávislých náhodných veličin $X_1, \ldots, X_n$ majících tutéž distribuční funkci $F(x)$.

Stanovte rozdělení, střední hodnotu a rozptyl veličiny $\frac{Y}{n}$, kde Y je počet náhodných veličin nabývajících hodnot $y \le a$, kde a je dané reálné číslo.

$$\Big[Y \text{ má rozdělení } Bi(n,\pi) \text{ s } \pi = F(a), E(\tfrac{Y}{n}) = F(a), \mathrm{var}(\tfrac{Y}{n}) = \tfrac{F(a)\big(1-F(A)\big)}{n}. \Big]$$

14.10.3

Ukažte, že pro obecné, příp. centrální momenty rozdělení $\mathrm{Bi}(n, \pi)$ platí rekurentní vztahy

$$\mu'_{r+1}(X) = n\pi\mu'_r(X) + \pi(1-\pi)\frac{\mathrm{d}\mu'_r(X)}{\mathrm{d}\pi}, \quad r = 0, 1, \dots,$$

příp.

$$\mu_{r+1}(X) = \pi(1-\pi)\left[nr\mu_{r-1}(X) + \frac{\mathrm{d}\mu_r(X)}{\mathrm{d}\pi}\right], \quad r = 0, 1, \dots.$$

[Vyjděte z derivací $\frac{\mathrm{d}\mu'_r(X)}{\mathrm{d}\pi}$, případně $\frac{\mathrm{d}\mu_r(X)}{\mathrm{d}\pi}$.]

14.10.4

Vyjádřete distribuční funkci geometrického rozdělení.

$$\left[\begin{array}{ll} F(x) = 0, & x < 0, \\ \quad\quad = 1 - (1-\pi)^{[x+1]}, & x \geq 0, \\ \multicolumn{2}{l}{\text{kde } [x+1] \text{ značí celou část nezáporného čísla } x+1} \end{array}\right]$$

14.10.5

Ukažte, že v případě geometrického rozdělení platí pro každé $k = 0, 1, \dots$

$$P(X = k + x | X \geq k) = P(X = x), \quad x = 0, 1, \dots.$$

Kapitola 15

Poissonovo rozdělení

15.1

Náhodná veličina X má *Poissonovo rozdělení s parametrem* $\lambda > 0$, jestliže

$$\begin{aligned} P(X = x) &= \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, \dots, \\ &= 0, \quad \text{jinak.} \end{aligned} \tag{15.1.1}$$

Toto rozdělení označíme symbolem $\mathrm{Po}(\lambda)$. Zřejmě

$$\sum_{x=0}^{\infty} P(X = x) = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda} = 1.$$

Poissonovým rozdělením se řídí často počet částic (např. počet částic v zorném poli mikroskopu) v jednotce plochy nebo objemu nebo počet událostí (např. počet signálů v telefonní ústředně nebo počet poruch zařízení) v časové jednotce. Jak ukážeme dále, dá se rozdělením $\mathrm{Po}(\lambda)$ aproximovat rozdělením $\mathrm{Bi}(n, \pi)$ pro velká n a malá π.

Jelikož

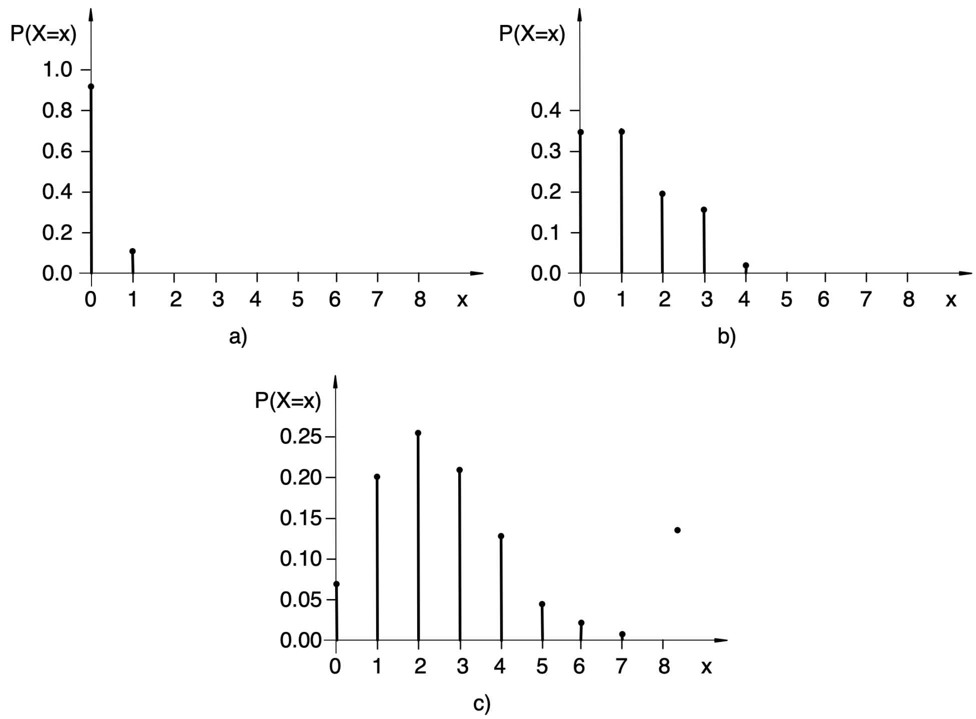
$$P(X = x) = P(X = x - 1)\frac{\lambda}{x}, x = 1, 2, \dots, \tag{15.1.2}$$

platí pro modus $\hat{x}$ rozdělení $Po(\lambda)$

$$\lambda - 1 \le \hat{x} \le \lambda. \tag{15.1.3}$$

Je-li λ přirozené číslo, platí $P(X = \lambda - 1) = P(X = \lambda) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^\lambda}{\lambda!}$, není-li λ přirozené číslo, je rozdělení jednovrcholové. Pro $\lambda < 1$ má rozdělení modus $\hat{x} = 0$.

Na obr. 10 jsou znázorněna rozdělení Po(λ) pro $\lambda = 0,1; 1$ a $2,5$.



Obr. 10: Pravděpodobnosti $P(X = x)$ pro Poissonovo rozdělení Po(λ);
a) $\lambda = 0,1$;   b) $\lambda = 1$;   c) $\lambda = 2,5$.

15.2 Distribuční funkce

Pro distribuční funkci rozdělení Po(λ) platí

$$\begin{aligned} F(x) &= 0, & x &< 0, \\ F(x) &= \sum_{t=0}^{[x]} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^t}{t!}, & x &\geq 0, \end{aligned} \tag{15.2.1}$$

kde $[x]$ je celá část nezáporného čísla x.

Tabulky [19] obsahují hodnoty $F(x)$ pro

$$\lambda = 0,001\ (0,001)\ 0,005\ (0,005)\ 0,1\ (0,1)\ 15.$$

Z těchto tabulek se dají též určit pravděpodobnosti (15.1.1) pomocí vztahu

$$P(X = x) = F(x) - F(x-1), x = 0, 1, \ldots. \tag{15.2.2}$$

Tak např. pro $\lambda = 3,5$ je

$$P(X = 3) = F(3) - F(2) = 0,536\,633 - 0,320\,847 = 0,215\,786$$

a

$$P(X = 0) = F(0) = 0,030\,197.$$

15.3 Momenty

Charakteristická funkce je

$$\Psi_X(t) = \sum_{x=0}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}(\lambda\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^x\frac{1}{x!} = \mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-1)}. \tag{15.3.1}$$

Odtud dostáváme

$$E(X) = \lambda, \tag{15.3.2}$$

$$\mathrm{var}(X) = \lambda, \tag{15.3.3}$$

$$\alpha_3(X) = \lambda^{-\frac{1}{2}}, \qquad \alpha_4(X) = \lambda^{-1}. \tag{15.3.4}$$

Pro rozdělení $\mathrm{Po}(\lambda)$ s libovolným parametrem $\lambda > 0$ tedy vždy platí

$$E(X) = \mathrm{var}(X) = \lambda. \tag{15.3.5}$$

15.4 Rozdělení součtu nezávislých veličin

Mějme $k \geq 2$ náhodných veličin $X_1, \ldots, X_k$, které jsou vzájemně nezávislé, přičemž veličina X_j má rozdělení $Po(\lambda_j), j = 1, \ldots, k$. Pak náhodná veličina $X = \sum_{j=1}^{k} X_j$ má rozdělení $Po\big(\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\big)$.

Důkaz. Náhodná veličina X má charakteristickou funkci

$$\Psi_X(t) = \prod_{j=1}^{k}\exp\Big[\lambda_j\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-1\big)\Big] = \exp\Big[\big(\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\big)\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-1\big)\Big],$$

což je charakteristická funkce rozdělení $\mathrm{Po}\big(\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\big)$.

15.5 Podmíněné rozdělení

Mějme dvě nezávislé náhodné veličiny X_1 a X_2, přičemž X_1 má rozdělení $\mathrm{Po}(\lambda_1)$ a X_2 má rozdělení $\mathrm{Po}(\lambda_2)$. Potom pro rozdělení X_1 podmíněné $X_1 + X_2 = x$ platí

$$P(X_1 = x_1 | X_1 + X_2 = x) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda_1 \frac{\lambda_1^{x_1}}{x_1!}} \mathrm{e}^{-\lambda_2 \frac{\lambda_2^{x-x_1}}{(x-x_1)!}}}{\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^x}{x!}} = \binom{x}{x_1} \pi^x (1-\pi)^{x-x_1},$$

$$x_1 = 0, 1, \dots, x, \quad (15.5.1)$$

kde

$$\pi = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \tag{15.5.2}$$

tzn. že podmíněným rozdělením veličiny X_1 pro danou hodnotu x součtu $X_1 + X_2$ je rozdělení $\mathrm{Bi}(x, \pi)$ s parametrem π daným výrazem (15.5.2).

15.6 Aproximace binomického rozdělení rozdělením Poissonovým

Uvažujme posloupnost $\{X_n\}$ náhodných veličin, přičemž veličina X_n má rozdělení $Bi(n, \pi_n)$, $n = 1, 2, \dots$. Nechť $\pi_n \to 0$ pro $n \to \infty$ a přitom $n\pi_n \to \lambda$, kde λ je pevné kladné číslo. Pak

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{x} \pi_n^x (1-\pi_n)^{n-x} = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \qquad x = 0, 1, \dots.$$

Důkaz. Protože $\pi_n = \frac{\lambda}{n} + z_n$, kde $\lim_{n\to\infty} n z_n = 0$, lze charakteristickou funkci (14.4.1) rozdělení $\mathrm{Bi}(n, \pi_n$ přepsat na tvar

$$\Psi_{X_n}(t) = \left[1 - \frac{\lambda}{n} - z_n + \left(\frac{\lambda}{n} + z_n\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right]^n = \left[1 + \frac{\lambda}{n}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - 1\right) + \frac{n z_n}{n}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - 1\right)^n\right].$$

Tudíž

$$\lim_{n\to\infty} \Psi_{X_n}(t) = \exp\left[\lambda(e^{it} - 1)\right]$$

a z limitní věty pro charakteristické funkce vyplývá, že limitním rozdělením binomického rozdělení je rozdělení Poissonovo s parametrem $\lambda = \lim_{n\to\infty} n\pi_n$.

Často se doporučuje aproximovat rozdělení $\mathrm{Bi}(n, \pi)$ rozdělením $\mathrm{Po}(n\pi)$ pro $\pi < 0{,}1$ a $n > 30$.

15.7 Příklady

15.7.1

Porovnejmě hodnoty $P(X = x)$ pro rozdělení $Bi(n, \pi)$ a $Po(n\pi)$ v případě $n = 30$ a $\pi = 0,1$. Z tabulek [17] nalezneme tyto hodnoty pravděpodobností $P(X = x)$:

x	0	1	2	3	4	5
Bi(30; 0,1)	0,0424	0,1413	0,2276	0,2361	0,1771	0,1023
Po(3)	0,0498	0,1494	0,2240	0,2240	0,1680	0,1008
x	6	7	8	9	10	
Bi(30; 0,1)	0,0474	0,0181	0,0058	0,0016	0,0004	
Po(3)	0,0504	0,0216	0,0081	0,0027	0,0008	

15.7.2

Při automatické výrobě je pravděpodobnost, že za předepsaných výrobních podmínek bude vyroben vadný výrobek, rovna π. Jaká je pravděpodobnost, že mezi n vyrobenými výrobky bude nejvýš c výrobků vadných? (Obecně a pro $\pi = 0,01,\ n = 100,\ c = 2$.)

Pro malé π a velké n se dá tato pravděpodobnost vyjádřit ve tvaru

$$P(X \leq c) = \sum_{x=0}^{c} \binom{n}{x} \pi^x (1-\pi)^{n-x} \doteq \sum_{x=0}^{c} e^{-n\pi} \frac{(n\pi)^x}{x!}.$$

Pro náš případ je $n\pi = 1$, takže

$$P(X \leq 2) \doteq \sum_{x=0}^{2} e^{-1} \frac{1}{x!} = 0,9197.$$

15.8 Úlohy

15.8.1

Stanovte z tabulek hodnoty D a H definované stejným způsobem jako v úloze 14.10.1, jestliže veličina X má rozdělení Po(λ). Uvažujte případy:

a) $\lambda = 3;\ \alpha = 0,1;\ \beta = 0,05$

b) $\lambda = 9;\ \alpha = \beta = 0,025.$

[a) $D = 0,\ H = 7;$ b) $D = 3,\ H = 16.$]

15.8.2

Ukažte, že pro obecné a centrální momenty rozdělení $Po(\lambda)$ platí rekurentní vztahy

$$\begin{aligned} \mu'_{r+1}(X) &= \lambda\Big[\mu'_r(X) + \frac{\mathrm{d}\mu'_r(X)}{\mathrm{d}\lambda}\Big], \qquad r = 0, 1, \ldots, \\ \mu_r(X) &= \lambda\Big[r\mu_{r-1}(X) + \frac{\mathrm{d}\mu_r(X)}{\mathrm{d}\lambda}\Big], \qquad r = 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

Pomocí těchto vztahů zkontrolujte výrazy (15.3.2) až (15.3.4).

$\big[$Vyjděte z derivací $\frac{\mathrm{d}\mu'_r(X)}{\mathrm{d}\lambda}$, případně $\frac{\mathrm{d}\mu_r(X)}{\mathrm{d}\lambda}$.$\big]$

15.8.3

Stanovte střední hodnotu veličiny $\frac{1}{(X+1)}$, má-li X rozdělení Po(λ).

$\big[\frac{1}{\lambda}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}).\big]$

Kapitola 16

Hypergeometrické rozdělení

16.1

Náhodná veličina X má *hypergeometrické rozdělení s parametry* N, M, n, jestliže

$$\begin{aligned} P(X = x) &= \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{x}}, \quad x = \max(0, M - N + n), \dots, \min(M, n), \\ &= 0, \qquad\qquad\quad \text{jinak.} \end{aligned} \tag{16.1.1}$$

Přitom N, M a n jsou přirozená čísla, $1 \leq n < N,\ 1 \leq M < N$. Mějme konečný soubor N jednotek (např. výrobků), z nichž M jednotek má sledovanou vlastnost A (např. „výrobek je zmetek“). Z tohoto souboru vybereme náhodně najednou nebo postupně (bez vracení) n jednotek. Nechť X značí počet vybraných jednotek vykazujících sledovanou vlastnost A. Pak pravděpodobnosti $P(X = x)$ pro tuto náhodnou veličinu jsou dány výrazy (16.1.1).

V tabulkách [19] jsou uvedeny hodnoty pravděpodobností $P(X = x)$ pro $N = 2$ (1) 15. Podrobné tabulky obsahuje práce [18].

Protože

$$P(X = x) = P(X = x - 1)\frac{(n - x + 1)(M - x + 1)}{x(N - M - n + x)},$$
$$x = \max(1, M - N + n + 1), \dots, \min(M, n), \tag{16.1.2}$$

platí pro modus $\hat{x}$ hypergeometrického rozdělení

$$a - 1 \leq \hat{x} \leq a \tag{16.1.3}$$

kde

$$a = \frac{(M+1)(n+1)}{N+2} \tag{16.1.4}$$

Pro $a < 1$ je $\hat{x} = 0$. Je-li a přirozené číslo, má rozdělení dvě modální hodnoty $\hat{x} = a - 1$ a $\hat{x} = a$. Není-li a přirozené číslo, je rozdělení jednovrcholové.

16.2 Momenty

Pro určení momentů hypergeometrického rozdělení uvažujme výraz

$$\begin{aligned}
&x(x-1)\dots(x-r+1)\frac{M!}{x!(M-x)!}\frac{N!(N-n)!}{N!} = \\
&\quad = n(n-1)\dots(n-r+1)\frac{M(M-1)\dots(M-r+1)}{N(N-1)\dots(N-r+1)}\frac{\binom{M-r}{x-r}}{\binom{N-r}{n-r}} \\
&\qquad = K(N,M,n,r)\frac{\binom{M-r}{x-r}}{\binom{N-r}{n-r}}, \quad x \geq r.
\end{aligned}$$

Potom střední hodnota

$$\begin{aligned}
&E[X(X-1)\dots(X-r+1)] = \\
&\quad = \sum_{x=\max(0,M-N+n)}^{\min M,n} x(x-1)\dots(x-r+1)\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N-r}{n-r}} \\
&\quad = K(N,M,n,r) \sum_{x=\max(r,M-N+n)}^{\min M,n} \frac{\binom{M-r}{x-r}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N-r}{n-r}} = \\
&\quad = K(N,M,n,r) \sum_{t=\max(0,M-N+n-r)}^{\min M-r,n-r} \frac{\binom{M-r}{t}\binom{N-M}{n-r-t}}{\binom{N-r}{n-r}} = K(N,M,n,r).
\end{aligned}$$

Odtud

$$E(X) = n\frac{M}{N}, \tag{16.2.1}$$

$$\mu_2'(X) = E\big[X(X-1)\big] + E(X) = n\frac{M}{N}\,\frac{nM - n + N - M}{N-1}, \tag{16.2.2}$$

takže

$$\operatorname{var}(X) = \mu_2'(X) - n^2\frac{M^2}{N^2} = n\frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}. \tag{16.2.3}$$

Označíme-li $\pi = \frac{M}{N}$, pak střední hodnota hypergeometrického rozdělení je stejná jako střední hodnota rozdělení $\mathrm{Bi}(n, \pi)$, zatímco rozptyl hypergeometrického rozdělení je roven rozptylu rozdělení $\mathrm{Bi}(n, \pi)$ násobenému výrazem

$$\frac{N-n}{N-1} = 1 - \frac{n}{N} + \frac{N-n}{N(N-1)}.$$

16.3 Aproximace hypergeometrického rozdělení rozdělením binomickým a rozdělením Poissonovým

Vyjádřeme pravděpodobnosti (16.1.1) ve tvaru

$$\begin{aligned} P(X = x) = {} & \binom{n}{x} M(M-1)\dots(M-x+1) \times \\ & \times \frac{(N-M)(N-M-1)\dots(N-M-n+x+1)}{N(N-1)\dots(N-n+1)} \\ = {} & \binom{n}{x} \frac{\frac{M}{N}\left(\frac{M}{N}-\frac{1}{N}\right)\dots\left(\frac{M}{N}-\frac{x-1}{N}\right)\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(1-\frac{M}{N}-\frac{1}{N}\right)\dots\left(1-\frac{M}{N}-\frac{n-x-1}{N}\right)}{\left(1-\frac{1}{N}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{N}\right)} \end{aligned}$$

Odtud je vidět, že pro malá $\frac{n}{N}$ (řekněme $\frac{n}{M} < 0,1$) lze hypergeometrické rozdělení (16.1.1) aproximovat binomickým rozdělením s parametry n a $\pi = \frac{M}{N}$.

Dále z odst. 15.6 vyplývá, že je-li $\frac{n}{N}$ malé, $\frac{M}{N}$ malé a n velké (řekněme $\frac{n}{N} < 0,1$; $\frac{M}{N} < 0,1$ a $n > 30$), lze hypergeometrické rozdělení (16.1.1) aproximovat Poissonovým rozdělením s parametrem $\lambda = \frac{nM}{N}$.

Pro ilustraci porovnává následující tabulka pravděpodobnosti $P(X = x)$ těchto tří rozdělení pro $N = 50$, $M = 2$, $n = 5$, (takže $\pi = 0,04$ a $\lambda = 0,2$; přitom $\frac{n}{N} = 0,1$ a n je podstatně menší než 30, takže podmínky pro aproximaci jsou nepříznivé; při vyšších hodnotách n je aproximace podstatně lepší).

x	0	1	2
Hypergeometrické rozdělení	0,808 2	0,183 7	0,008 2
Binomické rozdělení	0,815 4	0,169 9	0,008 8
Poissonovi rozdělení	0,818 7	0,163 7	0,016 4

Význam těchto aproximací spočívá v tom, že při výpočtu pravděpodobností (16.1.1) můžeme tyto výrazy nahradit jednoduššími výrazy (14.1.1), příp. (15.1.1). Přitom počet parametrů, na nichž pravděpodobnosti závisí, se sníží ze tří parametrů N, M, n na dva parametry n a π, příp. na jeden parametr λ.

16.4 Příklady

16.4.1

Uvažujme dodávku N kusových výrobků, z nichž $N\pi$ výrobků je zmetkových (π je neznámé číslo). Rozhodnutí o tom, zda dodávku přijmeme či zamítneme, učiníme na základě tohoto postupu: Z dodávky vybereme náhodně (bez vracení) n výrobků a zjistíme počet zmetků X mezi těmito n vybranými výrobky. Dodávku přijímáme, je-li $X \leq c$, kde c je zvolené celé nezáporné (tzv. rozhodné) číslo, jinak dodávku zamítáme. Zajímá nás, s jakou pravděpodobností na základě tohoto postupu přijmeme dodávku s podílem zmetků π.

Tato pravděpodobnost je dána výrazem

$$P(X \leq c) = \sum_{x=0}^{c} \frac{\binom{N\pi}{x}\binom{N-N\pi}{n-x}}{\binom{N}{n}} \tag{16.4.1}$$

Jsou-li splněny předpoklady pro aproximaci hypergeometrického rozdělení Poissonovým rozdělením, pak

$$P(X \leq c) \doteq \sum_{x=0}^{c} e^{-n\pi}\frac{(n\pi)^x}{x!} \tag{16.4.2}$$

Následující tabulka uvádí pravděpodobnosti (16.4.2) pro případ $n = 100$, $c = 2$ a pro některé hodnoty π (předpoklady $\pi < 0,1$ a $n > 30$ jsou splněny, předpoklad $\frac{n}{N} < 0,1$ je splněn pro dodávky velikosti $N > 1000$).

π	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
$P(X \leq 2)$	0,919 7	0,676 7	0,423 2	0,238 1	124 7	0,062 0

Je vidět, že např. z dodávek obsahujících 5% zmetků jich bude uvedeným způsobem přijato 12,5%.

16.4.2

Stanovme pravděpodobnost výher ve Sportce. V této hře se z osudí obsahujícího $N = 49$ čísel vytahuje náhodně bez vracení $n = 6$ čísel. Sázející označí na sázence $M = 6$ čísel; tato čísla představují prvky v souboru, mající určitý znak – tím znakem je skutečnost, že na ně hráč vsadil. Označme X počet těch čísel mezi vytaženými, na který daný hráč vsadil. Pak

$$P(X = x) = \frac{\binom{6}{x}\binom{43}{6-x}}{\binom{49}{6}} = \frac{\binom{6}{x}\binom{43}{6-x}}{13\,983\,816}, \qquad x = 0, 1, \ldots, 6.$$

Pravděpodobnosti výher udává tato tabulka:

Pořadí	Pravděpodobnost výhry
I	$P(X = 6) = \frac{1}{13\,983\,816} = 7\,151.10^{-11}$
II	$P(X = 5) = \frac{258}{13\,983\,816} = 1\,845.10^{-8}$
III	$P(X = 4) = \frac{13\,545}{13\,983\,816} = 9\,686.10^{-7}$
IV	$P(X = 3) = \frac{246\,820}{13\,983\,816} = 1\,765.10^{-5}$

16.5 Úloha

Označte pravděpodobnosti (16.1.1) symbolem $P(N,\, M;\, n,\, x)$. Ukažte, že platí

$$\begin{aligned} &P(N,\, M;\, n,\, x) = P(N,\, n;\, M,\, x) = P(N,\, N-M;\, n,\, n-x) = \\ &\quad = P(N,\, M;\, N-n,\, M-x) = P(N,\, N-M;\, N-n,\, N-n-M+x). \end{aligned}$$

Kapitola 17

Multinomické rozdělení

17.1

Náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)'$ má *multinomické rozdělení s parametry* $n, \pi_1, \dots, \pi_k$, jestliže [1]

$$
\begin{aligned}
P(X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k) &= \frac{n!}{x_1! x_2! \dots x_k!} \pi_1^{x_1} \pi_2^{x_2} \dots \pi_k^{x_k}, \qquad (17.1.1)\\
& \qquad x_j = 0, 1, \dots, n \text{ pro } j = 1, \dots, k, \sum_{j=1}^{n} x_j = n,\\
&= 0 \quad \text{jinak}
\end{aligned}
$$

přičemž n je přirozené číslo a $0 < \pi_j < 1,\ j = 1, \dots, k,\ \sum_{j=1}^{k} \pi_j = 1$.

Název pochází ze skutečnosti, že (17.1.1) je obecný člen rozvoje výrazu $(\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_k)^n$. Odtud bezprostředně vyplývá, že

$$\sum_{x_1} \sum_{x_2} \dots \sum_{x_k} P(X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k) = 1.$$

Multinomické rozdělení je zobecněním binomického rozdělení: Uvažujme n nezávislých pokusů, z nichž v každém nastane právě jeden z k vzájemně disjunktních jevů $A_1, \dots, A_k$. Přitom pravděpodobnost, že nastane jev A_j, je v každém pokusu rovna $\pi_j, j = 1, \dots, k$ a $\sum_{j=1}^{k} \pi_j = 1$. Binomické rozdělení je tedy případem multinomického rozdělení pro $k = 2$, přičemž jev $A_1 = A$

[1] Každá z veličin $X_1, \dots, X_n$ může nabývat hodnot $0, 1, \dots, n$, ale přitom součet $\sum_{j=1}^{k} X_j$ musí být roven n.

nastane s pravděpodobností $\pi_1 = \pi$ a jev $A_2 = \overline{A}$ (doplňkový jev k jevu A) nastane s pravděpodobností $\pi_2 = 1 - \pi$.

17.2 Marginální rozdělení

Nechť náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_k)'$ má multinomické rozdělení (17.1.1). Pak vektor $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_N)'$, $1 \leq s \leq k-1$, má marginální rozdělení

$$\begin{aligned} P(X_1 = x_1, \ldots, X_s = x_s) &= \\ &= \frac{n!}{x_1! \ldots x_s!(n - x_1 - \ldots - x_s)!} \pi_1^{x_1} \ldots \pi_s^{x_s} (1 - \sum_{j=1}^{s} \pi_j)^{n - x_1 - \ldots - x_s}, \\ & \qquad x_j = 0, 1, \ldots, n \text{ pro } j = 1, \ldots, s, \sum_{j=1}^{s} x_j \leq n, \qquad (17.2.1) \\ &= 0 \qquad \text{jinak}, \end{aligned}$$

tj. vektor $\mathbf{X}$ má opět multinomické rozdělení.

Výraz (17.2.1) dostaneme tak, že uvažujeme n nezávislých pokusů, z nichž v každém nastane právě jeden z $s+1$ vzájemně disjunktních jevů $A_1, \ldots, A_s$, $\cup_{j=s+1}^{k} A_j$ (tj. jevy $A_{s+1}, \ldots, A_k$ sjednotíme do jednoho jevu) s pravděpodobnostmi $P(A_j) = \pi_j,\ j = 1, \ldots, s,\ P(\cup_{j=s+1}^{k} A_j) = 1 - \sum_{j=1}^{s} \pi_j$.

Obdobně to platí pro vektor $\mathbf{X} = (X_{j_1}, \ldots, X_{j_S})'$, kde $J = \{j_1, \ldots, j_s\}, 1 \leq s \leq k-1$, je libovolná neprázdná podmnožina množiny $\{1, \ldots, k\}$. Pravděpodobnosti $P(X_j = x_{j_1}, \ldots, X_{j_s} = x_{j_s}$ dostaneme tak, že v (17.2.1) indexy $1, \ldots, s$ nahradíme po řadě indexy $j_1, \ldots, j_s$.

Např. pro $k = 4$ je

$$P(X_2 = x_2, X_4 = x_4) = \frac{n!}{x_2! x_4! (n - x_2 - x_4)!} \pi_2^{x_2} \pi_4^{x_4} (1 - \pi_2 - \pi_4)^{n - x_2 - x_4},$$
$$x_2, x_4 = 0, 1, \ldots, n, \quad x_2 + x_4 \leq n.$$

Speciálně pro $s = 1$

$$P(X_j = x_j) = \frac{n!}{x_j!(n - x_j)!} \pi_j^{x_j} (1 - \pi_j)^{n - x_j}, \quad x_j = 0, 1, \ldots, n, \qquad (17.2.2)$$

tj. marginálním rozdělením veličiny X_j je rozdělení $\mathrm{Bi}(n, \pi_j),\ j = 1, \ldots, k$.

17.3 Momenty

Z (17.2.2) ihned vyplývá, že

$$E(X_j) = n\pi_j, \qquad j = 1, \ldots, k, \tag{17.3.1}$$
$$\mathrm{var}(X_j) = n\pi_j(1-\pi_j), \qquad j = 1, \ldots, k. \tag{17.3.2}$$

Charakteristická funkce multinomického rozdělení

$$\begin{aligned}
\Psi_{\mathbf{X}(t)} &= \sum_{\substack{x_1 \\ x_1+x_2+\ldots x_k=n}} \sum_{x_2} \ldots \sum_{x_k} \exp\Big(\mathrm{i}\sum_{j=1}^{k} t_j x_j\Big) P(X_1 = x_1, \ldots, X_k = x_k) = \\
&= \sum_{\substack{x_1 \\ x_1+\ldots+x_k=n}} \ldots \sum_{x_k} \frac{n!}{x_1! \ldots x_k!} \big(\pi_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}t_1}\big)^{x_1} \ldots \big(\pi_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}t_k}\big)^{x_k} = \qquad (17.3.3) \\
&= \big(\pi_1 e^{it_1} + \ldots + \pi_k e^{it_k}\big)^n.
\end{aligned}$$

Odtud dostáváme

$$E(X_j X_l) = \frac{1}{i^2} \left.\frac{\partial^2 \Psi_{\mathbf{X}(t)}}{\partial t_j \partial t_l}\right|_{t_1=\ldots t_k=0} = n(n-1)\pi_j\pi_l, \quad j \neq l,$$

takže kovariance

$$\mathrm{cov}(X_j, X_l) = -n\pi_j\pi_l, \quad j, l = 1, \ldots, k, \quad j \neq l. \tag{17.3.4}$$

17.4 Příklady

17.4.1

Uvažujme určitý výrobek, u něhož se měří znak Z (např. rozměr), přičemž výrobek je dobrý, jestliže $T_D \leq Z \leq T_H$, kde T_D je dolní a T_H horní toleranční mez pro tento znak Z. Uvažujme náhodné jevy $A_1 : Z < T_D, A_2 : T_D \leq Z \leq T_H, A_3 : Z > T_H$; tyto jevy jsou vzájemně disjunktní. Nechť za normálních výrobních podmínek jsou pravděpodobnosti $P(A_j) = \pi_j, j = 1, 2, 3$, přičemž $\sum_{j=1}^{3} P(A_j) = 1$.

Potom pravděpodobnost, že z n výrobků, nezávisle vyrobených za normálních podmínek, jich bude x_1 mít hodnotu $Z < T_D$, x_2 hodnotu $T_D \leq Z \leq T_H$ a x_3 hodnotu $Z > T_H$, je rovna

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3) = \frac{n!}{x_1!x_2!x_3!}\pi_1^{x_1}\pi_2^{x_2}\pi_3^{x_3} =$$
$$= \frac{n!}{x_1!x_2!(n - x_1 - x_2)!}\pi_1^{x_1}\pi_2^{x_2}(1 - \pi_1 - \pi_2)^{n-x_1-x_2},$$
$$x_j = 0, 1, \ldots, n, \quad j = 1, 2, 3, \quad \sum_{j=1}^{3} x_j = n.$$

Např. pro $\pi_1 = 0,02,\ \pi_2 = 0,95,\ \pi_3 = 0,03$ a $n = 6$ je

$$P(X_1 = 1, X_2 = 4, X_3 = 1) = \frac{6!}{1!4!1!}0,02 \cdot 0,95^2 \cdot 0,03 = 0,015.$$

17.4.2

V předchozím příkladě neuvažujme rozdělení hodnot znaku Z do tří nýbrž jen do dvou tříd: $Z \in \langle T_D, T_H\rangle$ (dobrý výrobek) a $Z \notin \langle T_D, T_H\rangle$ (zmetek).

Potom veličina X_2 (počet dobrých výrobků z n nezávisle vyrobených výrobků) má rozdělení pravděpodobnosti

$$P(X_2 = x_2) = \binom{n}{x_2}\pi_2^{x_2}(1 - \pi_2)^{n-x_2}, \quad x_2 = 0, 1, \ldots, n,$$

a pro číselné údaje příkl. 17.4.1 je

$$P(X_2 = x_2) = \binom{6}{x_2}0,95^{x_2} \cdot 0,05^{6-x_2}, \quad x_2 = 0, 1, \ldots, 6.$$

takže např. pravděpodobnost, že z šesti nezávisle vyrobených výrobků budou čtyři dobré výrobky (bez ohledu na to, kolik ze dvou zmetků bude mít hodnotu Z pod T_D nebo nad T_H), je rovna

$$P(X_2 = 4) = \binom{6}{4}0,95^4 \cdot 0,05 = 0,031.$$

17.4.3

Nechť náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)'$ má multinomické rozdělení (17.1.1) Stanovme střední hodnotu a rozptyl veličiny

$$Y = \sum_{j=1}^{k} a_j X_j, \tag{17.4.1}$$

kde a_j jsou známé reálné koeficienty, $\sum_{j=1}^{k} a_j^2 > 0$.

Z (17.3.1) až (17.3.4) vyplývá, že

$$E(Y) = n \sum_{j=1}^{k} a_j \pi_j, \tag{17.4.2}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{var}(Y) &= \sum_{j=1}^{k} a_j^2 n \pi_j (1 - \pi_j) - \sum_{\substack{j \\ j \neq l}} \sum_{l} a_j a_l n \pi_j \pi_l = \qquad (17.4.3) \\ &= n \Big[\sum_{j=1}^{k} a_j^2 \pi_j - \big(\sum_{j=1}^{k} a_j \pi_h \big)^2 \Big]. \end{aligned}$$

Tak např. pro

$$Y = X_j - X_l, \quad j, l = 1, \dots, k, \quad j \neq l, \tag{17.4.4}$$

je

$$E(X_j - X_l) = n(\pi_j - \pi_l), \quad \operatorname{var}(X_j - X_l) = n\big[\pi_j + \pi_l - (\pi_j - \pi_l)^2\big]. \tag{17.4.5}$$

17.5 Úlohy

17.5.1

Uvažujte multinomické rozdělení (17.1.1) s parametry $\pi_j = \frac{1}{k}$, $j = 1, \dots, k$. Stanovte $E(X_j)$, $\operatorname{var}(X_j)$, $\operatorname{cov}(X_j, X_l)$ a střední hodnotu a rozptyl veličiny $Y = \sum_{j=1}^{k} a_j X_j$ pro tento případ.

$$\left[\begin{array}{rl} E(X_j) & = \frac{n}{k}, \quad \operatorname{var}(X_j) = \frac{n(k-1)}{k^2}, \quad j = 1, \dots, k, \\ \operatorname{cov}(X_j, X_l) & = -\frac{n}{k^2}, \quad j, l = 1, \dots, k, \quad j \neq l, \\ E(Y) & = \frac{n}{k} \sum_{j=1}^{k} a_j, \quad \operatorname{var}(Y) = \frac{n}{k} \Big[\sum_{j=1}^{k} a_j^2 - \frac{1}{k} (\sum_{j=1}^{k} a_j)^2 \Big]. \end{array} \right]$$

17.5.2

Stanovte koeficienty korelace $\rho(X_j, X_l)$, $\quad j, l = 1, \dots k$, pro multinomické rozdělení.

$$\left[\rho(X_j X_l) = -\left[\frac{\pi_j \pi_l}{(1-\pi_j)(1-\pi_l)}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad j, l = 1, \dots, k, \quad j \neq l.\right]$$

Kapitola 18

Normální rozdělení

18.1

Dosud jsme uvažovali některá důležitá rozdělení diskrétního typu. Nyní se budeme věnovat některým rozdělením spojitého typu. Nejdůležitější z nich hrající zásadní roli v teorii pravděpodobnosti a matematické statistiky i v jejich aplikacích, je normální (někdy též zvané Laplaceovo-Gaussovo) rozdělení.

Náhodná veličina X má *normální rozdělení s parametry* μ a σ^2, $-\infty < \mu < \infty, \sigma^2 > 0$, jestliže její hustota pravděpodobnosti

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\Big[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big], \quad -\infty < x < \infty. \tag{18.1.1}$$

Normální rozdělení s parametry μ a σ^2 označíme $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Hustota pravděpodobnosti $f(x)$ je symetrická podle bodu $x = \mu$ a její tvar závisí na parametru σ^2. Obr. 11 znázorňuje hustoty pravděpodobnosti rozdělení $\mathrm{N}(0,1)$ a $\mathrm{N}(0,4)$.

Modus rozdělení $\hat{x} = \mu$, přičemž $f(\hat{x}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{(2\pi)}} = \frac{0{,}398942}{\sigma}$.

Charakteristická funkce rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ je

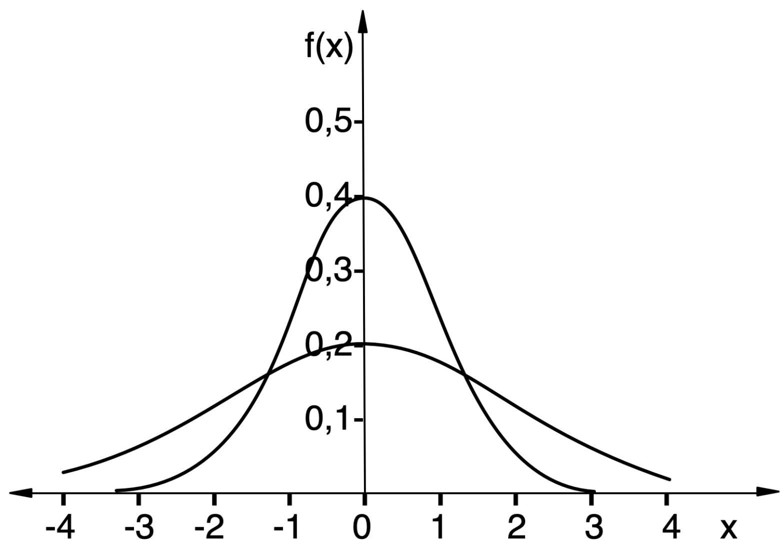
$$\Psi_X(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{(2\pi)}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x.$$

Exponent můžeme přepsat na tvar

$$exp\Big[-\frac{1}{2\sigma^2}\big[(x-\mu-\mathrm{i}\sigma^2 t)^2 - 2\mathrm{i}\mu\sigma^2 t - \mathrm{i}^2\sigma^4 t^2\big]\Big].$$

Tudíž

$$\Psi_X(t) = exp(\mathrm{i}\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2). \tag{18.1.2}$$



Obr. 11: Hustoty pravděpodobnosti normálních rozdělení.

18.2 Normované normální rozdělení

Velmi důležitým případem normálního rozdělení je rozdělení $\mathrm{N}(0, 1)$. Toto rozdělení se nazývá *normované* někdy též *standardizované) normální rozdělení.* Má-li náhodná veličina U rozdělení $\mathrm{N}(0, 1)$, pak její hustota pravděpodobnosti je

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \exp\Big(- \frac{u^2}{2}\Big), \qquad -\infty < u < \infty. \tag{18.2.1}$$

Ze symetrie $\varphi(u)$ podle bodu $u = 0$ vyplývá, že

$$\varphi(-u) = \varphi(u), \qquad -\infty < u < \infty. \tag{18.2.2}$$

Platí (viz příkl. 13.3.1): *Má-li náhodná veličina X rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$, pak náhodná veličina*

$$U = \frac{X - \mu}{\sigma} \tag{18.2.3}$$

má rozdělení $\mathrm{N}(0,1)$.

Z (18.1.1) a (18.2.1) vyplývá, že

$$f(x) = \frac{1}{\sigma}\,\varphi\Big(\frac{x-\mu}{\sigma}\Big), \qquad -\infty < x < \infty. \tag{18.2.4}$$

18.3 Distribuční funkce

Normovanému normálnímu rozdělení přísluší distribuční funkce

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t, \qquad -\infty < u < \infty. \tag{18.3.1}$$

Ze symetrie hustoty $\varphi(u)$ podle bodu $u = 0$ vyplývá, že

$$\Phi(u) = 1 - \Phi(-u), \qquad -\infty < u < \infty. \tag{18.3.2}$$

Normální rozdělení s obecnými parametry μ a σ^2 má distribuční funkci

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{2} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}y, \qquad -\infty < x < \infty. \tag{18.3.3}$$

Platí

$$F(x) = \Phi\Big(\frac{x-\mu}{\sigma}\Big), \qquad -\infty < x < \infty. \tag{18.3.4}$$

Tento vztah vyplývá bezprostředně z toho, že veličina $U = \frac{(X-\mu)}{\sigma}$ má rozdělení $\mathrm{N}(0,1)$. Je totiž

$$F(x) = P(X \le x) = P\Big(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma}\Big) = P\Big(U \le \frac{x-\mu}{\sigma}\Big) = \\ = \Phi\Big(\frac{x-\mu}{\sigma}\Big), \qquad -\infty < x < \infty.$$

Pro stanovení hodnot distribuční funkce normálního rozdělení stačí tedy tabelovat hodnoty distribuční funkce $\Phi(u)$. Tabulky [19] obsahují hodnoty $\Phi(u)$ pro $u = 0(0,01)4,2$; pro $u < 0$ se použije vztahu (18.3.2).

Např. pro rozdělení $N(2,16)$ je

$$F(1) = \Phi\Big(\frac{1-2}{4}\Big) = \Phi(-0,25) = 1 - \Phi(0,25) = 0,401\,294.$$

18.4 Momenty

Střední hodnota rozdělení $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ je rovna

$$E(X) = \mu. \tag{18.4.1}$$

Tento vztah můžeme odvodit z charakteristické funkce (18.1.2), vyplývá však též bezprostředně z okolnosti, že hustota pravděpodobnosti (18.1.1) je symetrická podle bodu $x = \mu$.

Uvažujme nyní momenty veličiny U mající rozdělení $\mathrm{N}(0, 1)$. Zřejmě

$$\mu'_r(U) = \mu_r(U) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^r \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u,$$

takže

$$\mu'_r(U) = \mu_r(U) = 0, \qquad r = 1, 3, \ldots,$$

a

$$\begin{aligned}
\mu'_r(U) = \mu_r(U) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} u^r \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u = \\
= \frac{2^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} t^{(r-1)/2} e^{-t} \mathrm{d}t = \frac{2^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right) = \\
= (r-1)(r-3)\ldots 3 \cdot 1 = \frac{r!}{2^{\frac{r}{2}} \left(\frac{r}{2}\right)!}, \qquad r = 2, 4, \ldots.
\end{aligned}$$

Odtud vyplývají vztahy pro centrální momenty veličiny $X = \mu + \sigma U$, mající rozdělení $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

$$\begin{aligned}
\mu_r(X) &= 0, & r = 1, 3, \ldots, \\
&= \frac{1}{2^{\frac{r}{2}}} \frac{r!}{\left(\frac{r}{2}\right)!} \sigma^r, & r = 2, 4, \ldots.
\end{aligned} \tag{18.4.2}$$

Tudíž

$$\mathrm{var}(X) = \sigma^2. \tag{18.4.3}$$

Nyní je zřejmý význam parametrů rozdělení $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$: μ je střední hodnota a σ^2 rozptyl (a tedy σ směrodatná odchylka) tohoto rozdělení.

Dále

$$\alpha_3(X) = 0, \qquad \alpha_4(X) = 0. \tag{18.4.4}$$

18.5 Kvantily

Pro $100P\%$ kvantil u_P normovaného normálního rozdělení platí

$$\Phi(u_P) = P, \quad 0 < P < 1. \tag{18.5.1}$$

Ze symetrie rozdělení $\mathrm{N}(0,1)$ podle bodu $u = 0$ vyplývá, že

$$u_{1-P} = -u_P, \quad 0 < P < 1. \tag{18.5.2}$$

Pro $100P\%$ kvantil x_P rozdělení $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ platí podle definice kvantilu a vzhledem ke vztahu (18.3.4)

$$P = F(x_P) = \Phi\Big(\frac{x_P - \mu}{\sigma}\Big).$$

Porovnáme-li však tento vztah s (18.5.1), vidíme, že

$$x_P = \mu + \sigma u_P, \quad 0 < P < 1. \tag{18.5.3}$$

Stačí tedy tabelovat jen kvantily normovaného normálního rozdělení. Tabulky [19] obsahují hodnoty u_P pro $P = 0,5\ (0,001)\ 0,990\ (0,000\,1)\ 0,999\,9$; pro $P < 0,5$ se použije vztahu (18.5.2).

Např. pro rozdělení $\mathrm{N}(2, 16)$ je

$$x_{0{,}05} = 2 + 4u_{0{,}05} = 2 - 4u_{0{,}95} = 2 - 4 \cdot 1,644\,854 = -4,579\,4.$$

Protože $u_{0{,}5} = 0$, platí pro medián $x_{0{,}5}$ normálního rozdělení s libovolnými parametry μ a σ^2.

$$x_{0{,}5} = \mu. \tag{18.5.4}$$

18.6 Rozdělení lineární funkce nezávislých normálních veličin

Mějme $n \geq 1$ náhodných veličin $X_1, \ldots, X_n$, přičemž veličina X_j má rozdělení $N(\mu_j, \sigma_j^2)$, $j = 1, \ldots, n$. V případě $n \geq 2$ nechť veličiny $X_1, \ldots, X_n$ jsou vzájemně nezávislé. Pak náhodná veličina

$$Y = \sum_{j=1}^{n} a_j X_j + b, \tag{18.6.1}$$

kde $a_1, \dots, a_n, b$ jsou reálná čísla, $\sum_{j=1}^n a_j^2 > 0$, má normální rozdělení se střední hodnotou

$$E(Y) = \sum_{j=1}^n a_j \mu_j + b \tag{18.6.2}$$

a rozptylem

$$\mathrm{var}(Y) = \sum_{j=1}^n a_j^2 \sigma_j^2. \tag{18.6.3}$$

Důkaz se snadno provede pomocí charakteristické funkce. Je totiž

$$\begin{aligned} \Psi_Y(t) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}bt} \prod_{i=1}^n \Psi_{X_j}(a_j t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}bt} \prod_{i=1}^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}a_j\mu_j t - \frac{1}{2}a_j^2\sigma_j^2 t} = \\ &= \exp\Big[\mathrm{i}\big(\sum_{j=1}^n a_j\mu_j + b\big)t - \frac{1}{2}\big(\sum_{j=1}^n a_j^2\sigma_j^2\big)t^2\Big], \end{aligned}$$

což je charakteristická funkce rozdělení $\mathrm{N}\big(E(Y), \mathrm{var}(Y)\big)$, kde $E(Y)$ a $\mathrm{var}(Y)$ jsou výrazy (18.6.2) a (18.6.3).

Speciálně, je-li $\mu_1 = \ldots = \mu_n = \mu$ a $\sigma_1^2 = \ldots = \sigma_n^2 = \sigma^2$, je

$$E(Y) = \big(\sum_{j=1}^n a_j\big)\mu + b, \quad \mathrm{var}(Y) = \big(\sum_{j=1}^n a_j^2\big)\sigma^2. \tag{18.6.4}$$

Pro $n = 1$ a $a = 1$ odtud vyplývá, že náhodná veličina $Y = X + b$ má rozdělení $\mathrm{N}(\mu + b, \sigma^2)$; v tomto případě se střední hodnota (a s ní celé rozdělení) posune o hodnotu b, ale tvar rozdělení se nezmění.

18.7 Příklady

18.7.1

Nechť pro určitý znak Z (např. rozměr, obsahu určitého prvku apod.) jsou předepsány dolní a horní toleranční meze T_D a T_H. Nechť Z je náhodná veličina mající normální rozdělení. Stanovme parametry μ a σ^2 tohoto rozdělení, jestliže

$$P(Z < T_D) = P_1, \quad P(Z > T_H) = P_2, \quad P(T_D \le Z \le T_H) = 1 - (P_1 + P_2), \tag{18.7.1}$$

kde P_1 a P_2 jsou daná čísla; $0 < P_j < \frac{1}{2}, \quad j = 1, 2.$

Zřejmě

$$\begin{aligned} T_D &= x_{P_1} = \mu + \sigma u_{P_1} = \mu - \sigma u_{1-P_1}, \\ T_H &= x_{1-P_2} = \mu + \sigma u_{1-P_2}. \end{aligned}$$

Odtud

$$\sigma = \frac{T_H - T_D}{u_{1-P_1} + u_{1-P_2}}, \quad \mu = \frac{T_D u_{1-P_2} + T_H u_{1-P_1}}{u_{1-P_1} + u_{1-P_2}}. \tag{18.7.2}$$

Je-li $P_1 = P_2 = \frac{P}{2}$, pak

$$\sigma = \frac{T_H - T_D}{2u_{1-\frac{P}{2}}}, \quad \mu = \frac{T_D + T_H}{2}. \tag{18.7.3}$$

Např. pro $P_1 = 0,02$ a $P_2 = 0,03$ je

$$\sigma = \frac{T_H - T_D}{4,934\,543}, \quad \mu = \frac{1,880\,794\, T_D + 2,053\,749\, T_H}{4,934\,543}.$$

nebo pro $P_1 = P_2 = 0,025$ je

$$\sigma = \frac{T_H - T_D}{3,919\,928}, \quad \mu = \frac{T_D + T_H}{2}.$$

18.7.2

Uveďme dvě vyjádření $\Phi(u)$ pomocí řad. Těchto řad lze využít pro výpočet hodnot distribuční funkce rozdělení $N(0,1)$ na počítačích.

a) Jelikož řadu

$$\varphi(t)\sqrt{2\pi} = e^{-\frac{t^2}{2}} = 1 - \frac{t^2}{1!2} + \frac{t^4}{2!2^2} - \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{t^{2i}}{i!2^i}$$

lze integrovat člen po členu, platí pro $u \geq 0$

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} + \int_0^u \varphi(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{u^{2i+1}}{i!2^i(2i+1)}. \tag{18.7.4}$$

Vzhledem ke vztahu (18.3.1) platí (18.7.4) i pro $u < 0$. Řada (18.7.4) je vhodná k výpočtu $\Phi(u)$ pro malá $|u|$, řekněme $|u| \leq 1$.

b) Integrací per partes $[u = \varphi(t), v' = 1]$ dostaneme

$$\int_0^u \varphi(t)\mathrm{d}t = \big[t\varphi(t)\big]_0^u + \int_0^2 t^2\varphi(t)\mathrm{d}t = u\varphi(u) + \int_0^u t^2\varphi(t)\mathrm{d}t.$$

Postupným integrováním per partes pak dostáváme

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}+\varphi(u)\big(u+fracu^3 3+\frac{u^5}{3\cdot 5}+\frac{u^7}{3\cdot 5\cdot 7}+\dots\big),\ -\infty < u < \infty. \quad (18.7.5)$$

Porovnejme výpočet $\Phi(1)$, uvažujeme-li první čtyři členy každé z řad:

$$\begin{aligned}
\Phi(1) &\simeq \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{40} - \frac{1}{336}\Big) \doteq 0,841\,24,\\
\Phi(1) &\simeq \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\Big(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{15} - \frac{1}{105}\Big) \doteq 0,841\,06.
\end{aligned}$$

Z tabulek [19] nalezneme hodnotu $\Phi(1) = 0,841\,345$.

18.7.3

Má-li náhodná veličina X rozdělení $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, pak pro $k > 0$ platí

$$P(|X-\mu| \le k\sigma) = P\Big(-k \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le k\Big) = P(-k \le U \le k) = \Phi(k)-\Phi(-k),$$

takže

$$P(|X - \mu| \le k\sigma) = 2\Phi(k) - 1. \quad (18.7.6)$$

Uveďme hodnoty této pravděpodobnosti pro některá k:

k	0,5	1	2	3
$P(\lvert X-\mu\rvert \le k\sigma)$	0,382 9	0,682 7	0,955 5	0,997 3

Naopak můžeme pro dané P stanovit k tak, aby

$$P(|X - \mu| \le k\sigma) = P. \quad (18.7.7)$$

Použijeme-li vztahu (18.7.6), zřejmě $\Phi(k) = (1 + P)/2$, takže (18.7.7) je splněno pro

$$k = u_{(1+P)/2}. \quad (18.7.8)$$

Tak např.

P	0,5	0,75	0,9	0,95	0,99	0,995	0,999
$\frac{1+P}{2}$	0,75	0,875	0,95	0,975	0,995	0,997 5	0,999 5
k	0,674 49	1,150 35	1,644 85	1,959 96	2,575 83	2,807 03	3,290 53

Výraz $u_{0,75}\sigma = 0,674\,49\sigma$ se nazývá *pravděpodobná chyba*, neboť

$$P(|X-\mu| \le 0,674\,49\sigma) = P(|X-\mu| \ge 0,674\,49\sigma) = 0,5.$$

O chybách měření se totiž často předpokládá, že mají normální rozdělení.

18.7.4

V některých fyzikálních problémech (např. v teorii difúze) se pracuje s funkcemi $\mathrm{erf}(x)$ (error function – chybová funkce) a $\mathrm{erfc}(x) = 1 - \mathrm{erf}(x)$ (error function complement), kde

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y, \qquad x > 0. \tag{18.7.9}$$

Použijeme-li substituci $u = y\sqrt{2}$, zjistíme, že

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^{x} \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x\sqrt{2}}^{x\sqrt{2}} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u,$$

takže vzhledem k (18.7.6)

$$\mathrm{erf}(x) = P\big(|U| \le x\sqrt{2}\big) = 2\Phi\big(x\sqrt{2}\big) - 1, \qquad x > 0. \tag{18.7.10}$$

Např.

$$\mathrm{erf}(1,4) = 2\Phi(1,98) - 1 = 0,952\,3.$$

18.7.5

Uvažujme lineární formu (18.6.1) n vzájemně nezávislých normálních veličin $X_1, \ldots, X_n$ s koeficienty $a_j = \frac{1}{n}, j = 1, \ldots, n, b = 0$.

Potom náhodná veličina *(aritmetický průměr* veličin $X_1, \ldots, X_n$)

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j \tag{18.7.11}$$

má rozdělení $\mathrm{N}\Big(\sum_{j=1}^{n}\frac{\mu_j}{n},\sum_{j=1}^{n}\frac{\sigma_j^2}{n}\Big)$.

Je-li $\mu_1=\ldots=\mu_n=\mu$ a $\sigma_1^2=\ldots=\sigma_n^2=\sigma^2$, má $\overline{X}$ rozdělení $\mathrm{N}\big(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\big)$, tj. normální rozdělení se stejnou střední hodnotou jakou mají veličiny $X_1,\ldots,X_n$, ale s rozptylem n-krát menším než jaký mají veličiny $X_1,\ldots,X_n$. Toho se využívá při opakovaných nezávislých měřeních určité konstanty μ. Čím větší je počet měření n, tím méně kolísají hodnoty veličiny $\overline{X}$ kolem μ. Distribuční funkce veličiny $\overline{X}$ je pak rovna

$$P(\overline{X}\le x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\sqrt{n}\right),\qquad -\infty<x<\infty.$$

18.8 Úlohy

18.8.1

Nakreslete graf distribuční funkce normálního rozdělení s parametry $\mu=10$ a $\sigma^2=16$. Nalezněte pro toto rozdělení hodnotu a takovou, že $P(X\le a)=0,2$.

$[a=6,634]$

18.8.2

Náhodná veličina X má rozdělení $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$. Určete parametry μ a σ^2, jestliže platí

$$P(X\le a)=P_1,\quad P(X\le g)=P_2,$$

kde a,b,P_1,P_2 jsou daná čísla, přičemž $-\infty<a<b<\infty,\ 0<P_1<P_2<1$. (Obecně a pak pro případ $a=9,\ b=15,\ P_1=0,8,\ P_2=0,95$).

$\Big[\mu=\frac{au_{P_2}-bu_{P_1}}{u_{P_2}-u_{P_1}},\ \sigma=\frac{b-a}{u_{P_2}-u_{P_1}},\ \mu=2,713,\ \sigma=7,470.\Big]$

18.8.3

Nechť $E=0,674\,49\,\sigma$ značí pravděpodobnou chybu uvažovanou v příkl. 18.7.3 Stanovte pravděpodobnosti $P[cE\le X-\mu\le(c+1)E]$ pro $c=1,2,3$.

$[0,161;\ 0,067;\ 0,018.]$

18.8.4

Stanovte rozdělení náhodné veličiny $Y = 3X_1 - 2X_2$, jsou-li X_1 a X_2 nezávislé veličiny, přičemž X_1 má rozdělení $\mathrm{N}(5, 1)$ a X_2 rozdělení $\mathrm{N}(-2, 4)$. Určete 10% kvantil veličiny Y.

$$[Y \text{ má rozdělení } N(19, 25), y_{0,1} = 12,592.]$$

18.8.5

Nechť náhodná veličina X má rozdělení $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. S využitím vztahu (13.5.2) stanovte hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny $Y = X^2$; speciálně uvažujte případ $\mu = 0$.

$$\left[\begin{array}{c} (x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left[\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) + \exp\left(-\frac{(x+\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\right], \quad x > 0; \\ \text{pro } \mu = 0: \quad g(y) = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \quad x > 0 \end{array}\right]$$

Kapitola 19

Logaritmicko-normální rozdělení

19.1

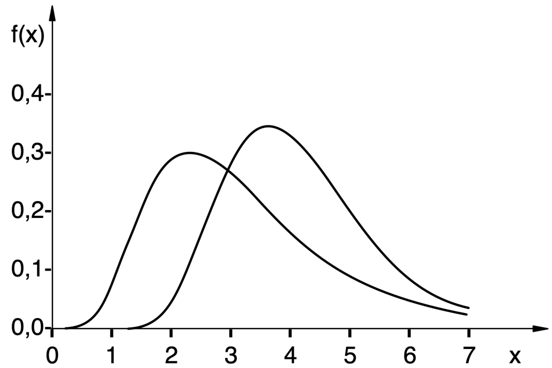
Náhodná veličina X má *logaritmicko-normální* (též *lognormální*) *rozdělení s parametry* μ *a* σ^2, $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma^2 > 0$, *jestliže její hustota pravděpodobnosti*

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}} \exp\Big[-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big], && x > 0, \\
&= 0, && x \le 0.
\end{aligned}
\tag{19.1.1}
$$

Logaritmicko-normální rozdělení s parametry μ a σ^2 označíme $\mathrm{LN}(\mu, \sigma^2)$. Uvažujeme-li náhodnou veličinu $Y = \ln X$, kde x má rozdělení $\mathrm{LN}(\mu, \sigma^2)$, zjistíme snadno z (19.1.1) a (13.3.2), že Y má rozdělení $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Odtud pochází název logaritmicko-normálního rozdělení. Naopak, má-li veličina Y rozdělení $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, má veličina $X = \exp(Y)$ rozdělení $\mathrm{LN}(\mu, \sigma^2)$.

Toto rozdělení se často používá při popisu velikosti částic disperzních fází kovových materiálů nebo velikosti částic sypkých materiálů či v teorii spolehlivosti. Rozdělení je asymetrické (obr.12) a jeho modus

$$\hat{x} = e^{\mu-\sigma^2}. \tag{19.1.2}$$



Obr. 12: Hustota pravděpodobnosti logaritmicko-normálního rozdělení.

19.2 Distribuční funkce a kvantily

Protože veličina $\ln X$ má rozdělení $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, platí pro distribuční funkci rozdělení $\mathrm{LN}(\mu, \sigma^2)$

$$\begin{aligned} F(x) &= P(\ln X \le \ln x) = \Phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right), \qquad x > 0, \\ &= 0, \qquad x \le 0, \end{aligned} \tag{19.2.1}$$

a pro kvantily platí vztah

$$\ln x_P = \mu + \sigma u_P,$$

takže

$$x_P = \mathrm{e}^{\mu + \sigma u_P}, 0 < P < 1, \tag{19.2.2}$$

kde u_P značí $100P\%$ kvantil rozdělení $N(0,1)$. Speciálně medián

$$x_{0,5} = \mathrm{e}^{(\mu)}. \tag{19.2.3}$$

19.3 Momenty

Střední hodnota náhodné veličiny X^r je rovna

$$E(X^r) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty x^{r-1} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x.$$

Po substituci $z = \frac{\ln x - \mu}{\sigma}$ dostáváme

$$E(X^r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{r\mu + r\sigma z - \frac{z^2}{2}} \mathrm{d}z = \mathrm{e}^{r\mu + \frac{r^2}{2}\sigma^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(z - r\sigma)^2} \mathrm{d}z,$$

takže

$$E(X^r) = \mathrm{e}^{r\mu + \frac{r^2}{2}\sigma^2} \tag{19.3.1}$$

pro každé reálné r. Odtud pak dostáváme

$$E(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}. \tag{19.3.2}$$

Porovnáním (19.1.2), (19.2.3) a (19.3.2) vidíme, že

$$\hat{x} < x_{0,5} < E(X). \tag{19.3.3}$$

Dále

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(X) &= \mathrm{e}^{2\mu + \sigma^2}\big(\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1\big), && (19.3.4) \\ \alpha_3(X) &= \big(\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1\big)^{\frac{1}{2}}\big(\mathrm{e}^{2\sigma^2} + 2\big), && (19.3.5) \\ \alpha_4(X) &= \mathrm{e}^{4\sigma^2} + 2\mathrm{e}^{3\sigma^2} + 3\mathrm{e}^{2\sigma^2} - 6. && (19.3.6) \end{aligned}$$

Je tedy $\alpha_3(X) > 0$ i $\alpha_4(X) > 0$.

19.4 Rozdělení součinu mocnin nezávislých veličin

Mějme $n \geq 1$ náhodných veličin $X_1, \ldots, X_n$, přičemž veličina X_j má rozdělení LN(μ_j, σ_j^2), $j = 1, \ldots, n$. V případě $n \geq 2$ nechť veličiny $X_1, \ldots, X_n$ jsou vzájemně nezávislé. Pak náhodná veličina

$$Z = cX_1^{a_1} X_2^{a_2} \ldots X_n^{a_n} \tag{19.4.1}$$

s reálnými koeficienty $a_1, \ldots, a_n$, $\sum_{j=1}^n a_j^2 > 0$, a s $c > 0$ má rozdělení

$$\mathrm{LN}\Big(\sum_{j=1}^n a_j \mu_j + \ln c,\ \sum_{j=1}^n a_j^2 \sigma_j^2\Big).$$

Důkaz vyplývá bezprostředně z věty v odst. 18.6, podle níž má veličina $Y = \ln Z = \sum_{j=1}^{n} a_j \ln X_j + \ln c$ rozdělení $\mathrm{N}(\sum_{j=1}^{n} a_j\mu_j + \ln c,\ \sum_{j=1}^{n} a_j^2\sigma_j^2)$. Tudíž veličina $Z = \exp(Y)$ má rozdělení $\mathrm{LN}(\sum_{j=1}^{n} a_j\mu_j + \ln c,\ \sum_{j=1}^{n} a_j^2\sigma_j^2)$.

Pro distribuční funkci a kvantily veličiny (19.4.1) platí

$$\begin{aligned} P(Z \le z) &= \Phi\left[\frac{\ln z - \sum_{j=1}^{n} a_j\mu_j - \ln c}{\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\sigma_j^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right], & z > 0, \\ &= 0, & z \le 0, \end{aligned} \tag{19.4.2}$$

a

$$z_P = \exp\Big[\sum_{j=1}^{n} a_j\mu_j + \ln c + u_P\Big(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\sigma_j^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big], \qquad 0 < P < 1. \tag{19.4.3}$$

Dále střední hodnota

$$E(Z) = c\exp\Big[\sum_{j=1}^{n}(a_j\mu_j + \frac{1}{2}a_j^2\sigma_j^2)\Big] \tag{19.4.4}$$

a rozptyl

$$\mathrm{var}(Z) = c^2\exp\Big[\sum_{j=1}^{n}\big(2a_j\mu_j + 2a_j^2\sigma_j^2\big)\Big] - \big[E(Z)\big]^2. \tag{19.4.5}$$

Pro $n = 1$ má veličina $Z = cX^a$, $a \ne 0$, $c > 0$, rozdělení $\mathrm{LN}(a\mu + \ln c,\ a^2\sigma^2)$. Ve výrazech (19.4.2) a (19.4.3) se za $\big(\sum_{j=1}^{2} a_j^2\sigma_j^2\big)^{\frac{1}{2}}$ v tomto případě dosadí $|a|\sigma$.

Uvažujme ještě dva speciální případy pro $n = 2$:

Veličina $Z = cX_1X_2$ má rozdělení $\mathrm{LN}(\mu_1 + \mu_2 + \ln c,\ \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Veličina $Z = c\frac{X_1}{X_2}$ má rozdělení $\mathrm{LN}(\mu_1 - \mu_2 + \ln c,\ \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

19.5 Příklady

19.5.1

Stanovme hodnoty $F(5)$, $\hat{x}$, $x_{0,5}$, $E(X)$, $\mathrm{var}(X)$ a $x_{0,95}$ pro logaritmicko-normální rozdělení s parametry $\mu = 0,8$ a $\sigma^2 = 0,25$.

Postupně vypočteme:

$$
\begin{aligned}
F(5) &= \Phi\left(\frac{\ln 5 - 0,8}{0,5}\right) = \Phi(1,619) = 0,947;\\
\hat{x} &= \mathrm{e}^{0,8-0,25} = 1,733; \qquad x_{0,5} = \mathrm{e}^{0,8} = 2,226;\\
E(X) &= \mathrm{e}^{0,8+\frac{0,25}{2}} = 2,522;\\
\mathrm{var}(X) &= \mathrm{e}^{1,6+0,25}\big(\mathrm{e}^{0,25} - 1\big) = 1,806;\\
x_{0,95} &= \mathrm{e}^{0,8+0,5\cdot 1,645} = 5,066.
\end{aligned}
$$

19.5.2

Nechť částice určitého materiálu mají kulový tvar s velikostí (průměrem) X. Nechť veličina X má rozdělení LN(μ, σ^2). stanovme rozdělení povrchu S a objemu V částic.

Povrch $S = \pi X^2$ má rozdělení LN($2\mu + \ln \pi$, $4\sigma^2$) a objem $V = \frac{\pi}{6}x^3$ má rozdělení LN$\big(3\mu + \ln(\frac{\pi}{6})$, $9\sigma^2\big)$.

Střední povrch částic

$$E(S) = \mathrm{e}^{2\mu+\ln \pi + 2\sigma^2} = \pi \mathrm{e}^{2\mu+2\sigma^2}$$

a střední objem částic

$$E(V) = \frac{\pi}{6}\mathrm{e}^{3\mu+\frac{9}{2}\sigma^2}.$$

Distribuční funkci $G(v)$ veličiny V můžeme vyjádřit jako $P(V \leq v)$ nebo $P\big(X \leq (\frac{6v}{\pi})^{\frac{1}{3}}\big)$. Podle (19.4.2) pak v obou případech dostaneme výraz

$$G(v) = \Phi\left[\frac{\ln v - \ln(\frac{\pi}{6}) - 3\mu}{2\sigma}\right], \qquad v > 0.$$

19.5.3

Nechť částice mají tvar rotačních válců (destiček) s průměrem základny X_1 a výškou X_2. Nechť X_1 a X_2 jsou nezávislé náhodné veličiny, přičemž X_1 má rozdělení $LN(\mu_1, \sigma_1^2)$ a X_2 má rozdělení LN(μ_2, σ_2^2). Stanovme rozdělení objemu V částic.

Objem $V = \frac{\pi}{4}X_1^2 X_2$ má rozdělení LN$\big(2\mu_1 + \mu_2 + \ln(\frac{\pi}{4})$, $4\sigma_1^2 + \sigma_2^2\big)$.

Střední objem částic

$$E(V) = \frac{\pi}{4}\exp\big(2\mu_1 + \mu_2 + 2\sigma_1^2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2\big).$$

19.5.4

Uvažujme náhodnou veličinu (19.4.1) s koeficienty $a_1 = \ldots = a_n = \frac{1}{n}$, $c = 1$. Za předpokladů uvedených v odst. 19.4 má pak náhodná veličina (geometrický průměr veličin $X_1, \ldots, X_n$)

$$X_G = (X_1 X_2 \ldots X_n)^{\frac{1}{n}} \tag{19.5.1}$$

rozdělení $\mathrm{LN}\Big(\sum_{j=1}^n \frac{\mu_j}{n}, \sum_{j=1}^n \frac{\sigma_j^2}{n^2}\Big)$.

Je-li $\mu_1 = \ldots = \mu_n = \mu$ a $\sigma_1^2 = \ldots = \sigma_n^2 = \sigma^2$, má veličina X_G rozdělení $\mathrm{LN}\big(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\big)$.

19.6 Úlohy

19.6.1

Stanovte rozdělení náhodné veličiny $Z = X_1^3/X_2^2$, jsou-li veličiny X_1 a X_2 nezávislé, přičemž X_1 má rozdělení LN(2, 1) a X_2 má rozdělení LN(5, 4). Stanovte hodnotu pravděpodobnosti $P(Z \geq 2,59)$ a hodnotu 75% kvantilu veličiny Z.
[Veličina Z má rozdělení LN(−4; 25), $P(Z \geq 2,59) = 0,161$; $z_{0,75} = 0,534$.]

19.6.2

Ukažte, že pro kvantily rozdělení LN(μ, σ^2) platí vztah

$$x_{1-P} = \frac{\mathrm{e}^{2\mu}}{x_P}, \qquad 0 < P < 1.$$

19.6.3

Stanovte rozdělení veličiny $Z = X^{-1}$, jestliže X má rozdělení LN(μ, σ^2). Určete střední hodnotu a rozptyl veličiny Z.
[Veličina Z má rozdělení LN($-\mu$, σ^2), $E(Z) = \mathrm{e}^{-\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$, $\mathrm{var}(Z) = \frac{\mathrm{e}^{2\sigma^2} - \mathrm{e}^{\sigma^2}}{\mathrm{e}^{2\mu}}$.]

19.6.4

Uvažujte kulové částice o průměru X. Předpokládejte, že objem V těchto částic má logaritmicko-normální rozdělení s parametry τ a ω^2. Stanovte rozdělení průměru X těchto částic a parametry tohoto rozdělení. Vyjádřete distribuční funkci veličiny X.

$$\left[\begin{array}{l} \text{Veličina } X = \left(\frac{6}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} V^{\frac{1}{3}} \text{ má rozdělení } \mathrm{LN}\left(\frac{\tau}{3} + \frac{1}{3}\ln\left(\frac{6}{\pi}\right),\ \frac{\omega^2}{9}\right) \\ F(x) = \Phi\left(\frac{3\ln x - \tau - \ln\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\omega}\right), \quad x > 0. \end{array}\right]$$

Kapitola 20

Exponenciální rozdělení

20.1

Náhodná veličina X má *exponenciální rozdělení s parametry* A a $\delta, -\infty < A < \infty, \delta > 0$, jestliže hustota pravděpodobnosti

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\delta}\exp\Big(-\frac{x-A}{\delta}\Big), \qquad x > A, \\ &= 0, \qquad\qquad\qquad\qquad x \le A. \end{aligned} \tag{20.1.1}$$

Exponenciální rozdělení s parametry A a δ označíme $\mathrm{E}(A,\, \delta)$.

Toto rozdělení má širokou použitelnost, např. v teorii spolehlivosti a životnosti, v teorii hromadné obsluhy, v teorii obnovy. Souvisí též úzce s Poissonovým procesem (viz str.143).

Hustota pravděpodobnosti je pro $x > A$ klesající funkcí x a její tvar závisí na parametru δ (viz obr. 13).

Charakteristická funkce

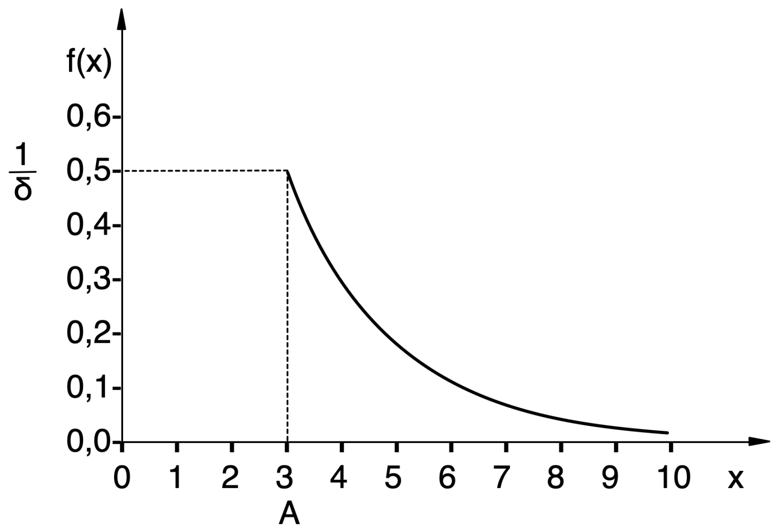
$$\Psi_X(t) = \frac{1}{\delta}\int_A^\infty \exp\big(\mathrm{i}tx - \frac{x-A}{\delta}\big)\mathrm{d}x = (1-\mathrm{i}\delta t)^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}At}. \tag{20.1.2}$$

Uvažujme náhodnou veličinu

$$V = \frac{X-A}{\delta}. \tag{20.1.3}$$

Z (20.1.1) nebo z (20.1.2) ihned vyplývá, že V má rozdělení $\mathrm{E}(0,\, 1)$, které můžeme nazvat *normované (standardizované) exponenciální rozdělení.* Jeho hustota pravděpodobnosti

$$\begin{aligned} \varphi(v) &= \mathrm{e}^{-v}, \quad v > 0, \\ &= 0, \quad v \leq 0. \end{aligned} \tag{20.1.4}$$



Obr. 13: Hustota pravděpodobnosti exponenciálního rozdělení.

20.2 Distribuční funkce a kvantily

Distribuční funkce

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_A^x f(t)\mathrm{d}t = 1 - \exp\big(\frac{x-A}{\delta}\big), \quad x > A, \\ &= 0, \quad x \leq A. \end{aligned} \tag{20.2.1}$$

Pro $100P\%$ kvantil x_P rozdělení $\mathrm{E}(\mathrm{A}, \delta)$ platí

$$x_P = A + \delta v_P, \quad 0 < P < 1, \tag{20.2.2}$$

kde

$$v_P = -\ln(1-P), \quad 0 < P < 1, \tag{20.2.3}$$

je $100P\%$ kvantil rozdělení $\mathrm{E}(0,1)$.

Speciálně medián

$$x_{0,5} = A + \delta \ln 2 = A + 0,693\,15\,\delta. \tag{20.2.4}$$

20.3 Momenty

Střední hodnota veličiny V^r je rovna

$$E(V^r) = \int_0^\infty v^r \mathrm{e}^{-v} \mathrm{d}v = \Gamma(r+1), \qquad r > -1, \tag{20.3.1}$$

takže r-tý obecný moment veličiny (20.1.3) je roven

$$\mu_r'(V) = r!, \qquad r = 0, 1, \dots \tag{20.3.2}$$

Střední hodnota rozdělení E(A, δ) je rovna

$$E(X) = A + \delta E(V) = A + \delta \tag{20.3.3}$$

a pro jeho centrální momenty platí

$$\mu_r(X) = \delta^r E\Big(\frac{X - A - \delta}{\delta}\Big)^r = \delta^r E\big(V - 1\big)^r = \delta^r \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{r}{j} \mu_{r-j}'(V),$$

takže

$$\mu_r(X) = \delta^r r! \sum_{j=2}^{r} (-1)^j \frac{1}{j!}, \qquad r = 2, 3, \dots \tag{20.3.4}$$

Odtud dostáváme

$$\mathrm{var}(X) = \delta^2, \qquad \alpha_3(X) = 2, \qquad \alpha_4(X) = 6. \tag{20.3.5}$$

20.4 Vlastnost exponenciálního rozdělení

Exponenciální rozdělení bývá někdy nazýváno „rozdělení bez paměti“. Tento název je zdůvodněn touto vlastností: Pravděpodobnost, že veličina X s rozdělením $E(0, \delta)$ překročí hodnotu $a + x$, podmíněná jevem $X > a$, je pro libovolné kladné a a x rovna nepodmíněné pravděpodobnosti jevu $X > x$, tj.

$$var(X) = \delta^2, \alpha_3(X) = 2, \alpha_4(X) = 6. \tag{20.4.1}$$

Skutečně

$$\begin{aligned} P(X > a + x | X > a) &= \frac{P(X > a + x,\, X > a)}{P(X > a)} = \frac{e^{-\frac{a+x}{\delta}}}{e^{-\frac{a}{\delta}}} = \\ &= e^{-\frac{x}{\delta}} = P(X > x). \end{aligned}$$

Jestliže X značí dobu do poruchy (dobu života) nějakého zařízení, pak pravděpodobnost, že zařízení, které pracovalo bez poruchy po dobu a, bude pracovat bez poruchy ještě aspoň dalších x hodin, je rovna pravděpodobnosti, že zařízení, které dosud nebylo v provozu, bude pracovat aspoň x hodin, jako by „zapomnělo“ dříve odpracovanou dobu. Tato skutečnost vysvětluje použití exponenciálního rozdělení v teorii spolehlivosti. Exponenciální rozdělení popisuje dobře rozdělení doby života zařízení, u kterých dochází k poruše ze zcela náhodných (vnějších) příčin a nikoliv zákonitě v důsledku opotřebení např. mechanického, únavy materiálu atd. Nahromaděná data potvrzují, že exponenciální rozdělení vykazují často doby života např. elektronických prvků různých zařízení.

Podobný výklad by bylo možné opakovat i pro jiné události než poruchy, vyskytující se náhodně v čase. Má-li doba do výskytu události stejné exponenciální rozdělení, pak informace o tom, že událost nenastala po dobu a hodin, nemění pravděpodobnost výskytu události v příštích x hodinách.

20.5 Dvojitě exponenciální (Laplaceovo) rozdělení

Toto rozdělení má hustotu pravděpodobnosti

$$f(x) = \frac{1}{2\delta} e^{-\frac{|x-A|}{\delta}}, \qquad -\infty < x\infty, \tag{20.5.1}$$

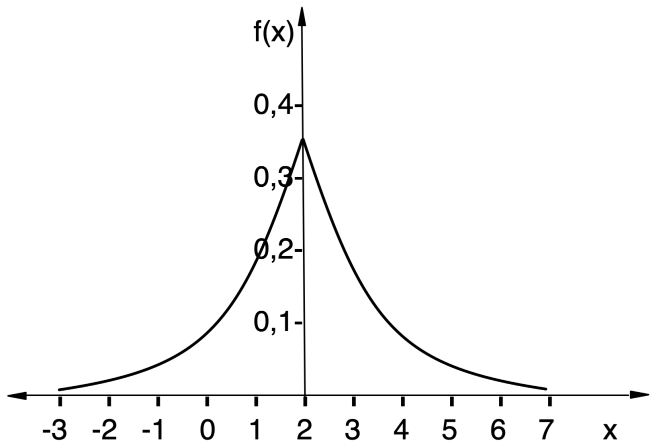
s parametry A a δ, $-\infty < A\infty$, $\delta > 0$. Rozdělení je symetrické podle bodu $x = A$ (obr.14). Modus $\hat{x} = A$.

Protože náhodná veličina $V = |X - A|/\delta$ má rozdělení $\mathrm{E}(0,1)$, je distribuční funkce $F(x)$ veličiny X rovna

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2} P\Big(V > \frac{A-x}{\delta}\Big) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{A-x}{\delta}}, && x \le A, \quad (20.5.2)\\ &= 1 - \frac{1}{2} P\Big(V > \frac{x-A}{\delta}\Big) = 1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{x-A}{\delta}}, && x > A. \end{aligned}$$

Pro $100P\%$ kvantil x_P platí

$$\begin{aligned} x_P &= A + \delta \ln(2P), && 0 < P \le 0,5, \quad (20.5.3)\\ &= A - \delta \ln[2(1-P)], && 0,5 < P < 1. \end{aligned}$$



Obr. 14: Hustota pravděpodobnosti Laplaceova rozdělení.

Střední hodnota a medián

$$E(X) = x_{0,5} = A. \tag{20.5.4}$$

Centrální momenty jsou rovny nule pro r liché a

$$\begin{aligned} \mu_r(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-A)^r f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\delta}\int_A^{\infty}(x-A)^r \mathrm{e}^{-\frac{x-A}{\delta}}\mathrm{d}x = \\ &= \delta^r \int_0^{\infty} v^r \mathrm{e}^{-v}\mathrm{d}v, \qquad r = 2, 4, \ldots, \end{aligned}$$

takže vzhledem k (20.3.2) je

$$\begin{aligned} \mu_r(X) &= 0, \qquad r = 1, 3, \ldots, \\ &= \delta^r r!, \qquad r = 2, 4, \ldots . \end{aligned} \tag{20.5.5}$$

Odtud

$$\mathrm{var}(X) = 2\delta^2, \qquad \alpha_3(X) = 0, \qquad \alpha_4(X) = 3. \tag{20.5.6}$$

20.6 Příklad

Porovnejme pravděpodobnosti $P\big(|x - E(X)|/\sqrt{\mathrm{var}(X)} \leq k\big)$ pro normální a Laplaceovo rozdělení v případě $k = 0,5;\ 1;\ 2;\ 3.$

Pro normální rozdělení jsou hodnoty těchto pravděpodobností uvedeny v příkl. 18.7.3 Pro Laplaceovo rozdělení

$$P\left(\frac{|X-A|}{\sqrt{2\delta^2}} \leq k\right) = P\big(V \leq k\sqrt{2}\big) = 1 - \mathrm{e}^{-k\sqrt{2}}.$$

Dostáváme tedy tyto hodnoty pravděpodobností:

k	0,5	1	2	3
Normální rozdělení	0,382 9	0,682 7	0,955 5	0,997 3
Laplaceovo rozdělení	0,516 9	0,756 9	0,940 9	0,985 6

20.7 Úlohy

20.7.1

Stanovte střední hodnotu a rozptyl veličiny $Y = |X - A|$, má-li X Laplaceovo rozdělení.

$[E(Y) = \delta, \quad \mathrm{var}(Y) = \delta^2.]$

20.7.2

Vyjádřete kvantil x_P Laplaceova rozdělení ve tvaru $x_P = E(X) + k_P\sqrt{var(X)}$. Porovnejte koeficient k_P s odpovídajícím koeficientem u_P pro kvantil $x_P = \mu + u_P\sigma$ normálního rozdělení pro $P = 0,75;\ 0,9;\ 0,95;\ 0,99;\ 0,995$.

$$\begin{aligned} k_P &= \frac{-\ln[2(1-P)]}{\sqrt{2}}, \quad P \geq 0,5, \\ &= -k_{1-P}, \qquad P < 0,5; \end{aligned}$$

P	u_P	k_P
0,75	0,674 5	0,490 1
0,90	1,281 6	1,138 0
0,95	1,644 9	1,628 2
0,99	2,326 3	2,766 2
0,995	2,575 8	3,256 3

Kapitola 21

Weibullovo rozdělení

21.1

Náhodná veličina X má *Weibullovo rozdělení s parametry* δ *a* c, $\delta > 0,\ c > 0$, jestliže její hustota pravděpodobnosti

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{cx^{c-1}}{\delta^c} \exp\Big[-\Big(\frac{x}{\delta}\Big)^c\Big], \qquad x > 0, \\ &= 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\quad x \leq 0. \end{aligned} \tag{21.1.1}$$

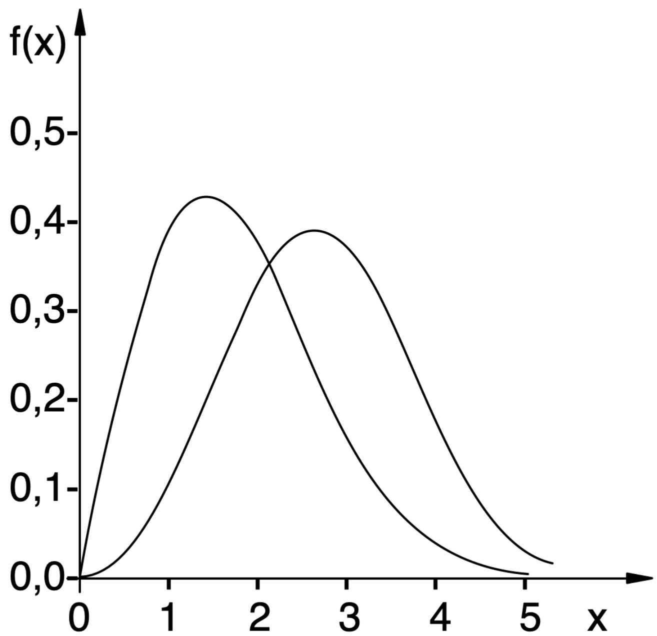
Weibullovo rozdělení s parametry δ a c označíme W(δ, c).

Weibullovo rozdělení mají doby života (doby do poruchy) mnohých strojních součástí a jiných zařízení, pro která nevyhovuje exponenciální rozdělení, zvláště takových, u kterých se projevuje mechanické opotřebení a únava materiálu. Např. většina typů valivých ložisek má dobu života rozdělenou podle (21.1.1) s parametrem c z intervalu $(1; 2)$ a s hodnotou parametru δ závislou na materiálu a na velikosti namáhání (na podmínkách užívání). Také mechanické vlastnosti materiálů, jako např. pevnost, mají často Weibullovo rozdělení.

Rozdělení W(δ, c) je asymetrické (obr. 15) a jeho modus

$$\hat{x} = \delta\left(\frac{c-1}{c}\right)^{\frac{1}{c}} \qquad \text{pro } c > 1. \tag{21.1.2}$$

Speciálním případem Weibullova rozdělení je exponenciální rozdělení E(0, δ) pro $c = 1$.



Obr. 15: Hustota pravděpodobnosti Weibullova rozdělení.

21.2 Distribuční funkce a kvantily

Z (21.1.1) ihned vyplývá, že náhodná veličina

$$V = \left(\frac{X}{\delta}\right)^c \tag{21.2.1}$$

má exponenciální rozdělení E(0, 1). Pro distribuční funkci rozdělení W(δ, c) tedy platí

$$\begin{aligned} F(x) &= 1 - e^{-\frac{x}{\delta}^c}, \qquad x > 0, \\ &= 0, \qquad\qquad\quad x \leq 0. \end{aligned} \tag{21.2.2}$$

Pro kvantily platí vztah $\left(\frac{x_P}{\delta}\right)^c = v_P$, kde v_P je dáno výrazem (20.2.3), takže

$$x_P = \delta\big[-\ln(1-P)\big]^{\frac{1}{c}}, \qquad 0 < P < 1. \tag{21.2.3}$$

Speciálně medián

$$x_{0,5} = \delta(\ln 2)^{\frac{1}{c}} = 0,693\,15^{\frac{1}{c}}\,\delta. \tag{21.2.4}$$

21.3 Momenty

Z (21.2.1) a (20.3.1) vyplývá pro střední hodnotu $\mathrm{E}(X^r)$ rozdělení $\mathrm{W}(\delta,\, c)$

$$E(X^r) = \delta^r E\big(V^{\frac{r}{c}}\big) = \Gamma\Big(\frac{r}{c}+1\Big)\delta^r, \quad \frac{r}{c} > -1.$$

Odtud

$$E(X) = \Gamma\Big(\frac{1}{c}+1\Big)\,\delta, \tag{21.3.1}$$

$$\mathrm{var}(X) = \Big[\Gamma\Big(\frac{2}{c}+1\Big) - \Gamma^2\Big(\frac{1}{c}+1\Big)\Big]\delta^2. \tag{21.3.2}$$

Koeficient šikmosti

$$\alpha_3(X) = \frac{\Gamma\big(1+\frac{3}{c}\big) - 3\Gamma\big(1+\frac{1}{c}\big)\Gamma\big(1+\frac{2}{c}\big) + 2\Gamma^3\big(1+\frac{1}{c}\big)}{\Big[\Gamma\big(1+\frac{2}{c}\big) - \Gamma^2\big(1+\frac{1}{c}\big)\Big]^{\frac{3}{2}}} \tag{21.3.3}$$

je klesající funkcí c a $\alpha_3(X) = 0$ pro $c \doteq 3,6$; tedy pro $c > 36$ je $\alpha_3(X) < 0$.

21.4 Příklady

21.4.1

Má-li životnost X nějakého zařízení Weibullovo rozdělení, pak pravděpodobnost jeho poruchy v krátkém intervalu $(x, x+h)$, podmíněná bezporuchovým provozem do doby x, je rovna [zde $f(t)$ je hustota (21.1.1)]

$$\frac{1}{e^{-\left(\frac{x}{\delta}\right)^c}} \int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t \;\doteq\; \frac{hcx^{c-1}}{\delta^c}. \tag{21.4.1}$$

Výraz (21.4.1) je při $c > 1$ rostoucí funkcí x. To znamená: Čím déle bylo zařízení v provozu, tím větší je pravděpodobnost poruchy v příštím krátkém intervalu. To vysvětluje časté použití Weibullova rozdělení jako modelu pro životnost zařízení podléhajících opotřebení nebo únavě.

Naopak při $c < 1$ je (21.4.1) klesající funkcí x, tzn. čím dále bylo zařízení v provozu, tím menší je pravděpodobnost poruchy v příštím krátkém intervalu. Tak je tomu u zařízení, u nichž k poruchám dochází v důsledku skrytých vad, nikoliv opotřebení, a čím déle je zařízení v provozu, tím více je ověřeno, že skryté vady nemá.

21.4.2

Mějme n vzájemně nezávislých náhodných veličin $X_1, \ldots, X_n$, přičemž každá má rozdělení $W(\delta, c)$ s týmiž parametry δ a c. Stanovme rozdělení náhodné veličiny

$$X = \min(X_1, \ldots, X_n). \tag{21.4.2}$$

Pro každé reálné x zřejmě platí

$$P(X > x) = P(X_1 > x, \ldots, X_n > x) = \prod_{j=1}^{n} P(X_j > x);$$

poslední výraz je důsledkem vzájemné nezávislosti veličin $X_1, \ldots, X_n$.

Použijeme-li výrazů (21.2.2), dostaneme pro distribuční funkci veličiny (21.4.2)

$$\begin{aligned} F(x) &= 1 - P(X > x) = 1 - \prod_{j=1}^{n} \mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{\delta}\right)^c} = 1 - \mathrm{e}^{-\left(n^{\frac{1}{c}} \frac{x}{\delta}\right)^c}, \qquad x > 0, \\ &= 0, \qquad x \leq 0, \end{aligned}$$

takže veličina (21.4.2) má Weibullovo rozdělení s parametry $\delta n^{-\frac{1}{c}}$ a c. Speciálně pro $c = 1$, tj. rozdělení E(0, δ), má veličina (21.4.2) rozdělení E(0, $\frac{\delta}{n}$).

Závisí-li pevnost materiálového vzorku na n elementech, jejichž pevnost je $X_1, \ldots, X_n$, pak pevnost vzorku určuje veličina $X = \min(X_1, \ldots, X_n)$. Obdobně operační životnost systému obsahujícího n složek zapojených v sérii určuje složka s minimální životností.

21.4.3

Stanovme rozdělení náhodné veličiny

$$Y = -\ln \frac{X}{\delta}, \tag{21.4.3}$$

má-li veličina X rozdělení W(δ, c).

Distribuční funkce veličiny Y

$$G(y) = P\Big(- c \ln \frac{X}{\delta} \leq y\Big) = P\Big(X \geq \delta \exp(-\frac{y}{c})\Big)$$

a z (21.2.2) dostáváme

$$G(y) = \exp\big[-\exp(-y)\big], \qquad -\infty < y < \infty. \tag{21.4.4}$$

Odtud

$$g(y) = \frac{\mathrm{d}G(y)}{\mathrm{d}y} = \exp\big[-y - \exp(-y)\big], \qquad -\infty < y < \infty. \tag{21.4.5}$$

Ze vztahu $G(y_P) = P$ vyplývá výraz

$$y_P = -\ln\big(-\ln P\big), \qquad 0 < P < 1, \tag{21.4.6}$$

pro $100P\%$ kvantil veličiny (21.4.3). Následující tabulka uvádí hodnoty y_P pro některá P:

P	0,05	0,1	0,25	0,5	0,75	0,9	0,95
y_P	-1,097 19	-0,834 03	-0,326 63	0,366 51	1,245 90	2,250 37	2,970 20

Rozdělení (21.4.5) je jedním typem tzv. rozdělení extrémních hodnot.

21.5 Úlohy

21.5.1

Vypočtěte pro Weibullovo rozdělení s parametry $\delta = 8$ a $c = 2,5$ hodnoty $F(10)$, $E(X)$, $\mathrm{var}(X)$ a $x_{0,9}$.

$[F(10) = 0,826; \quad E(X) = 7,098; \quad \mathrm{var}(X) = 9,225; \quad x_{0,9} = 11,168.]$

21.5.2

Vypočtěte $E(X), \mathrm{var}(X)$ a $x_{0,9}$ pro náhodnou veličinu (21.4.2), jestliže $\delta = 8$, $c = 2,5$ a $n = 5$.

$[E(X) = 3,729; \quad \mathrm{var}(X) = 2,546; \quad x_{0,9} = 5,867.]$

Kapitola 22

Rozdělení gama

22.1

Náhodná veličina X má *rozdělení gama s parametry* $m > 0$ *a* $\delta > 0$, jestliže její hustota pravděpodobnosti

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\delta^m \Gamma(m)}\, x^{m-1}\, \mathrm{e}^{-\frac{x}{\delta}}, \qquad x > 0, \\ &= 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\quad x \le 0. \end{aligned} \tag{22.1.1}$$

Rozdělení gama s parametry m a δ označíme $\Gamma(m,\, \delta)$.

Tohoto rozdělení se používá v obdobných situacích, v jakých se používá logaritmicko-normálního, případně Weibullova rozdělení. Rozdělení $\Gamma(m,\, \delta)$ je asymetrické (obr. 16) a jeho modus

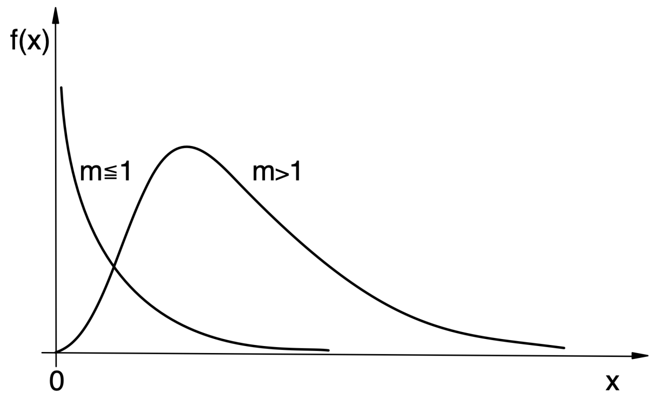
$$\hat{x} = \delta(m-1) \quad \text{pro } m > 1. \tag{22.1.2}$$

Pro $m \le 1$ je hustota (22.1.1) klesající funkcí x. Speciálním případem rozdělení $\Gamma(m,\, \delta)$ je rozdělení $\mathrm{E}(0,\, \delta)$ pro $m = 1$.

Pro přirozené m se rozdělení $\Gamma(m,\, \delta)$ nazývá někdy *Erlangovo rozdělení*; toto rozdělení se často používá v teorii hromadné obsluhy.

Charakteristická funkce rozdělení gama

$$\Psi_X(t) = \frac{1}{\delta^m \Gamma(m)} \int_0^\infty x^{m-1} \exp\left(\mathrm{i}tx - \frac{x}{\delta}\right) \mathrm{d}x = (1 - \mathrm{i}\delta t)^{-m}. \tag{22.1.3}$$



Obr. 16: Hustota pravděpodobnosti rozdělení $\Gamma(m,\,\delta)$.

22.2 Distribuční funkce a momenty

Uvažujme *neúplnou funkci gama* definovanou vztahem

$$\Gamma_x^*(m) = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^x t^{m-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t, \quad x > 0, \quad m > 0. \tag{22.2.1}$$

Distribuční funkci rozdělení $\Gamma(m,\,\delta)$ můžeme pak vyjádřit jako

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \Gamma^*_{\frac{x}{\delta}}(m), & x > 0, \\ &= 0, & x \le 0. \end{aligned} \tag{22.2.2}$$

Střední hodnota veličiny X^r je rovna

$$E(X^r) = \frac{1}{\delta^m \Gamma(m)} \int_0^\infty x^{r+m-1} \mathrm{e}^{-\frac{x}{\delta}}\,\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(m+r)}{\Gamma(m)}\,\delta^r, \qquad r > -m, \tag{22.2.3}$$

takže

$$E(X) = m, \qquad \mathrm{var}(X) = m^2 \tag{22.2.4}$$

a dále

$$\alpha_3(X) = \frac{2}{\sqrt{m}}, \qquad \alpha_4(X) = 3\Big(1 + \frac{2}{m}\Big). \tag{22.2.5}$$

22.3 Rozdělení a-násobku součtu nezávislých veličin

Mějme $n \geq 1$ náhodných veličin, přičemž veličina X_j má rozdělení $\Gamma(m_j,\, \delta)$, $j = 1, \ldots, n$; tzn. všechny veličiny mají rozdělení gama s týmž parametrem δ. V případě $n \geq 2$ nechť veličiny $X_1, \ldots, X_n$ jsou vzájemně nezávislé. Pak náhodná veličina

$$Y = a \sum_{j=1}^{n} X_j, \tag{22.3.1}$$

kde a je kladné číslo, má rozdělení $\Gamma(\sum_{j=1}^{m} m_j,\, a\delta)$.

Důkaz. Charakteristická funkce

$$\Psi_Y(t) = \prod_{j=1}^{n} \Psi_{X_j}(at) = \prod_{j=1}^{n} (1 - \mathrm{i}a\delta t)^{-m_j} = (1 - \mathrm{i}a\delta t)^{-\sum_{j=1}^{n} m_j}$$

což je charakteristická funkce rozdělení $\Gamma\big(\sum_{j=1}^{n} m_j,\, a\delta\big)$.

Distribuční funkce $G(y) = P(Y \leq y)$ se dá vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned} G(y) &= \Gamma^{*}_{y/a\delta}\Big(\sum_{j=1}^{n} m_j\Big), & y > 0, \\ &= 0, & y \leq 0. \end{aligned} \tag{22.3.2}$$

Např. aritmetický průměr $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$ takovýchto nezávislých náhodných veličin má rozdělení $\Gamma\big(\sum_{j=1}^{n} m_j,\, \frac{\delta}{n}\big)$; jestliže navíc $m_1 = \ldots = m_n = m$, má veličina $\overline{X}$ rozdělení $\Gamma\big(nm,\, \frac{\delta}{n}\big)$.

22.4 Příklady

22.4.1

Je-li m přirozené číslo, zjistí se opakovanou integrací per partes, že pro $b > 0$ je

$$\begin{aligned} \int_b^{\infty} t^{m-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t &= \mathrm{e}^{-b}\big[b^{m-1} + (m-1)b^{m-2} + \ldots + (m-1)(m-2)\ldots 1\big] = \\ &= \Gamma(m) \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{j!} \mathrm{e}^{-b} b^j, \qquad b > 0. \end{aligned}$$

Pro přirozené m lze tedy distribuční funkci (22.2.2) vyjádřit ve tvaru

$$F(x) = 1 - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{j!} \mathrm{e}^{-\frac{x}{\delta}} \left(\frac{x}{\delta}\right)^j, \quad x > 0, \tag{22.4.1}$$

takže k určení hodnot $F(x)$ lze použít tabulek distribuční funkce Poissonova rozdělení $\mathrm{Po}\left(\frac{x}{\delta}\right)$. Např. pro rozdělení $\Gamma(5;\, 0,35)$ je

$$F(0,77) = 1 - \sum_{j=0}^{4} \frac{1}{j!} \mathrm{e}^{-2,2} \cdot 2,2^j = 0,072\,5.$$

22.4.2

Mějme náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$, které jsou vzájemně nezávislé a každá má exponenciální rozdělení $E(0, \delta)$. Stanovme rozdělení veličin $X = \sum_{j=1}^{n} X_j$ a $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j$ a jejich střední hodnoty rozptyly.

Podle odstavce 22.3 má veličina X rozdělení $\Gamma(n, \delta)$ (tj. Erlangovo rozdělení), takže

$$E(X) = n\delta, \qquad \mathrm{var}(X) = n\delta^2.$$

Příkladem použití Erlangova rozdělení je situace v teorii hromadné obsluhy, kdy obsluha zákazníka ve stanici obsluhy (např. oprava porouchaného stroje) se dá rozložit na n na sebe navazujících fází, přičemž doby obsluhy v jednotlivých fázích jsou vzájemně nezávislé náhodné veličiny, mající rozdělení $\mathrm{E}(0, \delta)$ s týmž parametrem δ.

Jiným příkladem je doba života systému obsahujícího n složek, pracuje-li jedna složka a ostatní jsou rezervní; po dožití první složky začne ihned pracovat druhá složka po jejím dožití třetí složka atd. Jsou-li doby života složek navzájem nezávislé a má-li každá rozdělení $\mathrm{E}(0, \delta)$ s týmž parametrem δ, má doba života systému Erlangovo rozdělení.

Z odstavce 22.3 vyplývá, že veličina $\overline{X}$ má rozdělení $\Gamma\left(n,\, \frac{\delta}{n}\right)$, takže

$$E(\overline{X}) = \delta, \quad \mathrm{var}(\overline{X}) = \frac{\delta^2}{n}.$$

22.4.3

Uvažujme Poissonovo rozdělení, jehož parametr λ je náhodná veličina mající rozdělení $\Gamma(m, \delta)$. Uvažujeme tedy dvourozměrnou náhodnou veličinu $\mathbf{X} =$

$(X,\lambda)'$, přičemž známe podmíněné rozdělení $P(X=x|\lambda)$ (toto je rozdělení diskrétního typu) a hustotu pravděpodobnosti $g(\lambda)$ (tedy λ má rozdělení spojitého typu). Analogicky ke vztahům (12.1.8) a (12.1.10) platí pro marginální rozdělení veličiny X

$$P(X=x)=\int_A P(X=x|\lambda)g(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda, \qquad x=0,1,\ldots, \tag{22.4.2}$$

kde $A=\{\lambda|g(\lambda)>0\}$.

Pro náš případ je

$$P(X=x)=\int_0^\infty e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}\,\frac{1}{\delta^m\Gamma(m)}\lambda^{m-1}\mathrm{e}^{\frac{-\lambda}{\delta}}\,\mathrm{d}\lambda \tag{22.4.3}$$

a po substituci $t=\frac{\lambda(\delta+1)}{\delta}$ dostáváme

$$P(X=x)=\frac{\Gamma(m+x)}{x!\Gamma(m)}\Big(\frac{1}{\delta+1}\Big)^m\Big(\frac{\delta}{\delta+1}\Big)^x, x=0,1,\ldots,$$

takže veličina X má negativní binomické rozdělení (14.8.1) s parametry m a $\frac{1}{\delta+1}$.

Speciálně pro $m=1$, tj. má-li λ exponenciální rozdělení $E(0,\delta)$, má veličina X geometrické rozdělení s parametrem $\frac{1}{\delta+1}$.

Poissonova rozdělení lze použít např. v situaci, kdy zkoumáme počet poruch určitého typu zařízení za časovou jednotku,jestliže intenzita λ (tj. střední počet určitého typu zařízení za časovou jednotku, jestliže intenzita λ (tj. střední počet poruch za jednotku času) je u každého jednotlivého zařízení táž. Není-li tomu tak, ale λ se náhodně mění od jednoho zařízení k druhému a má-li λ rozdělení gama, dostáváme se k negativnímu binomickému rozdělení. Z obdobných důvodů se často vyskytuje negativní binomické rozdělení jako model pro rozdělení počtu částic na ploše, existuje-li různá intenzita částic v jednotlivých částech plochy.

22.5 Rozdělení χ^2

Pro $m=\frac{\nu}{2}$ a $\delta=2$ dostáváme z (22.1.1)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma(\frac{\nu}{2})}x^{\left(\frac{\nu}{2}\right)^{-1}}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}, && x>0, \\ &= 0, && x\le 0. \end{aligned} \tag{22.5.1}$$

Rozdělení s touto hustotou pravděpodobnosti závisí na jediném parametru ν. Je-li ν přirozené číslo, nazývá se toto rozdělení *rozdělení* χ^2 *(chí-kvadrát) o* ν *stupních volnosti.* Toto rozdělení označíme $\chi^2(\nu)$.

Z (22.2.4) vyplývá, že pro rozdělení $\chi^2(\nu)$ platí

$$E(X) = \nu, \quad \mathrm{var}(X) = 2\nu. \tag{22.5.2}$$

$100P\%$ kvantily $\chi^2_P(\nu)$ rozdělení $\chi^2(\nu)$, tj. hodnoty, pro které platí

$$\int_0^{\chi^2_p(\nu)} f(x)\,\mathrm{d}x = P, \qquad 0 < P < 1, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \tag{22.5.3}$$

jsou tabelovány, např. v [19] pro $\nu = 1\,(1)\ 150\,(5)\ 250\,(10)\ 300\,(20)\ 500\,(50)$ 1000 a $P = 0{,}000\,5;\ 0{,}001;\ 0{,}002\,5;\ 0{,}005;\ 0{,}01;\ 0{,}025;\ 0{,}05;\ 0{,}1;\ 0{,}9;$ $0{,}95;\ 0{,}975;\ 0{,}99;\ 0{,}995;\ 0{,}997\,5;\ 0{,}999;\ 0{,}999\,5.$

Uvažujme nyní náhodnou veličinu U, která má rozdělení $\mathrm{N}(0,1)$. Pak z (13.5.1), (18.2.2) a (18.2.1) vyplývá, že veličina $X = U^2$ má hustotu pravděpodobnosti

$$\begin{aligned} g(x) &= 2\varphi(\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2})} x^{-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}, \qquad x > 0, \\ &= 0, \qquad x \le 0, \end{aligned}$$

takže veličina U^2 má rozdělení $\chi^2(1)$, tj. rozdělení $\Gamma(\frac{1}{2}, 2)$. Rozdělení $\chi^2(\nu)$ má použití především ve statistice.

22.6 Rozdělení radiální chyby

Mějme $p \ge 1$ náhodných veličin $Y_1, \ldots, Y_p$, které jsou vzájemně nezávislé, přičemž veličina Y_j má rozdělení $\mathrm{N}(\mu_j, \sigma^2), j = 1, \ldots, p$.

Uvažujme náhodnou veličinu

$$Z = \Big[\sum_{j=1}^{p} (Y_j - \mu_j)^2\Big]^{\frac{1}{2}} \tag{22.6.1}$$

a stanovme její rozdělení. Tato veličina představuje vzdálenost bodu $(Y_1, \ldots,$ $Y_p)$ od bodu $(\mu_1, \ldots, \mu_p)$ a nazývá se *radiální chyba.*

Náhodné veličiny $U_j = \frac{Y_j - \mu_j}{\sigma}$, $j = 1, \ldots p$, jsou vzájemně nezávislé, každá má rozdělení $\mathrm{N}(0,1)$. Tudíž veličiny $\chi^2_j = U_j^2, j = 1, \ldots, p$, jsou vzájemně nezávislé, každá má rozdělení $\chi^2(1)$, tj. rozdělení $\Gamma(\frac{1}{2}, 2)$. Odtud a z odst. 22.3 vyplývá, že veličina

$$X = \sum_{j=1}^{p} \chi_j^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^{p} (Y_j - \mu_j)^2 = \frac{Z^2}{\sigma^2}$$

má rozdělení $\chi^2(p)$, tj. rozdělení $\chi(\frac{p}{2,2})$. Z (22.5.1) a (13.3.3) pak vyplývá, že veličina $Z = \sigma\sqrt{X}$ má hustotu pravděpodobnosti

$$\begin{aligned} g_p(z) &= \frac{1}{2^{\frac{p-2}{2}}\Gamma(\frac{p}{2})} \frac{z^{p-1}}{\sigma^p} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, \qquad z > 0, \\ &= 0, \qquad z \leq 0. \end{aligned} \tag{22.6.2}$$

Střední hodnota

$$E(Z^r) = \sigma^r E(X^{r/2}) = 2^{\frac{r}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{p+r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \sigma^r, \qquad r > -p. \tag{22.6.3}$$

Pro kvantily z_P veličiny Z platí

$$z_P = \left[\chi_P^2(p)\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad 0 < P < 1. \tag{22.6.4}$$

Speciálním případem (22.6.2) je pro $p = 2$ *Rayleighovo rozdělení*

$$\begin{aligned} g_2(z) &= \frac{z}{\sigma^2} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, \qquad z > 0, \\ &= 0, \qquad z \leq 0, \end{aligned} \tag{22.6.5}$$

pro které

$$E(Z) = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}} \doteq 1,253\,3\,\sigma, \quad \mathrm{var}(Z) = \frac{4-\pi}{2}\sigma^2 \doteq 0,429\,2\,\sigma^2, \tag{22.6.6}$$

$$z_P = \sigma[-2\ln(1-P)]^{\frac{1}{2}}, \qquad 0 < P < 1. \tag{22.6.7}$$

Toto rozdělení se používá např. při zkoumání výstřednosti strojírenských součástek nebo v teorii spolehlivosti.

Pro $p = 3$ dostáváme *Maxwellovo rozdělení*

$$\begin{aligned} g_3(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{z^2}{\sigma^3} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, \qquad z > 0, \\ &= 0, \qquad z \leq 0. \end{aligned} \tag{22.6.8}$$

Toto rozdělení se používá např. při studiu rychlosti molekul. Platí pro ně

$$E(Z) = \sigma\sqrt{\frac{8}{\pi}} \doteq 1,595\,8\,\sigma, \quad \mathrm{var}(Z) = \frac{3\pi - 8}{\pi}\sigma^2 \doteq 0,453\,5\,\sigma^2. \tag{22.6.9}$$

22.7 Úlohy

22.7.1

Nechť náhodná veličina X má rozdělení E$(A,\,\delta)$. Ukažte, že veličina $Y = \frac{2(X-A)}{\delta}$ má rozdělení $\chi^2(2)$.

Nechť náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ jsou vzájemně nezávislé, X_j má rozdělení E$(A_j,\,\delta)$, $j = 1, \ldots, n$. Stanovte rozdělení veličiny $Z = \sum_{j=1}^{n}(X_j - A)$.

[Z má rozdělení $\Gamma(n,)$].

22.7.2

Nechť náhodné veličiny $Y_1, \ldots, Y_n$ jsou vzájemně nezávislé, Y_j má hustotu pravděpodobnosti $f(y_j) = 1$, $0 < y_j < 1$, $f(y_j) = 0$, jinak, $j = 1, \ldots n$. Ukažte, že náhodná veličina $X = -\ln(Y_1 \ldots Y_n)^{\delta}$, $\delta > 0$, má rozdělení $\Gamma(n,\,\delta)$.

Speciálně uvažujte případy $\delta = 1$ a $\delta = \frac{1}{n}$. (Použijte výsledků příkl. 13.3.2 a odst. 22.3.)

22.7.3

Nechť náhodná veličina Z má Rayleighovo rozdělení (22.6.5). Ukažte, že toto rozdělení je speciálním případem Weibullova rozdělení pro $c = 2$ a $\delta = \sigma\sqrt{2}$. Dále ukažte, že veličina $X = \frac{Z^2}{2}$ má exponenciální rozdělení E$(0,\,\sigma^2)$.

22.7.4

Uvažujte náhodnou veličinu $Z = |Y - \mu|$, má-li veličina Y rozdělení N$(\mu,\,\sigma^2)$. Stanovte střední hodnotu a rozptyl veličiny Z. (Veličinu Z lze chápat jako radiální chybu (22.6.1) pro $p = 1$.)

[$E(Z) = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, $\operatorname{var}(Z) = \frac{\pi-2}{\pi}\sigma^2$.]

Kapitola 23

Rozdělení beta

23.1

Náhodná veličina X má *rozdělení beta s parametry* $m_1 > 0$ a $m_2 > 0$, jestliže její hustota pravděpodobnosti

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{B(m_1, m_2)} x^{m_1-1}(1-x)^{m_2-1}, \qquad 0 < x < 1, \\ &= 0, \qquad\qquad \text{jinak.} \end{aligned} \tag{23.1.1}$$

Rozdělení beta s parametry m_1 a m_2 označíme Be(m_1, m_2). Pro $m_1 > 1$ a $m_2 > 1$ modus rozdělení

$$\hat{x} = \frac{m_1 - 1}{m_1 + m_2 - 2}. \tag{23.1.2}$$

Je-li $m_1 < 1$ a $m_2 < 1$, má hustota (23.1.1) v bodě (23.1.2) minimum (v tomto případě se říká, že (23.1.2) je *antimodus* rozdělení beta).

Je-li $m_1 < 1$ a $m_2 > 1$, je (23.1.1) klesající funkcí x; je-li $m_1 > 1$ a $m_2 < 1$, je (23.1.1) rostoucí funkcí x.

Je-li $m_1 = 1$, je (23.1.1) rostoucí funkcí x pro $m_2 < 1$ a klesající funkcí x pro $m_2 > 1$. Je-li $m_2 = 1$, je (23.1.1) rostoucí funkcí x pro $m_1 > 1$ a klesající funkcí x pro $m_1 < 1$.

Pro $m_1 = m_2 = 1$ dostáváme $f(x) = 1, 0 < x < 1$, tj. hustotu rovnoměrného rozdělení. Pro $m_2 = 1$ je $f(x) = m_1 x^{m_1-1}, 0 < x < 1$.

Označíme-li hustotu (23.1.1) symbolem $f(x; m_1, m_2)$, pak zřejmě

$$f(x; m_1, m_2) = f(1-x; m_2, m_1), \qquad -\infty < x < \infty. \tag{23.1.3}$$

Pro $m_1 = m_2$ platí $f(x; m_1, m_1) = f(1-x; m_1, m_1)$, $-\infty < x < \infty$, takže rozdělení Be(m_1, m_1) je symetrické podle bodu $x = 0,5$. Dále z (23.1.3) vyplývá: Má-li veličina X rozdělení Be(m_1, m_2), pak veličina $1 - X$ má rozdělení Be(m_2, m_1).

23.2 Distribuční funkce a momenty

Uvažujme *neúplnou funkci beta* definovanou výrazem

$$I_x(m_1, m_2) = \frac{1}{B(m_1, m_2)} \int_0^x t^{m_1-1}(1-t)^{m_2-1}\,\mathrm{d}t, \;\; 0 < x < 1,\; m_1 > 0,\; m_2 > 0. \tag{23.2.1}$$

Substitucí $y = 1 - t$ dostáváme vztah

$$I_x(m_1, m_2) = 1 - I_{1-x}(m_2, m_1), \quad 0 < x < 1, \quad m_1 > 0, \quad m_2 > 0. \tag{23.2.2}$$

Distribuční funkci rozdělení Be(m_1, m_2) můžeme pak vyjádřit jako

$$\begin{aligned} F(x) &= 0, & x \le 0, \\ &= I_x(m_1, m_2) = 1 - I_{1-x}(m_2, m_1), & 0 < x < 1, \\ &= 1, & x \ge 1. \end{aligned} \tag{23.2.3}$$

Střední hodnota veličiny X^r je rovna

$$\begin{aligned} E(X^r) &= \frac{1}{B(m_1, m_2)} \int_0^1 x^{r+m_1-1}(1-x)^{m_2-1}\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{B(m_1 + r, m_2}{B(m_1, m_2)} = \frac{\Gamma(m_1 + r)\Gamma(m_1 + m_2)}{\Gamma(m_1)\Gamma(m_1 + m_2 + r)}, \qquad r > -m_1. \end{aligned} \tag{23.2.4}$$

Odtud vyplývá, že

$$E(X) = \frac{m_1}{m_1 + m_2}, \quad \mathrm{var}(X) = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2(m_1 + m_2 + 1)}. \tag{23.2.5}$$

Dále

$$\alpha_3(X) = \frac{2(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2 + 2}\Big(\frac{m_1 + m_2 + 1}{m_1 m2}\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{23.2.6}$$

Z (23.2.6) je vidět, že pro $m_2 > m_1$ je $\alpha_3(X) > 0$ a pro $m_1 > m_2$ je $\alpha_3(X) < 0$.

23.3 Příklad

Ukažme, že pro distribuční funkci binomického rozdělení Bi(n, π) platí

$$F(x|n,\pi) = \sum_{t=0}^{n} \binom{n}{t} \pi^t (1-\pi)^{n-t} = I_{1-\pi}(n-x, x+1), \qquad x = 0, 1, \dots, n-1. \tag{23.3.1}$$

Opakovanou integrací per partes dostáváme

$$\int_0^{1-\pi} t^{n-x-1}(1-t)^x \,\mathrm{d}t = \frac{\pi^x (1-\pi)^{n-x}}{n-x} + \frac{x\,\pi^{x-1}(1-\pi)^{n-x+1}}{(n-x)(n-x+1)} +$$
$$+ \dots + \frac{x(x-1)\dots 1}{(n-x)(n-x+1)\dots n}(1-\pi)^n =$$
$$= \frac{(n-x-1)!x!}{n!} \sum_{t=0}^{x} \frac{n!\pi^t(1-\pi)^{n-t}}{(n-t)!t!} = B(n-x, x+1) \sum_{t=0}^{x} \binom{n}{t} \pi^t (1-\pi)^{n-t}.$$

23.4 Úlohy

23.4.1

Stanovte derivace $\frac{\mathrm{d} \ln f(x)}{\mathrm{d}x}$ a $\frac{\mathrm{d}^2 \ln f(x)}{\mathrm{d}x^2}$, kde $f(x)$ je hustota pravděpodobnosti (23.1.1). Pomocí těchto derivací ověřte tvrzení o průběhu funkce $f(x)$ uvedená v odst. 23.1.

23.4.2

Ukažte, že pro distribuční funkci $F(x)$ rozdělení Be$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ platí

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin\sqrt{x}, \qquad 0 < x < 1.$$

23.4.3

Stanovte hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny $Z = \frac{X}{1-X}$, má-li X rozdělení Be(m_1, m_2).

[$g(z) = \frac{1}{B(m_1,m_2)} z^{m_1-1}(1+z)^{-(m_1+m_2)}, z > 0.$]

Kapitola 24

n-rozměrné normální rozdělení

24.1

Uvažujme náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$. Vektor $\mathbf{X}$ má *n-rozměrné normální rozdělení s parametry μ a $\mathbf{\Sigma}$*, jestliže jeho hustota pravděpodobnosti je

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\mathbf{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)'\mathbf{\Sigma}^{-1}(x-\mu)}, \quad -\infty < x_j < \infty, j = 1, \ldots, n, \tag{24.1.1}$$

kde

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \tag{24.1.2}$$

je vektor n reálných čísel, $\mathbf{\Sigma}$ je symetrická pozitivně definitní matice typu (n, n),

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}, & \sigma_{12}, & \ldots, & \sigma_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1}, & \sigma_{n2}, & \ldots, & \sigma_{nn} \end{pmatrix}, \tag{24.1.3}$$

$|\mathbf{\Sigma}|$ je determinant matice $\mathbf{\Sigma}$ a $\mathbf{\Sigma}^{-1}$ je inverzní matice k matici $\mathbf{\Sigma}$ (protože matice $\mathbf{\Sigma}$ je pozitivně definitní, je $|\mathbf{\Sigma}| > 0$ a inverzní matice $\mathbf{\Sigma^{-1}}$ existuje).

Pro n-rozměrné normální rozdělení s parametry $\boldsymbol{\mu}$ a $\mathbf{\Sigma}$ použijeme označení $\mathrm{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Sigma})$. Pro $n = 1$ index zanedbáváme.

Charakteristická funkce

$$\Psi_{\mathbf{X}(\mathbf{t})} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\mathbf{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} exp[i\mathbf{t}'\mathbf{x} - \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})'\mathbf{\Sigma^{-1}}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})] \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$$

je rovna (viz [2], str. 75)

$$\Psi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{t}'\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\mathbf{t}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{t}}. \tag{24.1.4}$$

24.2 Momenty

Charakteristickou funkci (24.1.4) můžeme též vyjádřit ve tvaru

$$\Psi_{\mathbf{X}(\mathbf{t})} = \exp\Big(\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n} t_j\mu_j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sigma_{jl}\, t_j t_l\Big). \tag{24.2.1}$$

Vzhledem k symetrii matice $\boldsymbol{\Sigma}$ jsou pro každé $j, l = 1, \ldots, n$ parciální derivace

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t})}{\partial t_j} &= \Psi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})\big(\mathrm{i}\mu_j - \sum_{l=1}^{n}\sigma_{jl}t_l\big), \\ \frac{\partial^2 \Psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t})}{\partial t_j \partial t_l} &= \Psi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})\Big[\big(i\mu_j - \sum_{l=1}^{n}\sigma_{jl}t_l\big)\big(\mathrm{i}\mu_l - \sum_{j=1}^{n}\sigma_{jl}t_j\big) - \sigma_{jl}\Big]. \end{aligned}$$

Odtud střední hodnoty jsou

$$E(X_j) = \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial \Psi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})}{\partial t_j}\bigg|_{t_1=\ldots=t_n=0} = \mu_j, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{24.2.2}$$

a

$$E(X_j X_l) = \frac{1}{\mathrm{i}^2}\frac{\partial^2 \Psi_{\mathbf{X}(\mathbf{t}}}{\partial t_j \partial t_l}\bigg|_{t_1=\ldots=t_n=0} = \mu_j\mu_l + \sigma_{jl}, \quad j, l = 1, \ldots, n,$$

takže kovariance

$$\mathrm{cov}(X_j, X_l) = E(X_j X_l) - \mu_j\mu_l = \sigma_{jl}, \quad j, l = 1, \ldots, n. \tag{24.2.3}$$

Parametr $\boldsymbol{\mu}$ rozdělení $\mathrm{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ je tedy vektorem středních hodnot a parametr $\boldsymbol{\Sigma}$ je kovarianční matice veličin $X_1, \ldots, X_n$.

24.3 Marginální rozdělení

Hledejme rozdělení náhodného vektoru $\mathbf{X}_* = (X_1, \ldots, X_k)', 1 \leq k < n$, jestliže vektor $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ má rozdělení $\mathrm{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$.

Charakteristická funkce náhodného vektoru $\mathbf{X}_*$ je

$$\Psi_{\mathbf{X}_*}(\mathbf{t}) = \Psi_{\mathbf{X}_*}(t_1, \ldots, t_k) = \Psi_{\mathbf{X}}(t_1, \ldots, t_k, 0, \ldots, 0)$$

a dosadíme-li do (24.2.1) $t_{k+1} = \ldots = t_n = 0$, dostáváme

$$\Psi_{\mathbf{X}_*}(\mathbf{t}) = \exp\Big(\mathrm{i}\sum_{j=1}^{k} t_j\mu_j - \frac{1}{2}\sum_{j=t}^{k}\sum_{l=1}^{k}\sigma_{jl}t_jt_l\Big), \tag{24.3.1}$$

což je charakteristická funkce rozdělení $N_k(\boldsymbol{\mu}_*, \boldsymbol{\Sigma}_*)$, kde

$$\boldsymbol{\mu}_* = (\mu_1, \ldots, \mu_k)', \quad \boldsymbol{\Sigma}_* = \begin{pmatrix} \sigma_{11}, & \ldots & \sigma_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{k1}, & \ldots & \sigma_{kk} \end{pmatrix}. \tag{24.3.2}$$

Je tedy marginálním rozdělením vektoru $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_k)'$ k-rozměrné normální rozdělení s parametry (24.3.2). Toto tvrzení platí i pro náhodné vektory $\mathbf{X}_* = (X_{j_1}, \ldots, X_{j_k})'$, kde $1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq n$; přitom $\boldsymbol{\mu}_* = (\mu_{j_1}, \ldots, \mu_{j_k})'$ a $\boldsymbol{\Sigma}_* = (\sigma_{jl}),\ j, l = j_1, \ldots, j_k$.

Speciálně marginálním rozdělením veličiny X_j je rozdělení $\mathrm{N}(\mu_j, \sigma_{jj}),\ j = 1, \ldots, n$.

Uvažujme nyní rozdělení $\mathrm{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ takové, že

$$\sigma_{jl} = \mathrm{cov}(X_j, X_l) = 0, \quad j, l = 1, \ldots, n, \quad j \neq l, \tag{24.3.3}$$

takže $\boldsymbol{\Sigma}$ je diagonální matice a determinant $|\boldsymbol{\Sigma}| = \sigma_{11}\sigma_{22}\ldots\sigma_{nn}$. Pak (24.1.1) lze vyjádřit ve tvaru

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\sigma_{jj}\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{(x_j-\mu_j)^2}{\sigma_{jj}}} = \prod_{j=1}^{n} f_j(x_j).$$

Má-li tedy vektor $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ rozdělení $\mathrm{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ a jsou-li $X_1, \ldots, X_n$ nekorelované jsou $X_1, \ldots, X_n$ vzájemně nezávislé náhodné veličiny.

24.4 Podmíněné rozdělení

Hustota pravděpodobnosti veličiny X_n při daném $X_J = x_j,\ j = 1, \ldots, n-1$ je rovna

$$f(x_n|x_1, \ldots, x_{n-1}) = \frac{f(x_1, \ldots, x_n)}{f_*(x_1, \ldots, x_{n-1})}, \tag{24.4.1}$$

kde $f(x_1,\dots,x_n)$ je hustota (24.1.1) a $f_*(x_1,\dots,x_{n-1})$ je hustota marginálního rozdělení vektoru $\mathbf{X}_* = (X_1,\dots,X_{n-1})'$, tj. hustota normálního rozdělení $\mathrm{N}_{n-1}(\boldsymbol{\mu}_*, \boldsymbol{\Sigma}_*)$, kde $\boldsymbol{\mu}_* = (\mu_1,\dots,\mu_{n-1})'$ a $\boldsymbol{\Sigma}_* = (\sigma_{jl}),\ j,l = 1,\dots,n-1$. Dosazením v (24.4.1) dostáváme

$$f(x_n|x_1,\dots,x_{n-1}) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\frac{|\boldsymbol{\Sigma}_*|^{\frac{1}{2}}}{|\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}}\exp\Big[-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sigma^{jl}(x_j-\mu_j)(x_l-\mu_l)+ \\ +\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}\sigma_*^{jl}(x_j-\mu_j)(x_l-\mu_l)\Big],$$

kde $\sigma^{jl},\ j,l = 1,\dots,n$ jsou prvky matice $\boldsymbol{\Sigma^{-1}}$ a $\sigma_*^{jl},\ j,l = 1,\dots,n-1$, jsou prvky matice $\boldsymbol{\Sigma}_*^{-1}$. Avšak

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sigma^{jl}(x_j-\mu_j)(x_l-\mu_l) = \\ \sigma^{nn}\big[(x_n-\mu_n)-\sum_{j=1}^{n-1}\beta_{nj}(x_j-\mu_j)\big]^2+\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}\sigma_*^{jl}(x_j-\mu_j)(x_l-\mu_j),$$

kde

$$\beta_{nj} = \sum_{l=1}^{n-1}\sigma_*^{jl}\sigma_{ln}, \qquad j = 1,2,\dots,n-1. \tag{24.4.2}$$

Dále platí $\sigma^{nn} = |\boldsymbol{\Sigma}_*|/|\boldsymbol{\Sigma}|$. Tudíž

$$f(x_n|x_1,\dots,x_{n-1}) = \Big(\frac{\sigma^{nn}}{2pi}\Big)^{\frac{1}{2}}\exp\Big[-\frac{\sigma^{nn}}{2}\big[x_n-\mu_n-\sum_{j=1}^{n-1}\beta_{nj}(x_j-\mu_j)\big]^2\Big], \\ -\infty < x_n < \infty. \tag{24.4.3}$$

Je tedy podmíněným rozdělením veličiny X_n při daném $X_j = x_j, j = 1,\dots,n-1$, normální rozdělení $\mathrm{N}\big(\mu_n+\sum_{j=1}^{n-1}\beta_{nj}(x_j-\mu_j),\ 1/\sigma^{nn}\big)$. Zatímco střední hodnota tohoto rozdělení je lineární funkcí podmínky $(x_1,\dots,x_{n-1})'$, rozptyl na podmínce nezávisí.

24.5 Případ $n = 2$

Pro $n = 2$ označme $\sigma_{11} = \sigma_1^2,\ \sigma_{22} = \sigma_2^2,\ \sigma_{12} = \sigma_{21} = \rho\sigma_1\sigma_2$, kde ρ je *koeficient korelace* veličin X_1 a X_2.

Pro $\sigma_1^2 > 0,\ \sigma_2^2 > 0$ a $\rho^2 \neq 1$ je

$$\sum^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2, & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2, & \sigma_2^2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)} \begin{pmatrix} \sigma_2^2, & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2, & \sigma_1^2 \end{pmatrix}$$

takže

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}} \times$$
$$\times \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \Big[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \Big] \right],$$
$$-\infty < x_j < \infty, \quad j = 1, 2. \quad (24.5.1)$$

Marginálním rozdělením veličiny X_j je rozdělení $\mathrm{N}(\mu_j, \sigma_j^2),\ j = 1, 2$. Podmíněným rozdělením veličiny X_2 při daném $X_1 = x_1$ je rozdělení

$$\mathrm{N}\big[\mu_2 + \beta_{21}(x_1 - \mu_1), \sigma_2^2(1-\rho^2)\big],$$

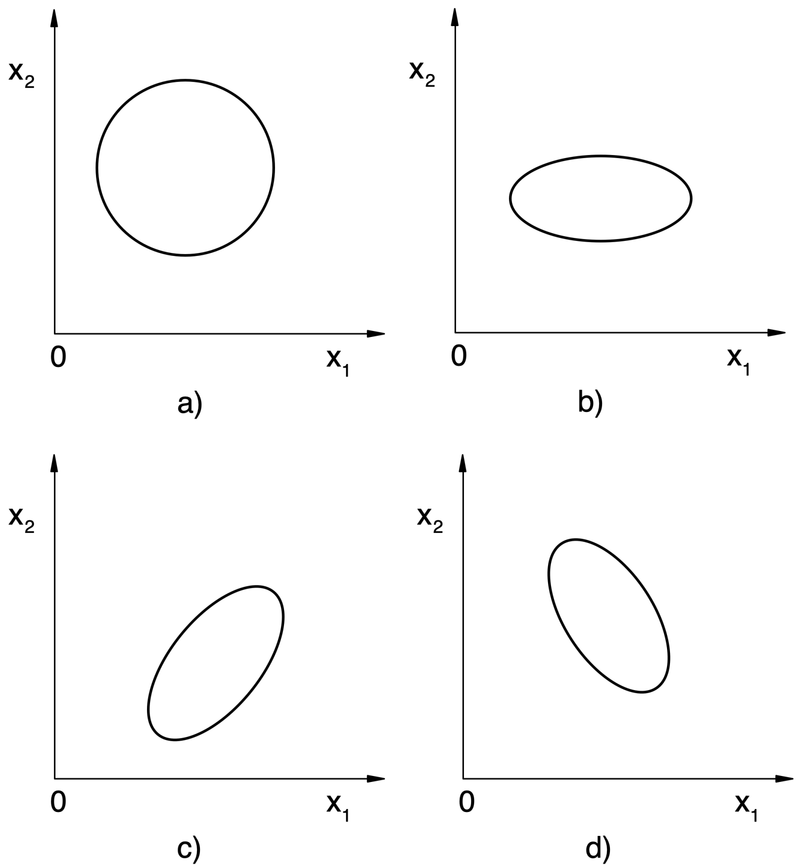
kde $\beta_{21} = \sigma_*^{11}\sigma_{12} = \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$. Obdobně podmíněným rozdělením veličiny X_1 při daném $X_2 = x_2$ je rozdělení

$$\mathrm{N}\big[\mu_1 + \rho\big(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\big)(x_2 - \mu_2), \sigma_1^2(1-\rho^2)\big].$$

Hustota pravděpodobnosti (24.5.1) má maximum v bodě $(\mu_1,\ \mu_2)$. Množina bodů (x_1, x_2) majících tutéž hodnotu hustoty (24.5.1) tvoří elipsu

$$\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\cdot\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2} + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 = c.$$

Na obr. 17 jsou znázorněny tyto elipsy pro některé případy parametrů $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho$.



Obr. 17: Obrysové elipsy;
a) $\rho = 0, \sigma_1 = \sigma_2$; b) $\rho = 0, \sigma_1 > \sigma_2$; c) $\rho > 0, \sigma_1 > \sigma_2$; d) $\rho < 0, \sigma_1 > \sigma_2$.

24.6 Singulární normální rozdělení

n- rozměrné normální rozdělení s hustotou pravděpodobnosti (24.1.1) se nazývá *regulární normální rozdělení.*

Je-li (24.1.3) symetrická pozitivně semidefinitní matice hodnosti $h(\mathbf{\Sigma}) = r < n$, neexistuje inverzní matice $\mathbf{\Sigma}^{-1}$, takže hustotu pravděpodobnosti nelze vyjádřit obdobným způsobem jako (24.1.1). Avšak funkce (24.1.4) má i v tomto případě vlastnosti charakteristické funkce (viz [5], str. 312). Rozdělení s touto charakteristickou funkcí nazývám *singulární normální rozdělení.* Přitom opět $\boldsymbol{\mu}$ má význam vektoru středních hodnot a $\mathbf{\Sigma}$ je kovarianční matice veličin

$X_1, \ldots, X_n$.

Pro $n = 1$ je charakteristická funkce singulárního normálního rozdělení dána výrazem $\Psi_X(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu t}$. Toto však je charakteristická funkce degenerovaného rozdělení, tj. rozdělení náhodné veličiny X, která nabývá hodnoty μ s pravděpodobností 1.

Dvourozměrné normální rozdělení je singulární v případě $\rho^2 = 1$ nebo $\sigma_1^2 = 0$ nebo $\sigma_2^2 = 0$. V případě $\rho^2 = 1$ je druhý řádek matice $\mathbf{\Sigma}(\rho\sigma_2/\sigma_1)$-násobkem prvního řádku, takže $|\mathbf{\Sigma}| = 0$. Rovněž je $|\mathbf{\Sigma}| = 0$ pro $\sigma_1^2 = 0$ nebo pro $\sigma_2^2 = 0$.

24.7 Rozdělení lineárních forem

Nechť náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ *má rozdělení* $N_n(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Sigma})$ *Uvažujme náhodný vektor*

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b}, \tag{24.7.1}$$

kde $\mathbf{A}$ *je matice typu* (p, n) *a* $\mathbf{b}$ *vektor* p *reálných čísel. Potom vektor* (24.7.1) *má rozdělení* $\mathrm{N}_p(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b},\ \mathbf{A}\mathbf{\Sigma}\mathbf{A}')$.

D ů k a z . K důkazu lze použít vět o charakteristické funkci. Zřejmě

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathbf{Y}}(\mathbf{t}) &= \exp(\mathrm{i}\mathbf{t}'\mathbf{b})\Psi_{\mathbf{X}}(\mathbf{A}'\mathbf{t}) = \exp\left(\mathrm{i}\mathbf{t}'\mathbf{b} + \mathrm{i}\mathbf{t}'\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\mathbf{t}'\mathbf{A}\mathbf{\Sigma}\mathbf{A}'\mathbf{t}\right) = \\ &= \exp\left[\mathrm{i}\mathbf{t}'(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}) - \frac{1}{2}\mathbf{t}'(\mathbf{A}\mathbf{\Sigma}\mathbf{A}')\mathbf{t}\right] \end{aligned}$$

což je charakteristická funkce rozdělení $N_p(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b},\ \mathbf{A}\mathbf{\Sigma}\mathbf{A}')$.

Jak je vidět, nikde nebyl činěn předpoklad o tom, zda kovarianční matice $\mathbf{\Sigma}$ je regulární či singulární. Tvrzení tedy platí jak pro regulární, tak i pro singulární n-rozměrné normální rozdělení.

V odstavci 18.6 jsme uvažovali speciální případ pro $p = 1$: Kovarianční matice $\mathbf{\Sigma}$ má prvky $\sigma_{jj} = \sigma_j^2 > 0$, $\sigma_{jl} = 0$ pro $j \neq l$, $j, l = 1, \ldots, n$, a matice $\mathbf{A}$ je řádkový vektor $\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_n)$. Potom $\mathbf{A}\mu = \sum_{j=1}^n a_j\mu_j$ a $\mathbf{A}\mathbf{\Sigma}\mathbf{A}' = \sum_{j=1}^n a_j^2\sigma_j^2$.

V případě libovolné symetrické pozitivně semidefinitní matice má veličina $Y = \sum_{j=1}^n a_j X_j$ rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$, kde

$$\mu = \sum_{j=1}^n a_j\mu_j, \qquad \sigma^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n a_j a_l \sigma_{jl}.$$

24.8 Příklad

Nechť náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ má rozdělení $\mathrm{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, přičemž $\boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2\mathbf{I}$, kde $\sigma^2 > 0$. Nechť $\mathbf{A}$ je ortogonální matice typu (n, n). Pak vektor $\mathbf{Y} = \mathbf{AX}$ má rozdělení $\mathrm{N}_n(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}, \sigma^2\mathbf{I})$, neboť $\mathbf{A\Sigma A}' = \sigma^2\mathbf{AIA}' = \sigma^2\mathbf{I}$. Přitom

$$\sum_{j=1}^{n} Y_j^2 = \mathbf{Y}'\mathbf{Y} = \mathbf{X}'\mathbf{A}'\mathbf{AX} = \mathbf{X}'\mathbf{X} = \sum_{j=1}^{n} X_j^2. \tag{24.8.1}$$

To tedy znamená: *Jsou-li veličiny $X_1, \ldots, X_n$ vzájemně nezávislé, přičemž X_j má rozdělení $N(\mu_j, \sigma^2)$ a je-li $\mathbf{A}$ ortogonální matice typu (n, n), jsou veličiny*

$$Y_j = \sum_{l=1}^{n} a_{jl} X_l, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

vzájemně nezávislé, přičemž Y_j má rozdělení $\mathrm{N}(\sum_{l=1}^{n} a_{jl}\mu_l, \sigma^2)$.

Např. pro $n = 2$,

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma^2, & 0 \\ 0, & \sigma^2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}, & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{4}{\sqrt{20}}, & -\frac{2}{\sqrt{20}} \end{pmatrix},$$

odtud vyplývá, že veličiny

$$Y_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(X_1 + 2X_2), \qquad Y_2 = \frac{1}{\sqrt{20}}(4X_1 - 2X_2)$$

jsou nezávislé, veličina Y_1 má rozdělení $\mathrm{N}\big(\frac{1}{\sqrt{5}}(\mu_1 + 2\mu_2), \sigma^2\big)$ a veličina Y_2 má rozdělení $\mathrm{N}\big(\frac{1}{\sqrt{20}}(4\mu_1 - 2\mu_2), \sigma^2\big)$.

24.9 Úlohy

24.9.1

Nechť náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2)'$ má dvourozměrné normální rozdělení s parametry $\mu_1 = 2,\ \mu_2 = -1,\ \sigma_1^2 = 4,\ \sigma_2^2 = 16,\ \rho = -0{,}8$. Stanovte pravděpodobnosti: $P(1 < X_1 < 4),\ P(1 < X_1 < 4|X_2 = 3),\ P(3 < X_2 < 6),\ P(3 < X_2 < 6|X_1 = -2)$.

$[0{,}533;\ 0{,}307;\ 0{,}119;\ 0{,}146.]$

24.9.2

Nechť X_1 a X_2 jsou nezávislé náhodné veličiny, X_1 má rozdělení $N(\mu_1, \sigma^2)$ a X_2 má rozdělení $N(\mu_2, \sigma^2)$. Stanovte rozdělení vektoru $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)'$, kde $Y_1 = X_1 - X_2$ a $Y_2 = X_1 + X_2$.

[$\mathbf{Y}$ má dvourozměrné normální rozdělení s vektorem středních hodnot $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1 - \mu_2, \mu_1 + \mu_2)$ a kovarianční matici $\sigma^2 \begin{pmatrix} 2, & 0 \\ 0, & 2 \end{pmatrix}$. Veličiny Y_1 a Y_2 jsou tedy nezávislé.]

24.9.3

Nechť náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2)'$ má dvourozměrné regulární normální rozdělení s parametry $\mu_1,\ \mu_2,\ \sigma_1^2,\ \sigma_2^2$ a ρ. Ukažte, že veličiny

$$Y_1 = \frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1}, \quad Y_2 = (1 - \rho^2)^{-\frac{1}{2}} \Big(\frac{X_2 - \mu_2}{\sigma_2} - \rho \frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1} \Big)$$

jsou nezávislé a každá má rozdělení $\mathrm{N}(0, 1)$.

24.9.4

Nechť náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ jsou vzájemně nezávislé a každá má rozdělení $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Uvažujte náhodné veličiny

$$Y_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l=1}^{n} X_l, \quad Y_j = \frac{1}{[j(j-1)]^{\frac{1}{2}}} \Big[\sum_{l=1}^{j-1} X_l - (j-1) X_j \Big], \quad j = 2, \ldots n,$$

a stanovte jejich rozdělení.

[Protože matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}}, & \frac{1}{\sqrt{n}}, & \frac{1}{\sqrt{n}}, & \ldots, & \frac{1}{\sqrt{n}}, & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}, & -\frac{1}{\sqrt{2}}, & 0, & \ldots & 0, & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}}, & \frac{1}{\sqrt{6}}, & \frac{2}{\sqrt{6}}, & \ldots & 0, & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}, & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}, & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}, & \ldots & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}, & \frac{-(n-1)}{\sqrt{n(n-1)}} \end{pmatrix}$$

je ortogonální, jsou veličiny $Y_1, \ldots, Y_n$ vzájemně nezávislé, Y_1 má rozdělení $\mathrm{N}(\mu/\sqrt{n}, \sigma^2)$ a $Y_2, \ldots, Y_n$ mají rozdělení $\mathrm{N}(0, \sigma^2)$.]

Část V

Limitní věty

Kapitola 25

Zákon velkých čísel

25.1

Dosud jsme se zabývali jednotlivými náhodnými veličinami a jednotlivými pravděpodobnosti. V této kapitole se budeme věnovat posloupnostem náhodných veličin a posloupnostem rozdělení pravděpodobnosti. Příklady takovýchto posloupností, zajímavých prakticky i teoreticky, jsou:

1. Budiž Z_n počet výskytu určitého jevu A v n nezávislých opakováních náhodného pokusu, ve kterém A má pravděpodobnost π. Budiž $X_n = \frac{1}{n} Z_n$, tj. relativní četnost výskytu jevu A v n opakováních pokusu.

   Jak se chová X_n při dlouhých sériích opakování?

2. Budiž $\overline{X}_n$ aritmetický průměr n nezávislých měření téže neznámé konstanty (např. ve fyzice nebo geodézii).

   Má rozdělení $\overline{X}_n$ při velkých hodnotách n nějaké užitečné vlastnosti nezávislé na tvaru rozdělení jednotlivých výsledků?

3. V odstavci 15.6 jsme ukázali, že rozdělení $\mathrm{Bi}(n, \pi)$ lze při velkém n a malém π aproximovat Poissonovým rozdělením. To byl příklad limitního (asymptotického) rozdělení pravděpodobnosti, limita rozdělení posloupnosti veličin X_n, kde X_n má rozdělení $\mathrm{Bi}(n, \pi_n)$, pro $n \to \infty, \pi_n \to 0$ tak, že $n\pi_n \to \lambda$.

25.2 Konvergence podle pravděpodobnosti

Mějme tedy posloupnost $\{X_n\}, n \in \mathbf{N}$, náhodných veličin a konstantu c. Zde $\mathbf{N}$ značí množinu přirozených čísel. Řekneme, že *posloupnost* $\{X_n\}, n \in \mathbf{N}$, *konverguje k c podle pravděpodobnosti,* jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ platí

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - c| \geq \varepsilon) = 0, \tag{25.2.1}$$

tzn. že pravděpodobnost libovolné absolutní odchylky od c konverguje k nule s rostoucím n.

Např. je-li $\{X_n\}$ posloupnost náhodných veličin majících normální rozdělení $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2/n),\ n = 1, 2, \ldots,$ je

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - \mu| \leq \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} 2\left[1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right)\right] = 2[1 - \lim_{n\to\infty} \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right)\Bigg] = 0,$$

takže $\{X_n, n \in \mathbf{N}\}$, konverguje k μ podle pravděpodobnosti.

25.3 Slabý zákon velkých čísel

Mějme posloupnost $\{X_n\}$ náhodných veličin a uvažujme posloupnost $\{X_n - E(X_n)\}$ odchylek veličin X_n od svých středních hodnot $E(X_n), n \in \mathbf{N}$. Označme

$$Z_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\big[X_j - E(X_j)\big], \qquad n \in \mathbf{N}. \tag{25.3.1}$$

Řekneme, že *pro posloupnost* $\{X_n\}, n \in \mathbf{N}$, *platí slabý zákon velkých čísel*, jestliže posloupnost $\{Z_n\}, n \in \mathbf{N}$, konverguje k nule podle pravděpodobnosti, tj. jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ je

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} E(X_j)\right| \geq \varepsilon\right] = 0. \tag{25.3.2}$$

V dalším uvedeme některé podmínky, za nichž platí zákon velkých čísel. Užitečným nástrojem k ověření, zda určitá posloupnost náhodných veličin splňuje zákon velkých čísel, je Čebyševova nerovnost.

25.4 Čebyševova nerovnost

Nechť náhodná veličina X má střední hodnotu $E(X)$ a konečný rozptyl $var(X)$. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ platí

$$P\Big(\big|X - E(X)\big| \geq \varepsilon\Big) \leq \frac{var(X)}{\varepsilon^2}. \tag{25.4.1}$$

Důkaz proveďme tak, že uvažujeme náhodnou veličinu Y mající hustotu pravděpodobnosti $f(y)$ a konečný druhý obecný moment $E(Y^2)$. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ platí

$$E(Y^2) = \int_{|y|<\varepsilon} y^2 f(y)\,\mathrm{d}y + \int_{|y|\geq\varepsilon} y^2 f(y)\,\mathrm{d}y \geq \int_{|y|\geq\varepsilon} y^2 f(y)\,\mathrm{d}y \geq$$

$$\geq \varepsilon^2 \int_{|y|\geq\varepsilon} f(y)\,\mathrm{d}y = \varepsilon^2 P(|Y| \geq \varepsilon).$$

Položme $Y = X - E(X)$. Pak $E(Y^2) = \mathrm{var}(X)$ a dostaneme nerovnost (25.4.1).

Pro náhodnou veličinu s diskrétním rozdělením je důkaz obdobný; místo integrálů se uvažují součty $\sum P(Y = y)$ přes obory $|y| < \varepsilon$ a $|y| \geq \varepsilon$.

25.5 Čebyševova věta

Nechť $\{X_n\} n \in \mathbf{N}$, je posloupnost náhodných veličin takových, že

$$\mathrm{var}(X_j) \leq K, \quad \mathrm{cov}(X_j, X_l) = 0, \quad j \neq l, \quad j, l = 1, 2, \dots, \tag{25.5.1}$$

kde $K < \infty$. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ platí (25.3.2).

Důkaz. Uvažujme veličiny (25.3.1). Pak

$$E(Z_n) = 0, \quad \mathrm{var} Z_n = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{var} X_j \leq \frac{K}{n}, \quad n \in \mathbf{N},$$

a podle Čebyševovy nerovnosti je

$$P(|Z_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{var(Z_n)}{\varepsilon^2} \leq \frac{K}{n\varepsilon^2}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Protože $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{K}{n\varepsilon^2}\right) = 0$, je

$$\lim_{n\to\infty} P\big(|Z_n| \geq \varepsilon\big) = 0.$$

25.6 Dva speciální případy

Uvažujme nyní dva důsledky Čebyševovy věty:

25.6.1 Bernoulliova věta

Nechť $\{X_n\}, n \in \mathbf{N}$, *je posloupnost vzájemně nezávislých náhodných veličin majících alternativní rozdělení* (14.2.2) *s týmž parametrem* $\pi,\ 0 < \pi < 1$. *Pak pro každé* $\varepsilon > 0$ *platí*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j - \pi\right| \geq \varepsilon\right) = 0. \tag{25.6.1}$$

Důkaz. Podle (14.4.2) je $E(X_j) = \pi,\ \mathrm{var}(X_j) = \pi(1-\pi),\ j = 1, 2, \ldots,$ a protože veličiny X_j jsou vzájemně nezávislé, je $\mathrm{cov}(X_j, X_l) = 0,\ j \neq l,\ j, l = 1, 2, \ldots$.

Tudíž předpoklady Čebyševovy věty jsou splněny.

Připomeňme, že veličina $\sum_{j=1}^{n} X_j$ představuje počet úspěchů (četnost výskytu určitého jevu A) v n nezávislých opakováních téhož pokusu, je-li π pravděpodobnost úspěchu.

25.6.2

Nechť $\{X_n\},\ n \in \mathbf{N}$, *je posloupnost náhodných veličin takových, že*

$$E(X_j) = \mu,\quad \mathrm{var}(X_j) = \sigma^2 \leq K,\quad \mathrm{cov}(X_j, X_l) = 0,\quad j \neq l,\quad j, l = 1, 2, \ldots. \tag{25.6.2}$$

Pak z Čebyševovy věty přímo vyplývá, že *pro každé* $\varepsilon > 0$ *je*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j - \mu\right| \geq \right) = 0. \tag{25.6.3}$$

Jsou-li veličiny $X_1, X_2, \ldots$ vzájemně nezávislé a mají-li stejné rozdělení s konečnou střední hodnotou μ, platí (25.6.3) i pro případ, kdy rozptyl σ^2 není konečný (Chinčinova věta), viz [2], str. 183.

25.7 Příklady

25.7.1

V příkladě 20.6 jsme porovnali pravděpodobnosti

$$P\Big[\big|X - E(X)\big| < k\sqrt{\operatorname{var}(X)}\Big]$$

pro normální a Laplaceovo rozdělení pro některá k. Porovnejme nyní tyto hodnoty s hodnotami získanými pomocí Čebyševovy nerovnosti.

Z (25.4.1) vyplývá, že

$$P\Big[\big|X - E(X)\big| < k\sqrt{\operatorname{var}(X)}\Big] \geq 1 - \frac{1}{k^2} = A \qquad (25.7.1)$$

a pro uvažovaná k dostáváme tyto hodnoty:

k	0,5	1	2	3
A	0	0	0,75	0,889

Z (25.7.1) vyplývá, že podle Čebyševovy nerovnosti

$$P\Big[\big|X - E(X)\big| < k\sqrt{\operatorname{var}(X)}\Big] \geq 0$$

pro každé $0 < k \leq 1$, takže pro takováto k nedává Čebyševova nerovnost užitečné výsledky.

25.7.2

Mějme posloupnost $\{X_n\}, n \in \mathbf{N}$, vzájemně nezávislých náhodných veličin majících rozdělení $\chi^2(1)$.

Pro tuto posloupnost platí podle (25.6.3) (neboť $\mu = 1,\ \sigma^2 = 2$) zákon velkých čísel, takže pro každé $\varepsilon > 0$ je

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j - 1\right| \geq \varepsilon\right) = 0. \qquad (25.7.2)$$

Avšak veličina $\chi_n^2 = \sum_{j=1}^{n} X_j$ má podle odst. 22.6 rozdělení $\chi^2(n)$. Z (25.6.3) pak vyplývá, že posloupnost $\left\{\frac{1}{n}\chi_n^2\right\}$, $n \in \mathbf{N}$, konverguje k $c = 1$ podle pravděpodobnosti.

25.7.3

Mějme posloupnost $\{X_n\},\ n \in \mathbf{N}$, vzájemně nezávislých náhodných veličin majících hustotu pravděpodobnosti

$$f(x_n) = \frac{x_n}{\xi\sqrt{\xi^2 - x_n^2}}, \quad 0 < x_n < \xi, \quad n \in \mathbf{N},$$

kde ξ je kladná konstanta. Veličina X_n^r má střední hodnotu

$$E(X_n^r) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{r+2}{2}\right)\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{r+3}{2}\right)}\,\xi^r, \quad r > -2, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Uvažujme nyní posloupnost $\{Y_n\}$, kde $Y_n = 1/X_n,\ n \in \mathbf{N}$. Veličiny $Y_1, Y_2, \ldots$ jsou vzájemně nezávislé, všechny mají stejné rozdělení se střední hodnotou $E(Y_n) = \pi/(2\xi),\ n \in \mathbf{N}$, avšak jejich rozptyl není konečný.

Podle Chinčinovy věty pro posloupnost $\{Y_n\}, n \in \mathbf{N}$, platí slabý zákon velkých čísel, tj. platí

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{X_j} - \frac{\pi}{2}\frac{1}{\xi}\right| \geq \varepsilon\right) = 0. \tag{25.7.3}$$

Tudíž posloupnost $\left\{\frac{2}{\pi}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{X_j},\ n \in \mathbf{N}\right\}$, konverguje k $1/\xi$ podle pravděpodobnosti.

25.8 Úlohy

25.8.1

Nechť $\{X_n\}, n \in \mathbf{N}$, je posloupnost nekorelovaných náhodných veličin se středními hodnotami a rozptyly

$$E(X_n) = \mu, \ \ \mathrm{var}(X_n) = \frac{\sigma^2}{n^p}, \quad n \in \mathbf{N},$$

kde $p > 0,\ \mu$ a $\sigma^2 > 0$ jsou konstanty. Ukažte, že pro posloupnost $\{X_n\}$ platí slabý zákon velkých čísel.

25.8.2

Nechť $\{X_n\}$ je posloupnost vzájemně nezávislých náhodných veličin majících rozdělení $\Gamma(m,\,\delta)$ s týmiž parametry m a δ. Stanovte, pro jaká m posloupnost $\{\frac{m-1}{n}\sum_{j=1}^{n}\},\ n \in \mathbf{N}$, konverguje k $1/\delta$ podle pravděpodobnosti.

$[m > 1.]$

Kapitola 26

Centrální limitní věta

26.1

V různých úlohách počtu pravděpodobnosti a matematické statistiky nás zajímá rozdělení součtu nebo průměru n nezávislých náhodných veličin. V některých případech se přesné rozdělení tohoto součtu stanoví snadno (např. pro veličiny mající Poissonovo rozdělení nebo rozdělení gama), někdy je však stanovení tohoto přesného rozdělení obtížné.

Pro velká n lze za dosti obecných podmínek aproximovat toto rozdělení rozdělením normálním. Normálním rozdělením jako asymptotickým rozdělením se zabývají centrální limitní věty. Uvedeme v dalším některé z nich.

26.2 Konvergence v distribuci

Mějme posloupnost $\{F_n(x)\}$ distribučních funkcí náhodných veličin $\{X_n\}$, $n \in \mathbf{N}$. Dále uvažujme náhodnou veličinu X, která má distribuční funkci $F(x)$.

Řekneme, že *posloupnost* $\{X_n\}, n \in \mathbf{N}$*, konverguje k* X *v distribuci, jestliže*

$$\lim_{n\to\infty} F_n(X) = F(X) \tag{26.2.1}$$

ve všech bodech spojitosti funkce $F(x)$.

Distribuční funkce $F(x)$ se pak nazývá *limitní* nebo *asymptotická distribuční funkce.*

Řekneme tedy, že *posloupnost* $\{X_n\}, n \in \mathbf{N}$, *konverguje v distribuci k rozdělení* N$(\mu,\ \sigma^2)$ (nebo jinak, že *veličina* X_n *má asymptoticky normální rozdělení* N$(\mu,\ \sigma^2)$), jestliže

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \Phi\Big(\frac{x-\mu}{\sigma}\Big), \qquad -\infty < x < \infty, \tag{26.2.2}$$

kde $\Phi(u)$ je distribuční funkce (18.3.1) rozdělení N(0, 1).

26.3 Lindebergova-Lévyho věta

Nechť $\{X_n\}, n \in \mathbf{N}$, *je posloupnost vzájemně nezávislých náhodných veličin majících totéž rozdělení se střední hodnotou* μ *a konečným rozptylem* σ^2. *Pak posloupnost* $\{Y_n\}$, *kde*

$$Y_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\Big(\sum_{j=1}^{n} X_j - n\mu\Big), \qquad n \in \mathbf{N}, \tag{26.3.1}$$

konverguje v distribuci k rozdělení N(0, 1).

D ů k a z. Uvažujme veličiny $U_j = (X_j - \mu)/\sigma,\ j = 1, 2, \ldots$. Tyto veličiny jsou vzájemně nezávislé a všechny mají totéž rozdělení s nulovou střední hodnotou a jednotkovým rozptylem. Označme $\Psi(t)$ charakteristickou funkci veličin $U_1,\ U_2, \ldots$.

Tato charakteristická funkce se dá vzhledem k (10.6.6) vyjádřit ve tvaru

$$\Psi(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + Z_2(t),$$

kde $\lim_{t\to 0} Z_2(t)/t^2 = 0$.

Pro charakteristickou funkci $\Psi_n(t)$ veličiny $Y_n = \sum_{j=1}^{n} U_j/\sqrt{n}$ pak platí

$$\Psi_n(t) = \Big[\Psi\Big(\frac{t}{\sqrt{n}}\Big)\Big]^n = \Big[1 - \frac{t^2}{2n} + Z_2\Big(\frac{t}{\sqrt{n}}\Big)\Big]^n.$$

Protože pro každé pevné t je $lim_{n\to\infty} n Z_2(t/\sqrt{n}) = 0$, je

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \Psi_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}};$$

to je však charakteristická funkce rozdělení $\mathrm{N}(0,1)$. Z limitní věty pro charakteristické funkce (str. 45) pak vyplývá, že $\{Y_n\},\ n \in \mathbf{N}$, konverguje v distribuci k rozdělení $\mathrm{N}(0,1)$.

Z Lindebergovy-Lévyho věty vyplývá, že pro dostatečně velká n lze rozdělení veličiny $\sum_{j=1}^{n} X_j$ aproximovat rozdělením $\mathrm{N}\big(\mu,\ \frac{\sigma^2}{n}\big)$.

Speciálním případem Lindebergovy-Lévyho věty je *Moivreova-Laplaceova věta:*

Nechť $\{X_n\}, n \in \mathbf{N}$, je posloupnost vzájemně nezávislých náhodných veličin majících alternativní rozdělení (14.2.2) s týmž parametrem $\pi,\ 0 < \pi < 1$. Pak posloupnost $\{Y_n\}$, kde

$$Y_n = \frac{1}{\big[n\pi(1-\pi)\big]^{\frac{1}{2}}}\Big(\sum_{j=1}^{n} X_j - n\pi\Big), \qquad n \in \mathbf{N}, \tag{26.3.2}$$

konverguje v distribuci k rozdělení $N(0,1)$.

26.4 Ljapunovova věta

Nechť $\{X_n\}, n \in \mathbf{N}$, je posloupnost vzájemně nezávislých náhodných veličin, přičemž veličina X_n má střední hodnotu μ_n, rozptyl σ_n^2 a třetí absolutní centrální moment $E(|X_n - \mu_n)|^3,\ n \in \mathbf{N}$. Je-li splněna podmínka

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Big[\sum_{j=1}^{n} E\big(|X_j - \mu_n|^3\big)\Big]^{\frac{1}{3}}}{\big(\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2\big)^{\frac{1}{2}}} = 0, \tag{26.4.1}$$

pak posloupnost $\{Y_n\}$, *kde*

$$Y_n = \frac{\sum_{j=1}^{n} X_j - \sum_{j=1}^{n} \mu_j}{\big(\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2\big)^{\frac{1}{2}}}, \qquad n \in \mathbf{N}, \tag{26.4.2}$$

konverguje v distribuci k rozdělení $N(0,1)$.

D ů k a z viz [23], str. 376.

26.5 Příklady

26.5.1

V aplikacích se vyskytuje řada náhodných veličin, jejichž rozdělení lze aproximovat normálním rozdělením. Jednou z oblastí, v nichž se často používá normálního rozdělení, je teorie chyb měření. Předpokládejme, že

(a) náhodná chyba měření je součtem velkého počtu tzv. elementárních chyb, způsobených různými příčinami,

(b) elementární chyby jsou vzájemně nezávislé,

(c) každá elementární chyba může nabývat hodnoty ε s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ a hodnoty - ε s pravděpodobností $\frac{1}{2}$, kde $0 < |\varepsilon| < \infty$.

Označíme-li X náhodnou chybu měření a $X_1, X_2, \ldots$ elementární chyby, je

$$E(X_n) = 0, \quad \mathrm{var}(X_n) = \varepsilon^2.$$

Z Lindebergovy-Lévyho věty pak vyplývá, že pro dostatečné velká n lze rozdělení veličiny $X = \sum_{j=1}^{n} X_j$ aproximovat rozdělením $\mathrm{N}(0,\, \sigma^2)$, kde $\sigma^2 = n\varepsilon^2$ je parametr charakterizující přesnost měřicí metody.

26.5.2

Uvažujme náhodné veličiny $X_1, X_2, \ldots$, které jsou vzájemně nezávislé, každá má rovnoměrné rozdělení $f(x_n) = 1$ pro $0 < x_n < 1,\ f(x_n) = 0$, jinak. Potom střední hodnoty a rozptyly

$$E(X_n) = \frac{1}{2}, \quad \mathrm{var}(X_n) = \frac{1}{12}, \qquad n \in \mathbf{N}.$$

Podle Lindebergovy-Lévyho věty má veličina

$$U_n = \frac{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j - \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{12}\right)^{\frac{1}{2}}}\sqrt{n} = \left(\sqrt{\frac{3}{n}}\right)\left(2\sum_{j=1}^{n} X_j - n\right), \qquad n \in \mathbf{N},$$

asymptoticky normální rozdělení $\mathrm{N}(0, 1)$.

Tohoto výsledku se využívá např. při generování normálních odchylek pomocí pseudonáhodných čísel.

26.5.3

Centrální limitní věty se zabývají asymptotickým rozdělením součtu náhodných veličin. Nechť nyní $\{X_n\}, n \in \mathbf{N}$, je posloupnost vzájemně nezávislých pozitivních náhodných veličin majících totéž rozdělení. Označme

$$\mu^* = E(\ln X_j), \quad \sigma^{*2} = \mathrm{var}(\ln X_j), \quad j = 1, 2, \dots . \tag{26.5.1}$$

Nechť σ^{*2} je konečné. Uvažujme náhodné veličiny

$$Z_n = \prod_{j=1}^{n} X_j, \quad n \in \mathbf{N}. \tag{26.5.2}$$

Podle Lindebergovy-Lévyho věty posloupnost $\{Y_n\}$, kde

$$Y_n = \frac{\sum_{j=1}^{n} \ln X_j - n\mu^*}{\sigma^* \sqrt{n}} = \frac{\ln Z_n - n\mu^*}{\sigma * \sqrt{n}}, \quad n \in \mathbf{N}, \tag{26.5.3}$$

konverguje v distribuci k rozdělení $\mathrm{N}(0, 1)$.

Pro dostatečně velká n lze tedy rozdělení veličiny $\ln Z_n = \sum_{j=1} \ln X_j$ aproximovat rozdělením $\mathrm{N}(n\mu^*,\, n\sigma^{*2})$. Z odstavce 19.1 pak vyplývá, že pro dostatečně velká n lze rozdělení veličiny $Z_n = \exp\left(\sum_{j=1}^{n} \ln X_j\right)$ aproximovat rozdělením $\mathrm{LN}\big(n\mu^*,\, n\sigma^{*2}\big)$.

26.6 Aproximace některých diskrétních rozdělení rozdělením normálním

Uvažujme součet $Z_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$ vzájemně nezávislých náhodných veličin, majících alternativní rozdělení (14.2.2) s týmž parametrem π. Podle odst. 14.5 má Z_n rozdělení $\mathrm{Bi}(n, \pi)$. Z Moivreovy-Laplaceovy věty vyplývá, že pro dostatečně velká n lze rozdělení veličiny Z_n aproximovat normálním rozdělením $\mathrm{N}\big(n\pi,\, n\pi(1-\pi)\big)$.

Vhodnost aproximace binomického rozdělení rozdělením normálním se zlepšuje s rostoucím rozptylem $n\pi(1-\pi)$ rozdělení $\mathrm{Bi}(n, \pi)$. Jako empirické pravidlo se doporučuje použít normální aproximace pro n a π splňující podmínku

$$n\pi(1-\pi) > 9. \tag{26.6.1}$$

Dále se aproximace zlepšuje zavedením tzv. opravy pro spojitost, podle níž pro nezáporná celá čísla a a b

$$P(a \leq Z_n \leq b) = P\Big(a - \frac{1}{2} \leq Z_n \leq b + \frac{1}{2}\Big) \simeq$$
$$\simeq \Phi\left(\frac{b + \frac{1}{2} - n\pi}{\big[n\pi(1-\pi)\big]^{\frac{1}{2}}}\right) - \Phi\left(\frac{a - \frac{1}{2} - n\pi}{\big[n\pi(1-\pi)\big]^{\frac{1}{2}}}\right). \quad (26.6.2)$$

Negativní binomické rozdělení je přirozené n rozdělením součtu n vzájemně nezávislých náhodných veličin, z nichž každá má geometrické rozdělení s týmž parametrem π (viz příkl. 14.9.2. Z Lindebergovy-Lévyho věty pak vyplývá, že pro dostatečně velká n lze negativní binomické rozdělení s parametry n a π (pro n přirozené) aproximovat rozdělením $N\big(n(1-\pi)/\pi,\ n(1-\pi)/\pi^2\big)$.

Poissonovo rozdělení $Po(\lambda)$ lze považovat za rozdělení veličiny $Z_n = \sum_{j=1}^{[\lambda]} X_j$, kde veličiny X_j jsou vzájemně nezávislé, každá z nich má rozdělení $\mathrm{Po}(\lambda/[\lambda])$ (viz odst. 15.4).

Z Lindebergovy-Lévyho věty pak vyplývá, že pro dostatečně velká λ lze rozdělení $\mathrm{Po}(\lambda)$ aproximovat rozdělením $\mathrm{N}(\lambda,\ \lambda)$. Obdobně jako v případě aproximace binomického rozdělení se doporučuje použít normální aproximace pro rozdělení $\mathrm{Po}(\lambda)$, jestliže $\lambda > 9$ a uvažuje se též oprava pro spojitost, podle níž pro nezáporná celá čísla a a b

$$P(a \leq Z_n \leq b) \simeq \Phi\left(\frac{b + \frac{1}{2} - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) - \Phi\left(\frac{a - \frac{1}{2} - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right). \quad (26.6.3)$$

V odstavci 16.3 jsme uvažovali aproximaci hypergeometrického rozdělení s parametry $N,\ M,\ n$ rozdělením $\mathrm{Bi}(n,\ M/n)$ pro malá n/N. Je-li n/N malé (řekněme $n/N < 0,1$) a je-li splněna podmínka (26.6.1), kde $\pi = M/N$, lze hypergeometrické rozdělení aproximovat rozdělením $\mathrm{N}\big(nM/N,\ \mathrm{var}(X)\big)$, kde $\mathrm{var}(X)$ je dáno výrazem (16.2.3).

26.7 Příklady

26.7.1

Stanovme pravděpodobnosti $P(40 < X \leq 60)$ a $P(X = 50)$, má-li X rozdělení $\mathrm{Bi}(100,\ \frac{1}{2})$.

Použijme aproximace normálním rozdělením. Pak

$$P(40 \leq X \leq 60) \simeq \Psi\left(\frac{60+\frac{1}{2}-50}{5}\right) - \Psi\left(\frac{40-\frac{1}{2}-50}{5}\right) =$$
$$= \Psi(2,1) - \Psi(2,1) = 2\Psi(2,1) - 1 = 0,964$$

a

$$P(X = 50) = P(X \leq 50) - P(X \leq 49) =$$
$$= \Psi\left(\frac{50+\frac{1}{2}-50}{5}\right) - \Psi\left(\frac{49+\frac{1}{2}-50}{5}\right) = \Psi(0,1) - \Psi(-0,1) = 0,080.$$

26.7.2

Nechť náhodná veličina X má hypergeometrické rozdělení s parametry $N = 1\,000,\ M = 200,\ n = 80$. Stanovme pravděpodobnost $P(X \leq 20)$. Protože

$$E(X) = 80 \cdot 0,2 = 16, \quad \mathrm{var}(X) = 80 \cdot 0,2 \cdot 0,8 \cdot \frac{920}{999} = 11,79,$$

je

$$P(X \leq 20) \simeq \Psi\left(\frac{20+\frac{1}{2}-16}{\sqrt{11,79}}\right) = \Psi(1,31) = 0,905.$$

26.8 Úlohy

26.8.1

Použitím normální aproximace stanovte pravděpodobnost $P(8 \leq X \leq 20)$ pro Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda = 12$. Porovnejte tuto aproximativní hodnotu s hodnotou určenou pomocí tabulek [19].

[Aproximace $0,896\,0$; z tabulek $0,898\,9$.]

26.8.2

Jakým normálním rozdělením lze pro dostatečně velká n aproximovat rozdělení $\chi^2(n)$? Použijte této aproximace pro stanovení kvantilu $\chi_0, 95^2(50)$.

[Rozdělením $N(n, 2n)$; $\chi^2_{0,95}(50) \simeq 66,45$.]

26.8.3

Nechť $X_1, \ldots, X_{48}$ jsou vzájemně nezávislé náhodné veličiny, každá nechť má rovnoměrné rozdělení na intervalu $(0,1)$. Stanovte pravděpodobnost $P(0,4 \leq \overline{X} \leq 0,6$, kde $\overline{X} = \frac{1}{48}\sum_{j=1}^{48} X_j$ (použijte normální aproximace).

$[0,984]$

26.8.4

Nechť $\{X_n\}, n \in \mathbf{N}$, je posloupnost náhodných veličin, které jsou vzájemně nezávislé a všechny mají střední hodnotu μ a rozptyl σ^2. Jak velké n je třeba uvažovat, aby (při použití aproximace normálním rozdělením) platilo

$$P(|\overline{X} - \mu| \leq 0,1\sigma) \geq 0,95,$$

kde $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j,\ n \in \mathbf{N}$?

$[n \geq 385.]$

Část VI

Základy teorie náhodných procesů

Kapitola 27

Náhodné procesy a jejich klasifikace

27.1 Pojem náhodného procesu; příklady

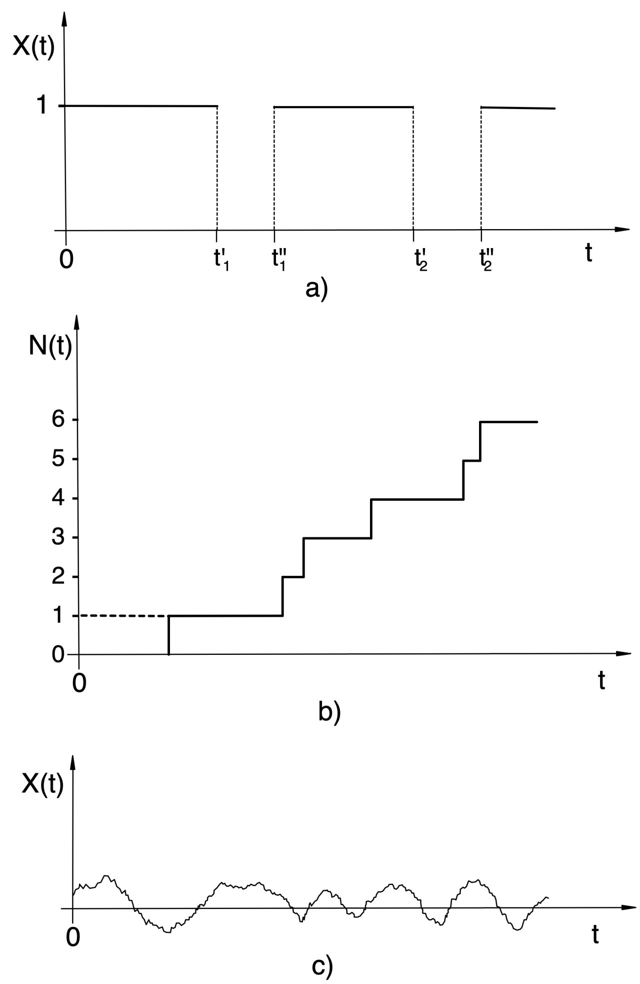
Náhodným procesem (také *stochastickým procesem*) se rozumí funkce $X(t)$, jejíž hodnota v každém bodě t je náhodná veličina. Argumentem t funkce $X(t)$ je nejčastěji čas: $X(t)$ představuje hodnotu nějaké veličiny v okamžiku t. Tak např. může $X(t)$ být okamžitá rychlost větru naměřená v daném místě po době t od začátku pozorování, sekundový průtok vody naměřený na dané řece v určitém místě v okamžiku t, intenzita hluku na určitém místě v daném okamžiku, počet otřesů zemské kůry, zaznamenaných danou seismografickou stanicí od počátku pozorování až do doby t atd.

Pozorování mohou být uspořádána jedním ze dvou způsobů. Buď se registrují hodnoty $X(t)$ plynule v čase, pak je oborem hodnot t nějaký interval T, např. interval $\langle 0, \infty)$, nebo se hodnoty $X(t)$ pozorují jen v daných okamžicích $t_1, t_2, t_3, \ldots$, které lze – pokud jsou ekvidistantní – pro zjednodušení zápisu očíslovat $1, 2, \ldots$ a psát místo $X(t_n)$ krátce X_n. Oborem možných hodnot proměnné t pak je množina přirozených čísel. V prvním případě mluvíme o *stochastickém procesu se spojitým časem* čili o *náhodné funkci*, v druhém případě o *stochastickém procesu s diskrétním časem* nebo o *náhodné posloupnosti.* Je zvykem uvádět oboro hodnot proměnné t v zápisu náhodného procesu a psát např. $\{X(t)|t \geq 0\}, \{X(t)|t \in \langle 0, 1\rangle\}, \{X(t)|t = 1, 2, \ldots\}$ apod.

Hodnota $X(t)$ v daném bodě vyjadřuje stav pozorovaného objektu v čase t. Jestliže $X(t)$ má při každém t rozdělení spojitého typu, říká se, že $\{X(t)|t \in$

$T\}$ je *proces se spojitými stavy.* Jestliže $X(t)$ má rozdělení diskrétního typu, jde o *proces s diskrétními stavy.*

Graf funkce $\{X(t)|t \in T\}$ získaný pozorováním se nazývá *realizace náhodného procesu.* Příklady realizací náhodných procesů jsou elektrokardiografické či elektroencefalografické záznamy, záznamy kolísání atmosférického tlaku pořízené na daném místě barografem atd. Při studiu náhodného procesu je vždy užitečné mít na mysli tvar možných realizací, připomínat si neustále konkrétní možné průběhy realizací procesu.



Obr. 18: Realizace náhodných procesů: a) náhodného procesu s dvěma stavy; b) čítacího procesu; c) náhodného šumu.

Na Obr. 18 a až 18 c jsou znázorněny realizace několika náhodných procesů. Obr. 18 a představuje ukázku možné realizace procesu s dvěma stavy, $X(t) = 0, X(t) = 1$, a se spojitým časem. Takový proces může popisovat např. provoz zařízení, které může v kterémkoliv okamžiku t být buď provozuschopné $[X(t) = 1]$, nebo v opravě $[X(t) = 0]$. Na obr. 18 a značí $t_1', t_2', \dots$ okamžiky poruch, $t_1'', t_2'', \dots$ okamžiky ukončení oprav. Na obr. 18 b je znázorněna typická realizace procesu $\{N(t) | t \geq 0\}$ se stavy $n = 0, 1, 2, \dots$, kde $N(t)$ značí počet poruch, které nastaly u daného zařízení během intervalu $(0, t\rangle$. Obr. 18 c představuje typickou realizaci náhodného procesu se spojitým časem a se spojitými stavy. V daném případě jde o záznam náhodného šumu v elektronce.

27.2 Popis náhodného procesu

Pro většinu praktických účelů se považuje náhodný proces $\{X(t) | t \in T\}$ za dosti přesně charakterizovaný, jestliže lze pro libovolnou podmnožinu prvků $t_1, t_2, \dots, t_n$ množiny T a pro libovolná čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ určit sdruženou distribuční funkci vektoru $\big(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)\big)$ v bodě $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n-rozměrného euklidovského prostoru.

Je-li např. známo, že $X(t)$ má při každém t normální rozdělení se střední hodnotou μ a s rozptylem σ^2, a pro libovolnou dvojici t_1, t_2 mají $X(t_1), X(t_2)$ kovarianci $\sigma^2 K(|t_2 - t_1|)$, kde $K(s)$ je daná funkce s vlastnostmi $K(0) = 1$, $|K(s)| < 1$ pro $s > 0$, lze pro libovolnou skupinu hodnot $t_1, t_2, \dots, t_n$ určit rozdělení veličin $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$. Toto rozdělení bude n-rozměrné normální s vektorem středních hodnot $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)'$ a s kovarianční maticí $\boldsymbol{\sigma}^2(K(|t_i - t_j|))$. Proces s popsanými vlastnostmi je tzv. *Gaussův proces.*

V následujících dvou článcích této kapitoly bude stručně pojednáno o dvou typech náhodných procesů, které mají zvláštní důležitost v některých technických aplikacích, jako teorie spolehlivosti a operační výzkum, a jejichž popis je aspoň částečně zvládnutelný prostředky, vykládanými v této knížce. Podrobnější informace o teorii a aplikacích náhodných procesů je nutné hledat ve speciálních pojednáních, uvedených v seznamu literatury.

Kapitola 28

Poissonův proces

28.1 Čítací procesy

Čítací proces (také *bodový proces*) je náhodný proces $\{N(t)|t \geq 0\}$ se spojitým časem a s množinou stavů $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Hodnota $N(t)$ v bodě t představuje počet bodů v intervalu $(0, t\rangle$, přičemž vzdálenosti bodů od počátku $t = 0$ jsou náhodné veličiny, označme je např. $W_1, W_2, \ldots,\ W_1 < W_2 < \ldots$.

Nejčastěji jde o výskyt určitých událostí v čase, např. v úlohách teorie spolehlivosti o výskyt poruch určitého zařízení – pak značí W_1 dobu od uvedení zařízení do provozu do výskytu první poruchy, W_2 dobu od uvedení do provozu do výskytu druhé poruchy atd. a $N(t)$ počet poruch od uvedení do provozu ($t = 0$) do okamžiku t. V úlohách týkajících se tzv. systémů hromadné obsluhy (jako telefonní ústředny, čerpací stanice pohonných hmot, přistávací dráhy, letiště atd.) jsou W_i okamžiky vzniku požadavků na služby systému a $N(t)$ je celkový počet požadavků došlých v intervalu $(0, t\rangle$. Množství příkladů čítacích procesů lze najít ve fyzice; tak mohou být W_i okamžiky registrace impulsů pocházejících od zdroje radioaktivního záření a $N(t)$ počet impulsů registrovaných v intervalu $(0, t\rangle$ nebo okamžiky záznamů otřesů zemské kůry na seismografické stanici a $N(t)$ počet otřesů v intervalu $(0, t\rangle$ od počátku pozorování do doby t atd.

Náhodná posloupnost $\{X_n|n = 1, 2, \ldots\}$, kde

$$X_1 = W_1, X_i = W_i - W_{i-1}, \quad i = 2, 3, \ldots, \tag{28.1.1}$$

je posloupnost intervalů mezi výskyty sledované události. Pro dané hodnoty s, t $(s < t)$ hodnota přírůstku funkce $N(t), N(t) - N(s)$, je počet výskytů sledované události v intervalu $(s, t\rangle$.

Čítací proces lze charakterizovat několika způsoby:

(1) zadáním předpokladů o rozdělení intervalů $X_1, X_2, \dots$ mezi výskyty události;

(2) zadáním předpokladů o rozdělení $N(t)$ při daných hodnotách $N(s)$ v okamžicích $s < t$;

(3) zadáním pravděpodobností přechodu ze stavu $N(t) = n$ v okamžiku t do stavu $N(t+h) = n'$ během intervalu délky h.

Zvláštní postavení mezi čítacími procesy zaujímá tzv. Poissonův proces. Vyskytuje se velmi často v aplikacích a je východiskem pro studium některých procesů obecnějších. Vlastnostem Poissonova procesu je věnován následující oddíl.

28.2 Poissonův proces

Poissonův proces je čítací proces, který ztělesňuje představu o „čistě náhodném výskytu“ sledované události v čase. Čítací proces $\{N(t) | t \geq 0\}$ se nazývá *homogenní Poissonův proces,* jestliže splňuje tyto podmínky:

(1) $N(0) = 0$;

(2) intervaly X_i mezi výskyty sledované události jsou navzájem nezávislé;

(3) intervaly $X_i, i = 1, 2, \dots$, mají exponenciální rozdělení s hustotou

$$\begin{aligned} f(x) &= \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, \quad && x > 0, \\ &= 0, && x \leq 0. \end{aligned} \tag{28.2.1}$$

Z předpokladů (2) a (3) je vidět, proč homogenní Poissonův proces je způsobilý popisovat průběh výskytu událostí, rozložených v čase zcela náhodně: Jelikož intervaly X_i mezi výskyty sledovaného jevu jsou navzájem nezávislé, podmíněné rozdělení doby od n-tého výskytu jevu do $(n+1)$-ního výskytu při daných hodnotách $X_1, X_2, \dots, X_n$ (tj. při daných okamžicích předchozích n výskytů jevu, $W_i = X_1 + \dots + X_i, \quad i = 1, 2, \dots n$), nezávisí na hodnotách $W_1, \dots, W_n$. Jinými slovy, znalost okamžiků prvních n výskytů sledovaného jevu neovlivňuje předpověď doby čekání na následující jev. Dále, z předpokladu (3) plyne (viz odst. 20.4): Pravděpodobnost, že $(n+1)$-ní událost nastane až po uplynutí doby $s+h$ od n-tého výskytu, podmíněná jevem, že nastala po době s od n-tého výskytu, je

$$P(X_{n+1} > s+h | X_{n+1} > s) = P(X_{n+1} > h); \tag{28.2.2}$$

to znamená: Okolnost, že sledovaná událost už určitou dobu nenastala, ani nezvyšuje ani nesnižuje pravděpodobnost jejího výskytu v dalším intervalu.

28.3 Rozdělení veličin $N(t)$

Z předpokladů (1) až (3) lze odvodit rozdělení $N(t)$ v každém okamžiku t. Jev $\{N(t) < n\}$ nastává právě tehdy, když doba čekání na n-tý výskyt události, $W_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, je delší než t, tj.

$$N(t) < n \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i > t. \tag{28.3.1}$$

Tedy

$$P(N(t) < n) = P\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i > t\Big). \tag{28.3.2}$$

Protože veličiny X_i jsou navzájem nezávislé a mají exponenciální rozdělení, má jejich součet Erlangovo rozdělení (viz příkl. 22.4.2), a tudíž z (28.3.2) plyne

$$P(N(t) < n) = \int_t^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda x} \lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} \, \mathrm{d}x. \tag{28.3.3}$$

Opakovanou integrací pravé strany (28.3.3) per partes dostaneme konečně

$$P(N(t) < n) = \sum_{v=0}^{n-1} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda t} (\lambda t)^v}{v!}, \tag{28.3.4}$$

odkud

$$P(N(t) = n) = P(N(t) < n+1) - P(N(t) < n) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda} t (\lambda t)^n}{n!}. \tag{28.3.5}$$

Má tedy $N(t)$ při každém t Poissonovo rozdělení se střední hodnotou λt. Konstanta λ značí tedy střední hodnotu počtu výskytů sledované události za jednotku času; konstanta λ se nazývá *intenzita homogenního Poissonova procesu.*

28.4 Sdružené rozdělení veličin $N(t_1), \dots, N(t_k)$.

Nechť $t_1 < t_2$ jsou dva libovolné okamžiky. Stanovme rozdělení rozdílu $N(t_2) - N(t_1)$, tj. rozdělení počtu výskytů sledovaného jevu v intervalu $(t_1, t_2\rangle$. Označme n_1 hodnotu, které nabyla funkce $N(t)$ v okamžiku t_1, a w_{n1} okamžik posledního výskytu sledovaného jevu před okamžikem t_1. Zřejmě platí

$$N(t_2) - N(t_1) < n \Leftrightarrow X_{n_1+1} - (t_1 - w_{n_1}) + X_{n_1+2} + \ldots + X_{n_1+n} > t_2 - t_1; \tag{28.4.1}$$

$X_{n_1+2}, \dots, X_{n_1+n}$ jsou navzájem nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením podle předpokladu (3); $X_{n_1+1} - (t_1 - w_{n1})$ je doba od okamžiku t_1 do prvního výskytu jevu následujícího po t_1 (tato doba se neshoduje s X_{n_1+1}, protože poslední předcházející výskyt jevu nastal v okamžiku $w_{n_1} < t_1$). Protože X_{n_1+1} má exponenciální rozdělení, které „nemá paměť“ (odst. 20.4), platí

$$P(X_{n_1+1} - (t_1 - w_{n_1}) > x | X_{n_1+1} > (t_1 - w_{n_1})) = \mathrm{e}^{-\lambda x}. \tag{28.4.2}$$

Rozdělení veličiny $X_{n_1+1} - (t_1 - w_{n_1})$ podmíněné jevem $X_{n_1+1} > t_1 - w_{n_1}$ (tj. že sledovaná událost nastala před t, naposledy v okamžiku w_{n_1}) je tedy opět exponenciální se střední hodnotou λ^{-1}. Podobně jako při odvození vztahu (28.3.5) je tedy

$$P(N(t_2) - N(t_1) = n | N(t_1) = n_1, W_{n_1} = w) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(t_2 - t_1)} \left[\lambda(t_2 - t_1)\right]^n}{n!}. \tag{28.4.3}$$

Jelikož tato podmíněná pravděpodobnost nezávisí ani na hodnotě n_1 procesu $N(t)$ v okamžiku t_1, ani na w, tj. ani na počtu výskytů do okamžiku t_1, ani na okamžiku posledního předcházejícího výskytu, je rovna nepodmíněné pravděpodobnosti počtu výskytů sledované události v intervalu $(t_1, t_2\rangle$.

Odtud ihned plyne pro sdružené rozdělení veličin $N(t_1), N(t_2), \dots, N(t_k)$ $(0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k$ výraz

$$\begin{aligned} &P\big(N(t_1) = n_1,\ N(t_2) = n_2, \dots, N(t_k) = n_k\big) = \\ &= P\big(N(t_1) = n_1, N(t_2) - N(t_1) = n_2 - n_1, \dots, N(t_k) - N(t_{k-1}) = n_k - n_{k-1}\big) = \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda t_k} \lambda^{n_k} \prod_{i=1}^{k} (t_i - t_{i-1})^{n_i - n_{i-1}}}{n_1!(n_2 - n_1)! \dots (n_k - n_{k-1})!}, \end{aligned} \tag{28.4.4}$$

přičemž $t_0 = 0$ a $n_0 = 0$.

28.5 Jiný způsob definování Poissonova procesu

Pro homogenní Poissonův proces $\{N(t)|t \geq 0\}$ platí dále:

$$P\big(N(t+h) = n+1|N(t) = n\big) = +o(h), \tag{28.5.1}$$

$$P\big(N(t+h) = n|N(t) = n\big) = 1 - \lambda h + o(h), \tag{28.5.2}$$

$$P\big(N(t+h) > n+1|N(t) = n\big) = o(h), \tag{28.5.3}$$

kde $o(h)$ značí veličinu nekonečně malou řádu vyššího než h, tj.

$$\lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} = 0.$$

Uvedené vztahy plynou ze vztahu (28.4.3):

$$P\big(N(t+h) = n+1|N(t) = n\big) =$$

$$= P\big(N(t+h) - N(t) = 1\big) = \lambda h\, \mathrm{e}^{-\lambda h} =$$

$$= \lambda h\big(1 - \lambda h\, \mathrm{e}^{-\lambda h'}\big) = \lambda h - (\lambda h)^2\, \mathrm{e}^{-\lambda h'},$$

kde $h' \in (0, h)$; podíl $\frac{1}{h}(\lambda h)^2\, \mathrm{e}^{-\lambda h'} \to 0$ při $h \to 0$. Podobně

$$P\big(N(t+h) = n|N(t) = n\big) = P\big(N(t+h) - N(t) = 0\big) =$$

$$= \mathrm{e}^{-} = 1 - \lambda h + (\lambda h)^2\, \frac{\mathrm{e}^{-\lambda h'}}{2},$$

kde h' je číslo z intervalu $(0, h)$; při $h \to 0$ tedy

$$\frac{1}{h}(\lambda h)^2 \frac{\mathrm{e}^{-\lambda h'}}{2} \longrightarrow 0,$$

čímž je dokázáno (28.5.2). Konečně,

$$P\big(N(t+h) > n+1|N(t) = n\big) = P\big(N(t+h) - N(t\big) > 1) =$$

$$= 1 - P(N(t+h) - N(t) = 0) - P\big(N(t+h) - N(t) = 1\big) =$$

$$= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda h} - \lambda h\, \mathrm{e}^{-\lambda h} =$$

$$= 1 - (1 - \lambda h\,\mathrm{e}^{-\lambda h'}) - \lambda h(1 - \lambda h\,\mathrm{e}^{-\lambda h''}),$$

kde h' a h'' jsou čísla z intervalu $(0, h)$. Je tedy

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}P\big(N(t+h) > n+1|N(t) = n\big) =$$

$$= \lim_{h\to 0}(\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda h'} - \lambda + \lambda^2 h\,\mathrm{e}^{-\lambda h'}) = 0.$$

Vztahy (28.5.1) až (28.5.3) dávají další názorný výklad významu parametru λ zvanému intenzita procesu $\{N(t)|t \geq 0\}$: Pravděpodobnost výskytu sledovaného jevu v krátkém intervalu je úměrná intenzitě procesu a délce intervalu. Vedle toho doplňují popis vlastností procesu o další poznatek: Pravděpodobnost dvou nebo více výskytů sledovaného jevu klesá k nule s klesající délkou intervalu, a to rychleji než délky intervalu.

Pomocí vztahů (28.5.1) až (28.5.3) by také bylo možné definovat homogenní Poissonův proces. Označme – pro krátkost zápisu –

$$P\big(N(t) = n\big) = P_n(t), \quad P\big(N(t) = n|N(s) = k\big) = P_{k,n}(s,t).$$

Podle věty o úplné pravděpodobnosti (odst. 6.10) je

$$P_n(t+h) = P_n(t)P_{n,n}(t,t+h) + P_{n-1}(t)P_{n-1,n}(t,t+h) + \sum_{j=2}^{n} P_{n-j}(t)P_{n-j,n}(t,t+h).$$

Po dosazení za podmíněné pravděpodobnosti podle (**??**) až (**??**)

$$P_n(t+h) = P_n(t)\big(1 - \lambda h + o(h)\big) + P_{n-1}(t)\big(\lambda h + o(h)\big) + o(h)\sum_{j=2}^{n} P_{n-j}(t),$$

odkud

$$\frac{1}{h}\big[P_n(t+h) - P_n(t)\big] = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \frac{o(h)}{h}.$$

Limitním přechodem pro $h \to 0$ se odtud získá systém diferenciálních rovnic pro $P_n(t)$

$$\frac{\mathrm{d}P_n(t)}{\mathrm{d}t} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t),$$

jehož řešením za vedlejší podmínky $P_0(0) = 1,\ P_{-1}(t) = 0$ vyjde (28.3.5) z rozdělení pro délku intervalů mezi výskyty jevů a rozdělení doby do n-tého výskytu.

28.6 Vlastnost Poissonova procesu

Závěrem uveďme ještě jedu zajímavou vlastnost homogenního Poissonova procesu:

Nechť W_{n-1}, W_n *a* W_{n+1} *jsou okamžiky* $(n-1)$*-ního,* n*-tého a* $(n+1)$*-ního výskytu sledované události. Rozdělení* W_n *podmíněné jevem* $W_{n-1} = w_{n-1},\ W_{n+1} = w_{n+1}$ *je rovnoměrné rozdělení na intervalu* (w_{n-1}, w_{n+1})*.*

O platnosti tohoto tvrzení se přesvědčíme jednoduše: $W_n = W_{n-1} + X_n$, $W_{n+1} = W_{n-1} + X_n + X_{n+1}$, kde X_n a X_{n+1} jsou veličiny s exponenciálním rozdělením, nezávislé na W_{n-1} a nezávislé mezi sebou navzájem, a W_{n-1} je součtem $n-1$ nezávislých náhodných veličin s exponenciálním rozdělením. Při daných $w_{n-1} < w_n < w_{n+1}$ jev

$$\{W_{n-1} = w_{n-1},\ W_n = w_n,\ W_{n+1} = w_{n+1}\}$$

tedy nastává právě tehdy, když nastává jev

$$\{W_{n-1} = w_{n-1},\ X_n = w_n - w_{n-1},\ X_{n+1} + X_n = w_{n+1} - w_{n-1}\}.$$

Protože X_n a X_{n+1} jsou nezávislé na W_{n-1} (podle předpokladu o Poissonově procesu), záleží jedině na rozdělení veličin X_n a X_{n+1}. Jejich sdružená hustota v bodě $x_n = w_n - w_{n-1}$ a $X_{n+1} = w_{n+1} - w_n$ je rovna

$$\lambda^2 \exp[-\lambda(w_n - w_{n-1}) - \lambda(w_{n+1} - w_n)] = \lambda^2 \exp[-\lambda(w_{n+1} - w_{n-1})]$$

a hustota podmíněná jevem $X_n + X_{n+1} = w_{n+1} - w_{n-1}$ je

$$\frac{\lambda^2 \exp[-\lambda(w_{n+1} - w_{n-1})]}{\lambda^2 \exp[-\lambda(w_{n+1} - w_{n-1})](w_{n+1} - w_{n-1})} = (w_{n+1} - w_{n-1})^{-1}$$

což je hustota rovnoměrného rozdělení na intervalu (w_{n-1}, w_n). Tato vlastnost homogenního Poissonova procesu je dalším potvrzením představy, že Poissonův proces popisuje „čistě náhodný“ výskyt událostí v čase: Sledovaná událost nastane v první čtvrtině intervalu mezi předcházejícím a následujícím výskytem se stejnou pravděpodobností jako v jeho třetí či poslední čtvrtině atd.

28.7 Úlohy

28.7.1

Předpokládejte, že poruchy určité součásti, která má základní význam pro funkci přístroje, tvoří Poissonův proces, v průměru připadá jedna porucha na

200 hodin provozu čili na 40 osmihodinových směn. Na skladě jsou 2 náhradní součásti; pod době odpovídající 60 směnám budou dodány další. Jaká je pravděpodobnost, že přístroj nebude pro nedostatek náhradních součástí vyřazen z provozu do dodávky dalších náhradních dílů?

$$\left[\begin{array}{l}\text{Tato pravděpodobnost je rovna}\\ \sum_{k=0}^{2} \mathrm{e}^{(-480\cdot 0{,}005)} \frac{(480\cdot 0{,}005)^k}{k!} = \mathrm{e}^{(-2{,}4)} \sum_{k=0}^{2} \frac{(2{,}4)^k}{k!}.\\ \text{V tabulkách [19] se zjistí její hodnota } 0{,}569\,7\end{array}\right]$$

28.7.2

Tvoří-li poruchy pneumatiky nákladního vozidla Poissonův proces, a připadá-li v průměru jedna porucha na 50 000 km, jaká je pravděpodobnost, že vozidlo vybavené jedním úplným rezervním kolem ujede 2 000 km bez nutnosti nouzové opravy na cestě?

[$P(N(t) \leq 1) = 0{,}999\,2$, opět s užitím tabulek.]

28.7.3

Zdroj záření vysílá v průměru 1 impuls za $2s$, impulsy tvoří Poissonův proces. Jaká je pravděpodobnost, že v každém z 5 intervalů po $5s$

$$(0\,s, 5\,s), (5\,s, 10\,s), \ldots, (20\,s, 25\,s)$$

budou registrovány nejméně 4 impulsy?

$$\left[\begin{array}{l}\text{Hledaná pravděpodobnost je}\\ \left[\sum_{k=4}^{\infty} \mathrm{e}^{-2{,}5} \frac{(2{,}5)^k}{k!}\right]^5 \doteq 0{,}000\,808\\ \text{s užitím tabulek [19].}\end{array}\right]$$

Kapitola 29

Proces růstu a zániku

29.1 Homogenní Markovův řetězec se spojitým časem

Markovovým řetězcem se spojitým časem nazýváme náhodný proces $\{N(t) \mid t \geq 0\}$ s diskrétními stavy (nejčastěji vyjádřenými celými čísly, $N(t) = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$), který má tuto vlastnost: Pro libovolné přirozené číslo $k \geq 2$, libovolná nezáporná čísla $t_1, t_2, \ldots, t_k$ $(0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_k)$ a pro libovolná celá čísla $n_1, n_2, \ldots, n_k$ platí

$$P\big(N(t_k) = n_k | N(t_1) = n_1, N(t_2) = n_2, \ldots, N(t_{k-1}) = n_{k-1}\big) = \tag{29.1.1}$$

$$= P\big(N(t_k) = n_k | N(t_{k-1}) = n_{k-1}\big).$$

To znamená, že pravděpodobnost jevu $N(t_k) = n_k$, podmíněná danými hodnotami $N(t)$ v okamžicích $t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}$, závisí jen na hodnotě $N(t)$ v čase $t = t_{k-1}$, tj. jen na výsledku posledního pozorování předcházejícího t_k, a nikoliv na předcházejícím průběhu procesu.

Pravděpodobnost jevu $N(t_k) = n_k$ podmíněná jevem $N(t_{k-1}) = n_{k-1}$ se nazývá *pravděpodobností přechodu ze stavu n_{k-1} do stavu n_k během intervalu (t_{k-1}, t_k).*

Označme ji stručně $P_{n_{k-1},n_k}(t_{k-1}, t_k)$. Je to zřejmě funkce stavů n_{k-1}, n_k a časů t_{k-1}, t_k, jejíž znalost umožňuje – při znalosti počátečního rozdělení $P_{n_0}(0) = P(N(0) = n_0)$ – vypočítat pravděpodobnost jevu $\{N(t_1) = n_1, N(t_2) = n_2, \ldots, N(t_k) = n_k\}$ (tj. určit konečně rozměrné rozdělení $N(t)$) pro libovolné přirozené k, libovolné dané okamžiky $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots t_k$ a libovolné stavy $n_1, n_2, \dots, n_k$ opakovanou aplikací věty o úplné pravděpodobnosti:

$$P\bigl(N(t_1) = n_1, \dots, N(t_k) = n_k\bigr) = \sum_{n_0} P_{n_0}(0) P_{n_0,n_1}(0, t_1) P_{n_1,n_2}(t_1, t_2) \dots P_{n_{k-1},n_k}(t_{k-1}, t_k), \quad (29.1.2)$$

kde sčítáme přes všechny hodnoty počátečního rozdělení.

Jestliže pravděpodobnost přechodu $P_{m,n}(s,t)$ z m do n během intervalu (s,t) nezávisí na s, nýbrž jen na rozdílu $t - s$ (tj. na délce intervalu), říkáme, že jde o *homogenní Markovův řetězec*, a v argumentu pravděpodobnosti přechodu vyjadřujeme jen délku intervalu:

$$P_{m,n}(t, t+h) = P_{m,n}(h). \quad (29.1.3)$$

Velmi jednoduchým příkladem homogenního Markovova řetězce se spojitým časem je Poissonův proces z předcházejícího článku; počáteční rozdělení je při něm

$$P_0(0) = 1, \quad P_n(0) = 0 \quad \text{pro} \quad n = 1, 2, \dots$$

a pravděpodobnosti přechodu

$$P_{n_1,n_2}(h) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda h} (\lambda h)^{n_2 - n_1}}{(n_2 - n_1)!} \quad \text{pro} \quad n_2 \geq n_1.$$

Existují však i jiné Markovovy řetězce se spojitým časem - některým z nich je věnován tento článek.

Pravděpodobnosti přechodu $P_{m,n}(h)$ splňují vztah, známý pod názvem *Chapmanova-Kolmogorovova rovnice: Pro libovolnou dvojici stavů (m,n) a kladná čísla* (h_1, h_2)

$$P_{m,n}(h_1 + h_2) = \sum_{j=m+1}^{n-1} P_{m,j}(h_1) P_{j,n}(h_2). \quad (29.1.4)$$

Rovnice (29.1.4) plyne ze základních vět teorie pravděpodobnosti (kapitola II); během intervalu délky $h_1 + h_2$ může $N(t)$ přejít ze stavu $N(t) = m$ do $N(t) = n$ těmito navzájem disjunktními způsoby: V průběhu intervalu délky h_1 z m do j; v průběhu zbývající části intervalu, která má délku h_2, z j do n, přičemž j probíhá celou množinu stavů řetězce. Podrobněji: $P_{m,n}(h_1 + h_2)$ je pravděpodobnost jevu $N(t + h_1 + h_2) = n$ podmíněná jevem $N(t) = m$; na hodnotě t nezáleží, protože jde o homogenní proces. Jev $N(t+h_1+h_2)=n$ je sjednocením navzájem disjunktních jevů

$$\{N(t+h_1)=j\}\cap\{N(t+h_1+h_2)=n\}$$

Limity

$$\lim_{h\to 0}\frac{P_{jk}(h)}{h}=q_{jk},\qquad j\neq k, \tag{29.1.5}$$

pokud existují a jsou konečné, se nazývají *intenzitami přechodu ze stavu j do stavu k,* limita

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{h}\{1-P_{jj}(h)\}\right]=q_j \tag{29.1.6}$$

je tzv. *pravděpodobnost výstupu ze stavu j*. Intenzity přechodu jsou zřejmě derivace pravděpodobností přechodu:

$$q_{jk}=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_{jk}(h)\right]_{h=0},\quad q_j=-\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_{jj}(h)\right]_{h=0}. \tag{29.1.7}$$

V aplikacích je často důležité chování procesu $N(t)$ „v ustáleném stavu", v okamžicích t velmi vzdálených od počátku, kdy lze očekávat, že $N(t)$ nabývá různých hodnot n s pravděpodobnostmi π_n, nezávislými na t a nezávislými na stavu procesu v okamžiku $t=0$. Jestliže pro daný proces takové pravděpodobnosti π_n existují, musí být pro všechna j

$$\lim_{h\to\infty}P_{jn}(h)=\pi_n; \tag{29.1.8}$$

tato podmínka vyjadřuje nezávislost $N(t)$ na stavu, ve kterém se nacházel před dlouhou dobou (tj. vzájemnou nezávislost $N(t_1)$ a $N(t_2)$ při t_1 a t_2 velmi od sebe vzdálených).

Vyjděme teď z Chapmanovy-Kolmogorovovy rovnice (29.1.4), kterou lze zapsat ve tvaru

$$P_{mn}(h_1+h_2)=P_{mn}(h_1)P_{nn}(h_2)+\sum_{j\neq n}P_{mj}(h_1)P_{jn}(h_2)$$

a nechme $h_1\to\infty$; platí-li (29.1.8), je

$$\pi_n=\pi_nP_{nn}(h_2)+\sum_{j\neq n}\pi_jP_{jn}(h_2)$$

čili

$$\pi_n\bigl(1 - P_{nn}(h_2)\bigr) = \sum_{j\neq n} \pi_j P_{jn}(h_2). \tag{29.1.9}$$

Dělením rovnice (29.1.9) číslem h_2 a přechodem k limitě pro $h_2 \to 0$ konečně vyjde s užitím (29.1.5) a (29.1.6)

$$\pi_n q_n = \sum_{j\neq n} \pi_j q_{jn}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots . \tag{29.1.10}$$

To je soustava lineárních rovnic, kterou musí splňovat pravděpodobnosti π_n, pokud takové existují. Pravděpodobnosti $\pi_n,\ n = 0, 1, 2, \dots$, se nazývají *stacionární pravděpodobnosti;* udávají jednak pravděpodobnost, že v nějakém velkém t bude $N(t) = n$, jednak limitní hodnotu (pro $T \to \infty$) podílu

$$\frac{\bigl[\text{celková doba, po kterou v intervalu } (0,T) \text{ bylo } N(t) = n\bigr]}{T}.$$

29.2 Homogenní Markovův řetězec se spojitým časem

29.2.1 Příklad

Představme si zařízení, které má být v nepřetržitém provozu, avšak má v náhodných okamžicích poruchy. Předpokládejme, že doba do poruchy má exponenciální rozdělení se střední hodnotou λ^{-1} a doba od vzniku poruchy do jejího odstranění má exponenciální rozdělení se střední hodnotou μ^{-1}. Položme $N(t) = 1$, jestliže v okamžiku t je zařízení v provozu, a $N(t) = 0$, jestliže je v okamžiku t poroucháno. Pak je $N(t)$ homogenní Markovův řetězec se stavy $(0, 1)$ a s intenzitami přechodu

$$q_{0,1} = \mu, \quad q_{1,0} = \lambda, \quad q_1 = \lambda, \quad q_0 = \mu. \tag{29.2.1}$$

Pro malé hodnoty h je totiž pravděpodobnost poruchy v intervalu $(t, t+h)$ rovna $1 - e^{-\lambda h} \simeq \lambda h$, pravděpodobnost poruchy, jejího odstranění a další poruchy pak je nekonečně malá řádu vyššího než h, čili

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{P_{1,0}(h)}{h} = \lambda.$$

Podobně by se postupovalo pro další intenzity. Stacionární rozdělení pravděpodobnosti je dáno soustavou rovnic

$$\begin{aligned} \pi_0 q_0 &= \pi_1 q_{1,0}, \quad \text{tj. } \pi_0\mu = \pi_1\lambda, \\ \pi_1 q_1 &= \pi_0 q_{0,1}, \quad \text{tj. } \pi_1\lambda = \pi_0\mu, \end{aligned}$$

To znamená, že $\pi_1 = \pi_0\mu/\lambda$. Aby stacionární rozdělení bylo rozdělením pravděpodobnosti, musí být

$$\pi_0 + \pi_1 = 1, \quad \text{tj. } \pi_0(1 + \mu/\lambda) = 1$$

tj.

$$\pi_0 = \left(1 + \frac{\mu}{\lambda}\right)^{-1} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{1/\mu}{1/\lambda + 1/\mu}, \tag{29.2.2}$$

$$\pi_1 = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{1/\lambda}{1/\lambda + 1/\mu}.$$

Pravděpodobnost π_1, která je rovna podílu střední hodnoty doby bezvadné funkce a součtu střední doby bezvadné funkce se střední dobou trvání poruchy, je známa v teorii spolehlivosti jako *koeficient pohotovosti.*

29.3 Proces růstu a zániku

Proces růstu a zániku je homogenní Markovův řetěz $\{N(t)|t \geq 0\}$ se stavy $n = 0, 1, 2, \ldots$ a s intenzitami přechodu

$$\begin{aligned} q_{n,n+1} &= \lambda_n, \quad q_{n,n+2} = q_{n,n+3} = \ldots = 0, \quad n \geq 0, \\ q_{n,n-1} &= \mu_n, \quad q_{n,n-2} = q_{n,n-3} = \ldots = 0, \quad n \geq 1, \end{aligned} \tag{29.3.1}$$

$$q_n = (\lambda_n + \mu_n),$$

kde λ_n a μ_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, jsou daná čísla, $\mu_0 = 0$. Proces růstu a zániku popisuje kolísání velikosti nějakého souboru v čase (ať už jde o soubor mikroorganismů, strojů, osob pojištěných proti určitému riziku, obsazených linek v telefonní ústředně atd.), za předpokladu, že v náhodných okamžicích do tohoto souboru přistupují nové prvky a v náhodných okamžicích z něj jiné prvky vystupují. Přitom pravděpodobnost, že soubor se během krátkého intervalu délky h zvětší o jeden prvek, je přibližně rovna $\lambda_n h$ (má-li soubor na počátku intervalu n prvků), pravděpodobnost úbytku jednoho z n

prvků během krátkého intervalu délky h je $\mu_n h$ a pravděpodobnost, že během krátkého intervalu žádný prvek soubor neopustí, ani nový nepřibude, je $(\lambda_n + \mu_n)h$.

Stacionární pravděpodobnosti π_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, jsou dány (pokud existují) soustavou rovnic:

$$\begin{aligned} \pi_0\lambda_0 &= \pi_1\mu_1, && (29.3.2) \\ \pi_n(\lambda_n + \mu_n) &= \pi_{n-1}\lambda_{n-1} + \pi_{n+1}\mu_{n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots. && (29.3.3) \end{aligned}$$

Z (29.3.3) plyne pro každé n

$$\pi_n\mu_n - \pi_{n-1}\lambda_{n-1} = \pi_{n+1}\mu_{n+1} - \pi_n\lambda_n, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{29.3.4}$$

Odtud

$$\pi_1\mu_1 - \pi_0\lambda_0 = \pi_2\mu_2 - \pi_1\lambda_1 = \pi_3\mu_3 - \pi_2\lambda_2 = \ldots. \tag{29.3.5}$$

Podle (29.3.2) je však

$$\pi_1\mu_1 - \pi_0\lambda_0 = 0,$$

takže

$$\pi_n\mu_n = \pi_{n-1}\lambda_{n-1}, \qquad n \geq 1.$$

Pravděpodobnosti π_n splňují rekurentní vztah

$$\pi_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n}\,\pi_{n-1}. \tag{29.3.6}$$

Opakovaným užitím tohoto vztahu dostaneme

$$\pi_n = \pi_0 \prod_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}. \tag{29.3.7}$$

Hodnota π_0 musí být určena tak, aby $\{\pi_0, \pi_1, \ldots\}$ bylo rozdělení pravděpodobnosti, tj.

$$\pi_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}\right]^{-1}. \tag{29.3.8}$$

Jestliže $\lambda_n > 0$ pro všechna n, tj. množina možných stavů je nekonečná, může se stát, že řada v (29.3.8) má nekonečný součet, $\pi_0 = 0$, a tedy $\pi_n = 0$ pro všechna n. Tak tomu bude např., když pro všechna n bude $\lambda_{n-1} > \mu_n$; za takových podmínek je také přirozené očekávat, že nebude existovat ustálený stav, soubor neustále poroste a k libovolnému N bude možno najít takové t, že s pravděpodobností libovolně blízkou 1 bude $N(t) > N$.

29.4 Příklady – některé aplikace procesů růstu a zániku

29.4.1

Představme si pracoviště, na kterém je v provozu M shodných zařízení (např. dopravní závod s M stejnými vozidly v provozu) a pro případ poruchy některého zařízení je k dispozici Z záložních zařízení stejného druhu. Zařízení v provozu mají v náhodných okamžicích poruchy; předpokládejme, že jde o zařízení, která už mají za sebou dobu záběhu a odstraňování skrytých vad, avšak dosud nejeví známky výrazného opotřebení, takže realistickým modelem pro výskyt poruch u každého zařízení je Poissonův proces, tj. doba bezvadné funkce každého zařízení má exponenciální rozdělení se střední hodnotou $1/\mu$. Dále předpokládejme, že doba potřebná k odstranění poruchy má také exponenciální rozdělení se střední hodnotou $1/\lambda$. Jakmile některé ze zařízení v provozu má poruchu, je nahrazeno zařízením ze zálohy, pokud ještě nějaké v záloze je. Zařízení v záloze poruchy mít nemohou, zařízení opravená se vracejí do zálohy. Pro posouzení, do jaké míry je celý systém schopný provozu, je rozhodující rozdělení pravděpodobnosti počtu zařízení, schopných funkce. Označme $N(t)$ počet zařízení způsobilých provozu v okamžiku t (používaných a čekajících v záloze). Proces $\{N(t)|t \geq 0\}$ je proces růstu a zánik. Příslušné intenzity přechodu stanovíme takto:

Dokud počet provozuschopných zařízení je $N(t) = n \geq M$, mohou poruchy vznikat jen u těch M zařízení, kterých se používá, tudíž

$$\mu_n = M\mu \quad \text{pro} \quad n \geq M.$$

Doba X do poruchy každého z M provozuschopných zařízení má podle předpokladu exponenciální rozdělení, $P(X > x) = e^{-\mu x} (x > 0)$. Tedy pravděpodobnost, že u některého zařízení dojde k poruše během intervalu délky h, je rovna doplňku pravděpodobnosti, že doba bezporuchového provozu u všech M zařízení bude delší než h, čili

$$P_{n,n-1}(h) = 1 - [\mathrm{e}^{-\mu h}]^M = 1 - \mathrm{e}^{-\mu M h} \doteq M\mu h.$$

Podobně

$$\mu_n = n\mu \quad \text{pro} \quad n < M.$$

Dále, pokud není žádné zařízení poroucháno a tedy v opravě, nemůže se žádné vrátit mezi provozuschopná, takže intenzita přechodů typu $n \to n + 1$

je

$$\lambda_n = 0 \quad \text{pro} \quad n = M + Z.$$

Jakmile je nějaké zařízení porouchánо, tj. počet provozuschopných $N(t)$ menší než $M+Z$, opravuje se a může s určitou pravděpodobností být vráceno mezi provozuschopná. Protože doba opravy má exponenciální rozdělení se střední hodnotou $1/\lambda$, je

$$\lambda_n = \lambda \quad \text{pro} \quad n < M + Z.$$

Stacionární rozdělení počtu provozuschopných zařízení tedy je dáno (29.3.7) a (29.3.8), přičemž

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \left[1 + \sum_{n=1}^{M+Z} \prod_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}\right]^{-1} = \qquad (29.4.1) \\ &= \left[1 + \sum_{n=1}^{M-1} \prod_{k=1}^{n} \frac{\lambda}{k\mu} + \prod_{k=1}^{M} \frac{\lambda}{k\mu} \sum_{j=0}^{Z} \left(\frac{\lambda}{M\mu}\right)^j\right]^{-1}. \end{aligned}$$

Například při $M = 8$, $Z = 2, \lambda = 0,01\,h^{-1}$, $\mu = 0,001\,h^{-1}$, tj. při osmi zařízeních v provozu, dvou záložních, střední době bezporuchového chodu $1\,000\,h$ a střední době opravy $100\,h$ je stacionární rozdělení počtu zařízení schopných provozu dáno tabulkou

n n	$\pi_n =$ $= P(N(t) = n)$	$\sum_{j=n}^{10} \pi_j =$ $= P(N(t) \geq n)$	n n	$\pi_n =$ $= P(N(t) = n)$	$\sum_{j=n}^{10} \pi_j =$ $= P(N(t) \geq n)$
0	0,000072	1,000000	6	0,097082	0,896712
1	0,000699	0,999928	7	0,138689	0,799630
2	0,003495	0,999229	8	0,173362	0,660941
3	0,011649	0,995734	9	0,216702	0,487579
4	0,029124	0,984085	10	0,270877	0,270877
5	0,058249	0,954961			

Je vidět, že všech osm zařízení bude v provozu s pravděpodobností jen $0,66$, to znamená, že přibližně 34 % z celkové dlouhé doby provozu systému bude fungovat jen sedm nebo i méně zařízení. Zlepšení by se dosáhlo např. zařazením dalšího záložního prvku.

29.4.2 Provoz systému hromadné obsluhy.

Představme si zařízení, poskytující určité služby, jako např. stanici pro čerpání pohonných hmot. Předpokládejme (pro jednoduchost příkladu), že zařízení nemůže poskytovat službu několika zákazníkům současně (např. čerpací stanice s jediným čerpadlem). Požadavky na obsluhu nechť vznikají ve zcela náhodných okamžicích; příchody zákazníků tvoří Poissonův proces s intenzitou λ (λ je průměrný počet zákazníků, kteří požadují obsluhu za jednotku času, např. za hodinu). Předpokládejme dále, že doba obsluhy má exponenciální rozdělení se střední hodnotou $1/\mu$ (např. $1/\mu = 6$ min $= 0,1$ h).

Označíme-li $N(t)$ počet zákazníků přítomných v daném okamžiku v obslužném zařízení (tj. čekajících ve frontě a obsluhovaných), pak $\{N(t)|t \geq 0\}$ je za daných podmínek proces růstu a zániku s těmito intenzitami přechodu:

$$
\begin{aligned}
q_{n,n+1} &= \lambda \qquad \text{pro} \quad n \geq 0, \\
q_{n,n-1} &= \mu \qquad \text{pro} \quad n \geq 1, \\
q_n &= \lambda + \mu \quad \text{pro} \quad n \geq 1, \\
q_0 &= \lambda.
\end{aligned}
$$

Stacionární rozdělení počtu zákazníků přítomných v obslužném zařízení tedy je (podle (29.3.7) a (29.3.8)):

$$
\begin{aligned}
\pi_0 &= \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}\right]^{-1} = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]^{-1} = \qquad (29.4.2) \\
&= \left[1 + \frac{\lambda}{\mu} \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}}\right]^{-1} = \frac{\mu - \lambda}{\mu}
\end{aligned}
$$

(za předpokladu, že $\mu > \lambda$, to znamená, že střední doba obsluhy je kratší než střední délka intervalů mezi příchody zákazníků; jinak by počet zákazníků u zařízení žádné stacionární rozdělení neměl, rovnovážný stav by neexistoval),

$$
\pi_n = \pi_0 \prod_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} = \frac{\mu - \lambda}{\mu} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n. \qquad (29.4.3)
$$

Počet zákazníků má tedy geometrické rozdělení (viz odst. 14.8). Je-li např. průměrný počet přicházejících zákazníků za hodinu roven 5 (tj. v průměru jeden za každých 12 minut) a průměrná doba obsluhy je rovna 6 min $= 0,1$ h, máme

$$
\mu = 10, \quad \lambda = 5
$$

a stacionární rozdělení je

$$
\begin{aligned}
\pi_0 &= \frac{10 - 5}{10} = 0,5, \\
\pi_1 &= 0,5 \cdot 0,5 = 0,25,
\end{aligned}
$$

obecně

$$\pi_n = 0,5^{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Pravděpodobnost, že zařízení bude v nečinnosti, tj. že nebude přítomen ani jeden zákazník,je v tomto případě $0,5$; asi 50% doby by bylo zařízení nevyužito. Pravděpodobnost, že právě přicházející zákazník najde zařízení obsazené, takže bude nucen čekat (kratší či delší dobu), je $1 - \pi_o$, v daném příkladě $0,5$. Střední hodnota počtu přítomných zákazníků je

$$E\big(N(t)\big) = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}.$$

V daném příkladě tedy $\frac{5}{10-5} = 1$. Střední hodnota počtu čekajících ve frontě pak je

$$\begin{aligned} 0 \cdot P\big(N(t) \leq 1\big) &+ P\big(N(t) \geq 2\big) \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) P\big(N(t) = n | N(t) \geq 2\big) = \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) P\big(N(t) = n\big) = \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n P\big(N(t) = n\big) - \sum_{n=2}^{\infty} P\big(N(t) = n\big) = \\ &= E\big(N(t)\big) - P\big(N(t) = 1\big) - P\big(N(t) \geq 2\big) = \\ &= \frac{\lambda}{\mu - \lambda} - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}. \end{aligned}$$

V našem příkladě střední hodnota počtu čekajících (při ustáleném stavu) je $\frac{25}{10 \cdot 5} = 0,5$.

29.5 Úlohy

29.5.1 Provoz tzv. uzavřeného systému hromadné obsluhy.

V dílně pracuje N strojů, zcela shodných a fungujících nezávisle na sobě. K jejich obsluze je určen jeden mechanik. Každý stroj má rozdělení dob mezi poruchami exponenciální se střední hodnotou $1/\lambda$. Doba potřebná k odstranění poruchy má také exponenciální rozdělení, její střední hodnota je $1/\mu$.

Najděte stacionární rozdělení počtu nefungujících strojů (jeden v opravě, ostatní porouchané čekající na opravu).

$$\left[\pi_0 = \left(1 + \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{N!}{(N-n)!}\right)^{-1}, \pi_n = \pi_0 \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^n \frac{N!}{(N-n)!}.\right]$$

29.5.2 Provoz systému hromadné obsluhy se dvěma obslužnými zařízeními.

Nechť požadavky na obsluhu tvoří Poissonův proces s intenzitou λ, doba obsluhy nechť má exponenciální rozdělení se střední hodnotou $1/\mu$. Předpokládejte, že lze obsluhovat dva zákazníky současně. Najděte rozdělení počtu prvků v systému (tj. počtu obsluhovaných a čekajících).

$$\left[\begin{array}{l} \pi = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{1}{2}\frac{(\lambda/\mu)^2}{1-\lambda/\mu}\right)^{-1}, \\ \pi_1 = \frac{\pi_0 \lambda}{\mu}, \\ \pi_n = \frac{\pi_0}{n}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n, \quad n \leq 2. \end{array}\right]$$

Literatura

[1] *Anděl, J.*: Statistická analýza časových řad. Praha, SNTL 1976.

[2] *Anděl, J.*: Matematická statistika. Praha, SNTL/ALFA 1978.

[3] Aplikovaná matematika I, II. Oborová encyklopedie SNTL. Praha, SNTL, 1977 a 1978.

[4] *Beneš, J.*: Statistická dynamika regulačních obvodů. Praha, SNTL, 1961.

[5] *Cramér, H.*: Mathematical Methods of Statistics. Princeton, Princeton University Press, 1946.

[6] *Dupač, V., Dupačová, J.*: Markovovy procesy I, II. Praha, SPN, 1975 a 1976.

[7] *Dupač, V., Hájek, J.*: Pravděpodobnost ve vědě a technice. Praha, NČSAV, 1962.

[8] *Feller, W.*: An Introduction to Probability Theory and its Applications. New York, Wiley, 1957.

[9] *Fisz, M.*: Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. Warszawa, PWN, 1967.

[10] *Gnedenko, B. V.*: Kurs teorii verojatnostej. Moskva, Nauka, 1969.

[11] *Gnedenko, B. V., Beljaev, Ju. K., Sobolev, A. D.*: Matematičeskie metody teorii nadežnosti. Moskva, Nauka, 1965.

[12] *Gnedenko, B. V., Chinčin, A. Ja.*: Elemenární úvod do teorie pravděpodobnosti. Praha, SNTL, 1954.

[13] *Hátle, J., Likeš, J.*: Základy počtu pravděpodobnosti a matematické statistiky. Praha, SNTL/ALFA, 1974.

[14] *Horský, Z.*: MVŠT. Množiny a matematické struktury. Praha, SNTL, 1979.

[15] *Chinčin, A. Ja.*: Raboty po matematičeskoj teorii massovogo obsluživanija. Moskva, GIFML, 1963.

[16] *Johnson, N. I., Kotz, S.*: Distribution in Statistics. Discrete Distributions. Continuous Univariate Distribution 1, 2. Boston. Houghton Mifflin Company, 1969 a 1970.

[17] *Jurečková, J.*: Úvod do počtu pravděpodobnosti. Praha, SPN, 1972.

[18] *Liebermann, G. J., Owen, D. B.*: Tables of the Hypergeometric Probability Distribution. Stanford University Press, 1961.

[19] *Likeš, J., Laga, J.*: Základní statistické tabulky. Praha, SNTL, 1978.

[20] *Mandl, P.*: Analytical Treatment of One-Dimensional Markov Processes. Praha, Academia, 1968.

[21] *Parzen, E.*: Stochastic Processes. San Francisco, Holden Day, 1962.

[22] *Rao, C. R.*: Lineární metody statistické indukce a jejich aplikace. Praha, Academia, 1972.

[23] *Rényi, A.*: Teorie pravděpodobnosti. Praha, Academia, 1972.

[24] *Svešnikov, A. A. a kol.*: Sbírka úloh z teorie pravděpodobnosti, matematické statistiky a teorie náhodných funkcí. Praha, SNTL, 1971.

[25] *Tutubalin, V. N.*: Teorie pravděpodobnosti. Praha, SNTL, 1978.

[26] *Ventcel, J. S.*: Teorija verojatnostej. Moskva, Nauka, 1969.

Rejstřík