V.5. Gaussova-Ostrogradského věta

Má-li vektorová funkce $\vec{f} = (U, V, W)$ spojité všechny parciální derivace v otevřené množině $G \subset \mathbb{E}_3$, pak skalární funkci

$$\operatorname{div} \vec{f}(X) = \frac{\partial U}{\partial x}(X) + \frac{\partial V}{\partial y}(X) + \frac{\partial W}{\partial z}(X), \quad X \in G$$

nazýváme **divergencí** *vektorového pole $\vec{f}$.*
Pole $\vec{f}$ se nazývá **solenoidální** *v G, jestliže tok vektorového pole $\vec{f}$ každou uzavřenou, jednoduchou, po částech hladkou plochou $Q \subset G$ je nulový.*

Nechť

a) *funkce $\vec{f} = (U, V, W)$ má spojité všechny parciální derivace v oblasti $G \subset \mathbb{E}_3$;*
b) *$Q \subset G$ je uzavřená, jednoduchá, po částech hladká plocha orientovaná jednotkovým vektorem vnější normály;*
c) *int $Q \subset G$.*

Potom

$$\iint_Q \vec{f} \cdot d\vec{p} = + \iiint\limits_{int\, Q} \operatorname{div} \vec{f}\, dx\, dy\, dz$$

POZNÁMKA: Pokud je plocha Q orientována záporně, tj. vektorem vnitřní normály, pak bude na pravé straně znaménko mínus.

***Příklad* 674**. Jsou dány skalární funkce $\varphi(x, y, z) = xy^2 - y^3z^2$ a vektorová funkce $\vec{f}(x, y, z) = (xy^2, x^2 + 2z, 3yz)$ v $\mathbb{E}_3$. Spočítejte div(gradφ) a div(rot$\vec{f}$).

Řešení : grad $\varphi = \nabla\varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = (y^2, 2xy - 3y^2z^2, -2y^3z)$,

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi) = \nabla \cdot \big(\nabla\varphi\big) = \Delta\varphi = 0 + 2x - 6yz^2 - 2y^3,$$

$$\operatorname{rot}\vec{f} = \nabla \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ U & V & W \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy^2 & x^2 + 2z & 3yz \end{vmatrix} = (3z - 2, 0, 2x - 2xy),$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{f}) = \nabla \cdot \big(\nabla \times \vec{f}\big) = 0.$$ ■

***Příklad* 675**.* Určete, kde je vektorové pole $\vec{f}(x, y, z) = \left(\frac{1}{x} + 3y + 5, 2x - \frac{2}{y} - 3, 1 + \frac{z}{x^2} - \frac{2z}{y^2}\right)$ solenoidální.

Řešení : Pro definiční obor musí platit $x \neq 0$ a $y \neq 0$.

Dostaneme oblasti G_i, $i = 1, 2, 3, 4$:

$$G_1 = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 : x < 0, y < 0\}, \quad G_2 = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 : x < 0, y > 0\},$$
$$G_3 = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 : x > 0, y < 0\}, \quad G_4 = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 : x > 0, y > 0\}.$$

V každé z těchto oblastí je $\operatorname{div}\vec{f} = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{y^2} + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{y^2} = 0.$

K výpočtu toku daného pole $\vec{f}$ libovolnou uzavřenou plochou Q ležící v kterékoliv z těchto oblastí lze použít G.O. větu, jejíž předpoklady jsou splněny. Je tedy

$$\iint_Q \vec{f}\cdot d\vec{p} = \iiint_{int\,Q} \mathrm{div}\vec{f}\ dx\,dy\,dz = \iiint_{int\,Q} 0\ dx\,dy\,dz = 0.$$

Zadané vektorové pole je solenoidální v každé z oblastí G_i.

■

***Příklad* 676**. Je dáno vektorové pole $\vec{f}(x,y,z) = \dfrac{(z-y,x,-x)}{x^2+y^2+z^2}$. Určete definiční obor $G \subset \mathbb{E}_3$ funkce $\vec{f}$ a ověřte, že $\mathrm{div}\vec{f} = 0$ v G. Pro která z následujících kladně orientovaných ploch $\iint_Q \vec{f}\cdot d\vec{p}$ existuje a kdy lze použít G.-O. větu?

a) $Q_1 = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3\,;x^2+y^2+z^2-4x=0\}$;
b) Q_2 je povrch kvádru : $x=-1, x=3, y=-2, y=1, z=-1, z=1$;
c) $Q_3 = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3\,;x^2+y^2+z^2-6y+5=0\}$.

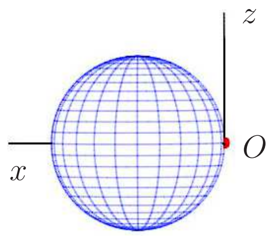
Řešení : Definiční obor je $\mathbb{E}_3 \setminus [0,0,0]$. Snadno se přesvědčíme, že $\mathrm{div}\vec{f} = 0$:

$$\mathrm{div}\vec{f}(X) = -\frac{(z-y)\cdot 2x}{(x^2+y^2+z^2)^2} - \frac{x\cdot 2y}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{x\cdot 2z}{(x^2+y^2+z^2)^2} = 0.$$

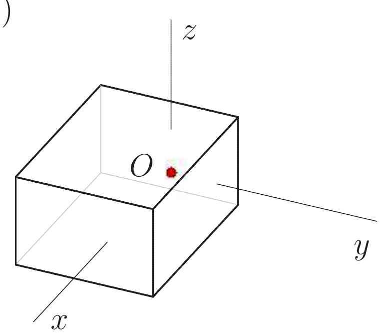
a) $(x^2-4x+4)+y^2+z^2 = 4 \Longrightarrow (x-2)^2+y^2+z^2 = 2^2$,

$O = [0,0,0] \in Q_1 \quad \Longrightarrow$

Integrál neexistuje a nelze použít G.-O. větu.



b)



$O = [0,0,0] \notin Q_2 \Rightarrow$ integrál existuje,

ale $O = [0,0,0] \in int\,Q_2 \Rightarrow$

integrál existuje a nelze použít G.-O. větu.

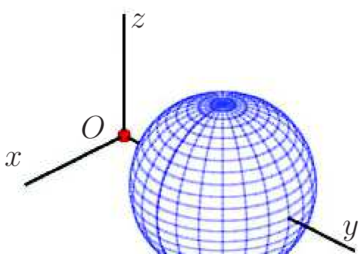
c)

$x^2+(y-3)^2+z^2 = 4$,

$O = [0,0,0] \notin Q_3$,

$O = [0,0,0] \notin int\,Q_3$.

Daný integrál existuje a lze použít G.-O větu.



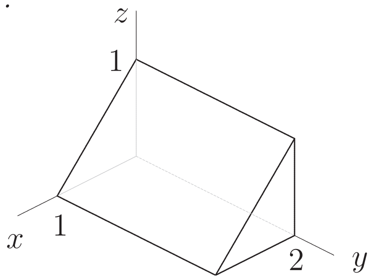
$$\iint_{Q_3} \vec{f}\cdot d\vec{p} = \iiint_{int\,Q_3} \mathrm{div}\,\vec{f}\,dx\,dy\,dz = \iiint_{int\,Q_3} 0\,dx\,dy\,dz = 0.$$

■

• Užitím G.-O. věty vypočtěte tok vektorového pole $\vec{f}$ vnější stranou uzavřené plochy Q :

***Příklad* 677**. $\vec{f} = (3x+y, 2y-z+5, x+2y+z)$, $\quad Q$ je povrch tělesa omezeného rovinami $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+z=1,\ y=2$.

Řešení :



$$\iint_Q \vec{f}\cdot d\vec{p} = \iiint\limits_{int\,Q} \operatorname{div}\vec{f}\,dx\,dy\,dz =$$

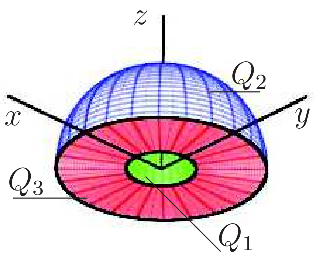
$$= \iiint\limits_{int\,Q} (3+2+1)\,dx\,dy\,dz =$$

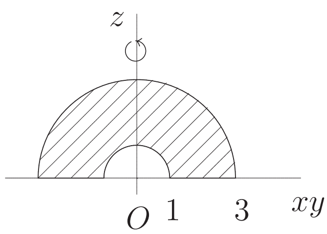
$$= 6\iiint\limits_{int\,Q} 1\,dx\,dy\,dz = \quad \Big(\iiint\limits_{int\,Q} 1\,dx\,dy\,dz \text{ se rovná objemu vnitřku plochy } Q\text{, což je objem}$$

$$\text{trojbokého hranolu}\Big) = 6\cdot\frac{1\cdot 1}{2}\cdot 2 = 6.$$ ■

***Příklad* 678**. $\vec{f} = (xy^2, yz^2, zx^2)$, $\quad Q = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3$, kde $\quad Q_1 = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;$ $x^2+y^2+z^2 = 1, z \geq 0\};$ $\quad Q_2 = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3; x^2+y^2+z^2 = 9,\ z \geq 0\};$ $Q_3 = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3; 1 \leq x^2+y^2 \leq 9,\ z = 0\}$

Řešení :





$$\iint_Q \vec{f}\cdot d\vec{p} = \iiint\limits_{int\,Q} \operatorname{div}\vec{f}\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint\limits_{int\,Q} (y^2+z^2+x^2)\,dx\,dy\,dz =$$

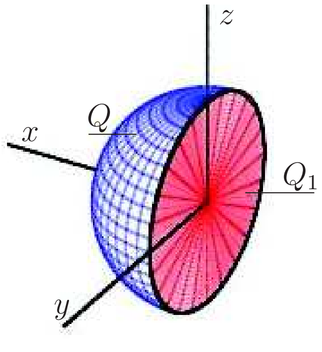
$$= \left| \begin{array}{lcl} int\,Q: \quad 1 < x^2+y^2+z^2 < 9 & x = r\cos\varphi\cos\vartheta & 1 < r < 3 \\ \qquad\qquad\qquad z > 0 & y = r\sin\varphi\cos\vartheta & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ & z = r\sin\vartheta & 0 < \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \\ & J = r^2\cos v & x^2+y^2+z^2 = r^2 \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_1^3 r^2\cdot r^2\cos\vartheta\,dr\right)d\varphi\right)d\vartheta = \int_0^{\pi/2}\cos\vartheta\,d\vartheta\cdot\int_0^{2\pi}1\,d\varphi\cdot\int_1^3 r^4\,dr =$$

$$= \Big[\sin\vartheta\Big]_0^{\pi/2}\cdot 2\pi\cdot\left[\frac{r^5}{5}\right]_1^3 = 1\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{5}(3^5-1) = \frac{484}{5}\,\pi.$$ ■

***Příklad* 679**. Určete tok vektorového pole $\vec{f} = (x, y, -z)$ plochou $Q = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;$ $x^2+y^2+z^2 = \ 4, x \geq 0\}$, orientovanou normálovým vektorem $\vec{n}^o([2,0,0]) = -\vec{i}$.

Řešení :



Plocha Q je polovina kulové plochy s body majícími x-ové souřadnice nezáporné. Takto zadaná plocha není uzavřená. Tok touto plochou můžeme spočítat pomocí plošného integrálu $\iint_Q \vec{f}\cdot\ d\vec{p}$. Chceme-li použít G.-O. větu, musíme přidat ještě plochu Q_1 tak, aby $Q \cup Q_1$ byla plocha uzavřená, stejně orientovaná. Tedy

$$(\star)\qquad \iint\limits_{Q\cup Q_1} \vec{f}\cdot d\vec{p} = \iint_Q \vec{f}\cdot d\vec{p} + \iint_{Q_1} \vec{f}\cdot d\vec{p} \overset{\text{G.-O.}}{=\!=\!=} \pm \iiint\limits_{int\,(Q\cup Q_1)} \operatorname{div}\vec{f}\,dx\,dy\,dz$$

$$\iint_{Q_1} \vec{f}\cdot d\vec{p} = \iint_{Q_1} (x,y,-z)\cdot d\vec{p} = \left| \begin{array}{c} Q_1 : x=0, y^2+z^2\le 4 \\ \vec{n}^o = (1,0,0) \\ \text{normály ploch } Q, Q_1 \\ \text{směřují dovnitř plochy } Q\cup Q_1 \end{array} \right| =$$

$$= \iint_{Q_1} (x,y,-z)\cdot \vec{n}^o\,dp = \iint\limits_{y^2+z^2\le 4} (0,y,-z)\cdot(1,0,0)\,dy\,dz = 0$$

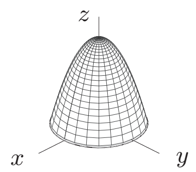
Vrátíme se k $(\star)$ a při použití věty G.-O. pamatujeme, že normály směřují dovnitř plochy $Q\cup Q_1$, takže před trojným integrálem na pravé straně napíšeme znaménko minus.

$$\iint_Q \vec{f}\cdot d\vec{p} + 0 = -\iiint\limits_{int\,(Q\cup Q_1)} (1+1-1)\,dx\,dy\,dz = -\left(\tfrac{1}{2}\text{ objemu koule}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 2^3 = -\frac{16}{3}\pi. \qquad \blacksquare$$

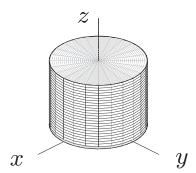
- Je dáno vektorové pole $\vec{f}$ a je dána plocha Q.
  - a) Napište Gaussovu-Ostrogradského větu. Ověřte, že jsou splněny předpoklady pro výpočet toku vektorového pole $\vec{f}$ plochou Q.
  - b) Načrtněte danou plochu.
  - c) Vypočítejte $\operatorname{div}\vec{f}$.
  - d) Vypočítejte $\displaystyle\iint_Q \vec{f}\cdot d\vec{p}$, tj. tok vektorového pole z úlohy a).

680. $\vec{f} = (x+\cos x, y+\mathrm{e}^z, z+z\sin x)$, Q je dovnitř orientovaný povrch tělesa, které je omezené plochami o rovnicích $z = 4-x^2-y^2$, $z=0$.



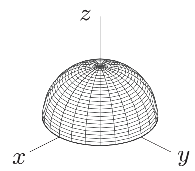
$\left[\begin{array}{l} c)\ \operatorname{div}\vec{f} = 3 \\ d)\ -24\pi \end{array}\right]$

681. $\vec{f} = (x^3, z^2, y^2)$, $D = \{[x,y,z]\in\mathbb{E}_3 :\ x^2+y^2\le 4, 0\le z\le 3\}$, plocha Q je povrchem tělesa D orientována vně.



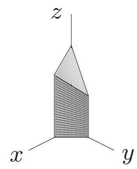
$\left[\begin{array}{l} c)\ \operatorname{div}\vec{f} = 3x^2 \\ d)\ 36\pi \end{array}\right]$

682. $\vec{f} = (y, x, z^2)$, plocha Q je povrchem tělesa D a je orientována vnější normálou, $D = \{[x,y,z]\in\mathbb{E}_3; x^2+y^2+z^2\le 4,\ z\ge 0\}$.



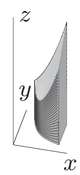
$\left[\begin{array}{l} c)\ \operatorname{div}\vec{f} = 2z \\ d)\ 8\pi \end{array}\right]$

683. $\vec{f} = (y^2, x+z, zx^2)$, Q je povrch tělesa D, který je orientovaný směrem dovnitř, $D = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1, 0 \leq z \leq 4-x-2y\}$.



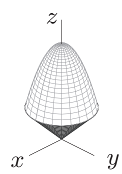
$\left[\begin{array}{l} c)\ \mathrm{div}\vec{f} = x^2 \\ d)\ -1/4 \end{array}\right]$

684. $\vec{f} = (x,y,z)$, $D = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ x \leq 2,\ y \leq 2,\ y \geq 1/x, 0 \leq z \leq x^2+y\}$, Q je povrch tělesa D orientovaný směrem ven.



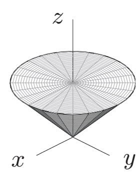
$\left[\begin{array}{l} c)\ \mathrm{div}\vec{f} = 3 \\ d)\ 135/8 \end{array}\right]$

685. $\vec{f} = (2x+y^2, 0, 2x-y^2)$, $D = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3 : \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 6-x^2-y^2\}$, Q je povrch tělesa D orientovaný směrem vně.



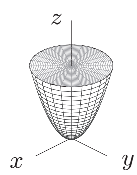
$\left[\begin{array}{l} c)\ \mathrm{div}\vec{f} = 2 \\ d)\ 64\pi/3 \end{array}\right]$

686. $\vec{f} = (xy^2, z\mathrm{e}^{-x}, zx^2)$, $D = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3;\ \sqrt{3x^2+3y^2} \leq z \leq 3\}$, plocha Q je dovnitř orientovaný povrch tělesa D.



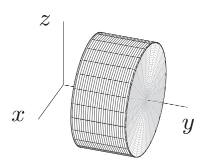
$\left[\begin{array}{l} c)\ \mathrm{div}\vec{f} = x^2+y^2 \\ d)\ -27\pi/10 \end{array}\right]$

687. $\vec{f} = (z, y^3, x)$, Q je povrch tělesa $D = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3 : x^2+y^2 \leq z \leq 4\}$, který je orientovaný vně.



$\left[\begin{array}{l} c)\ \mathrm{div}\vec{f} = 3y^2 \\ d)\ 16\pi \end{array}\right]$

688. $\vec{f} = (xz^2, x^2y, yz)$, Q je vně orientovaný povrch tělesa, které je omezeno plochami $x^2+z^2 = 4,\ y = 1,\ y = 3$.



$\left[\begin{array}{l} c)\ \mathrm{div}\vec{f} = x^2+y^2+z \\ d)\ 32\pi \end{array}\right]$

• Užitím G.-O. věty vypočtěte tok vektorového pole $\vec{f}$ po částech hladkou uzavřenou a orientovanou plochou Q :

689. $\vec{f}=(x,y,z)$, Q je povrch kužele s poloměrem podstavy a a výškou b, orientace vnější normálou. $[\pi a^2 b]$

690. $\vec{f}=(xy^2,yz,x^2z)$, Q je povrch dutého válce omezeného plochami $Q_1 : x^2+y^2=1$, $Q_2 : x^2+y^2=4$, $Q_3 : z=1$, $Q_4 : z=3$, orientace vnější normálou. $[27\pi]$

691. $\vec{f}=(x^3,y^3,z^3)$, $Q=Q_1\cup Q_2$ $Q_1 : x^2+y^2+z^2=1$, $z\le 0$, $Q_2 : z=0$, $x^2+y^2\le 1$ orientace je dovnitř plochy. $\left[-\frac{6}{5}\pi\right]$

692. $\vec{f}=(x^2,y^2,z^2)$, Q je povrch krychle $0\le x\le a$, $0\le y\le a$, $0\le z\le a$, orientace vnější normálou. $[3a^4]$

693. $\vec{f}=(x,y,z)$, $Q=\{[x,y,z]\in\mathbb{E}_3; x^2+y^2+y^2=a^2\}$, orientace vnitřní normálou. $[-4\pi a^3]$

694. $\vec{f}=(x^2,y^2,z^2)$, Q je kulová plocha se středem v bodě $[1,-2,0]$ a poloměrem $r=3$, orientace vnější normálou. $[-72\pi]$

695. $\vec{f}=(y,2x,-z)$, Q je povrch tělesa omezeného plochami $Q_1 : x^2+y^2=a^2$, $Q_2 : z=-a$, $Q_3 : z=a$ $(a>0)$, orientace je dovnitř plochy. $[2\pi a^3]$

696. $\vec{f}=(x^2,y^2,z^2)$, Q je povrch tělesa omezeného $-2\le z\le 4-x^2-y^2$, $x^2+y^2\le 4$, orientace je dovnitř plochy. $\left[-\frac{16}{3}\pi\right]$

697. $\vec{f}=(x,y,z)$, Q je povrch tělesa omezeného plochami $x^2=y^2+z^2$, $x=3$, orientace vnější normálou. $[27\pi]$

698. $\vec{f}=(x^3,z,y)$, Q je povrch tělesa omezeného plochami $z=x^2+y^2$, $z=4$, orientace vnější normálou. $\left[\frac{16}{3}\pi\right]$

699. $\vec{f}=(2xy,-y^2,2z)$, $Q=\{[x,y,z]\in\mathbb{E}_3; \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}=1\}$, orientace vnější normálou. $[32\pi]$

700. $\vec{f}=(x,y,x^2+y^2)$, Q je povrch tělesa omezeného plochami $x^2+y^2=b^2$, $z=0$, $z=a$, $y=0$ $(y\ge 0,\ a\ge 0)$, orientace vnější normálou. $[b^2 a\pi]$

701. $\vec{f}=(x,y,z)$, Q je část válcové plochy $x^2+y^2=9$, $0\le z\le 4$ (plocha je otevřená), $\vec{n}^o([3,0,0])=-\vec{i}$. Výpočet proveďte a) přímo pomocí plošného integrálu; b) užitím věty G.-O. (Plocha se musí uzavřít pomocí $Q_1 : z=0$, $Q_2 : z=4$). $[-72\pi]$

702. $\vec{f}=\left(\dfrac{x}{x^2+y^2},\dfrac{y}{x^2+y^2},x^2+z\right)$. Ve kterých následujících zadáních plochy Q lze použít větu G.-O.? V kladném případě vypočítejte $\displaystyle\iint_Q \vec{f}\cdot d\vec{p}$. a) $Q : x^2+y^2+z^2=4$, orientace vnější normálou; b) Q je povrch kvádru omezeného rovinami $x=0$, $x=1$, $y=1$, $y=3$, $z=2$, $z=5$, orientace vnitřní normálou. [a)nelze; b) lze; -6]