

Trojný integrál $\int \int \int_M f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$

Nutností je znalost AG v \mathbb{E}_3 , kvadratické plochy

Předpoklad (NP pro existenci):

$M \subset \mathbb{E}_3$ je omezená množina, funkce $f(x, y, z)$ je omezená na M

Fyzikální aplikace: hmotnost nehomogenního tělesa

I. (Speciální případ)

Dvojný integrál na kvádru $K = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$

a) dělení D

b) volba V bodů

c) Riemannův součet funkce f při dělení D a volbě bodů V :

$s(f, D, V)$

Definice.

Říkáme, že funkce $f(x, y)$ je integrovatelná na kvádru K ,
jestliže existuje vlastní limita Riemannových součtů,
tj. $\lim_{\|D\| \rightarrow 0} s(f, D, V) = S$.

II. Trojný integrál na obecné množině M

převedeme na integrál na kvádru, viz. kap. II.5 (J. Neustupa).

Fubiniova věta - výpočet $\int \int \int_M f \, dx dy dz$
převod integrálu trojného na trojnásobný,
je-li M tzv. elementární obor integrace

Věta Fubiniova (II.7.2.).

Nechť funkce $f(x, y, z)$ je spojitá na M , kde M je elementární obor integrace vzhledem k rovině xy .

Pak existuje

$$\begin{aligned} & \int \int \int_M f(x, y, z) \, dx dy dz = \\ & = \int \int_{M_{xy}} \left(\int_{\Phi_1(x,y)}^{\Phi_2(x,y)} f(x, y, z) \, dz \right) dx dy \end{aligned}$$

Poznámka: Podobně (cyklicky) při elementárním oboru vzhledem k rovině xz , resp. yz .

Př.

Existence trojného integrálu Analogicky jako pro dvojný integrál

Nutná podmínka pro existenci:

M je omezená množina, fce f je omezená na M .

Postačující podmínka pro existenci

1. varianta

Funkce $f(x, y)$ je **spojitá** na M , kde M je **elementární obor** integrace - viz Fubiniova věta

2. Pro obecnější podm. potřebujeme nový pojem:

Množina $M \subset \mathbb{E}_2$ se nazývá **měřitelná**,

je-li omezená a existuje integrál $\int \int_M 1 \cdot dx dy$.

Jeho hodnotu značíme $\mu_2(M)$ a nazýváme

dvourozměrnou Jordanovou mírou množiny M

Věta.

Množina $M \subset \mathbb{E}_2$ je měřitelná $\iff M$ je omezená a $\mu_2(\partial M) = 0$.

Příklady

Měřitelná je libovolná množina M v \mathbb{E}_2 , jejíž hranice ∂M je omezená křivka, neboť $\mu_2(\partial M) = 0$.

Věta II.2.1. (Postačující podmínka pro existenci)

Nechť M je uzavřená a měřitelná množina v \mathbb{E}_2 a fce f je spojitá na M .

Pak existuje $\int \int_M f \, dx dy$.

V odst. II.2.1 jsou uvedeny další varianty postačující podmínky, např.

fce f je spojitá a omezená na $M \setminus D$, kde M je měřitelná a $\mu_2(D) = 0$

II.2 Některé **vlastnosti** dvojného integrálu (za předpokladu existence integrálů)

a) $\int \int_M \mathbf{konst} \cdot f \, dx dy = \mathbf{konst} \cdot \int \int_M f \, dx dy.$

b) $\int \int_M (f + g) = \int \int_M f + \int \int_M g.$

c) Je-li $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, pak

$$\int \int_{M_1 \cup M_2} f = \int \int_{M_1} f + \int \int_{M_2} f.$$

d) Je-li $f(x, y) \geq 0$ na M , pak $\int \int_M f \geq 0.$

e) Je-li f omezená fce na mn. M a $\mu_2(M) = 0$, pak $\int \int_M f = 0.$

Další aplikace - mechanické charakteristiky desky

Aplikace integrálů (přehled obecně)

Symbol $\int_M f dX$

v tomto přehledu znamená integrál

- a) dvojný
- b) trojný
- c) křivkový
- d) plošný