# Pravděpodobnost a matematická statistika

Doc. RNDr. Gejza Dohnal, CSc.
dohnal@nipax.cz

# Pravděpodobnost a matematická statistika 2010

1.týden (20.09.-24.09. ) Data, typy dat, variabilita, frekvenční analýza (histogramy, četnosti absolutní, relativní, prosté, kumulativní), základní statistické charakteristiky (průměr, výběr.rozptyl, minimum, maximum, medián, kvartily, boxplot), sešikmenná rozdělení (vzájemná poloha mediánu a střední hodnoty), chvosty, kvantily

2. týden (27.09.-01.10.) Princip statistické indukce, výběr, vlastnosti výběru, experiment. Náhodná veličina, rozdělení pravděpodobnosti a jeho souvislost s histogramem. Pravděpodobnost, pravidla pro počítání s pravděpodobností, podmíněná pravděpodobnost, závislost náhodných veličin.

3.týden (04.10.-08.10.) Využití závislosti při stanovení pravděpodobnosti - věta o úplné pravděpodobnosti a Bayesova věta

**4.týden (11.10.-15.10.) Rozdělení chyb měření - normální rozdělení a počítání s ním. Odhady parametrů normálního rozdělení. Intervaly spolehlivosti pro normální data. Jednovýběrové testy o střední hodnotě**

5.týden (18.10.-24.10.) Výběrový poměr jako odhad pravděpodobnosti sledovaného jevu. Alternativní rozdělení, binomické rozdělení. Intervalový odhad výběrového poměru. Výběry s vracením a bez vracení (binomické a hypergeometrické rozdělení)

6.týden (25.10.-29.10.) odpadá

7.týden (01.11.-05.11.) Poruchy v čase (Poissonův proces). Poissonovo rozdělení, exponenciální rozdělení, jeho výhody a nevýhody, modelování doby do poruchy pomocí Weibullova rozdělení, lognormálního rozdělení, případně useknuté normální rozdělení.

8.týden (08.11.-12.11.) Testy dobré shody, Q-Q graf (pouze vysvětlení), testy normality. Některé neparametrické testy

9.týden (15.11.-19.11.) Dvě náhodné veličiny - srovnání dvou výběrů (dvouvýběrové testy)

10. týden (22.11.-26.11.) Dvě náhodné veličiny. Dvourozměrné četnosti jako odhad dvourozměrného rozdělení, frekvenční tabulka. Marginální rozdělení (vše pouze diskrétně s tabulkou)

11. týden (29.11.-03.12.) Závislost náhodných veličin, míry závislosti (kovariance, korelace), test významnosti korelačního koeficientu

12. týden (06.12.-10.12.) Regrese, lineární regresní model (přímková, kvadratická, polynomická regrese), analýza reziduí, pásy spolehlivosti

13. týden (13.12.-17.12.) Více výběrů, jednoduché třídění, ANOVA.

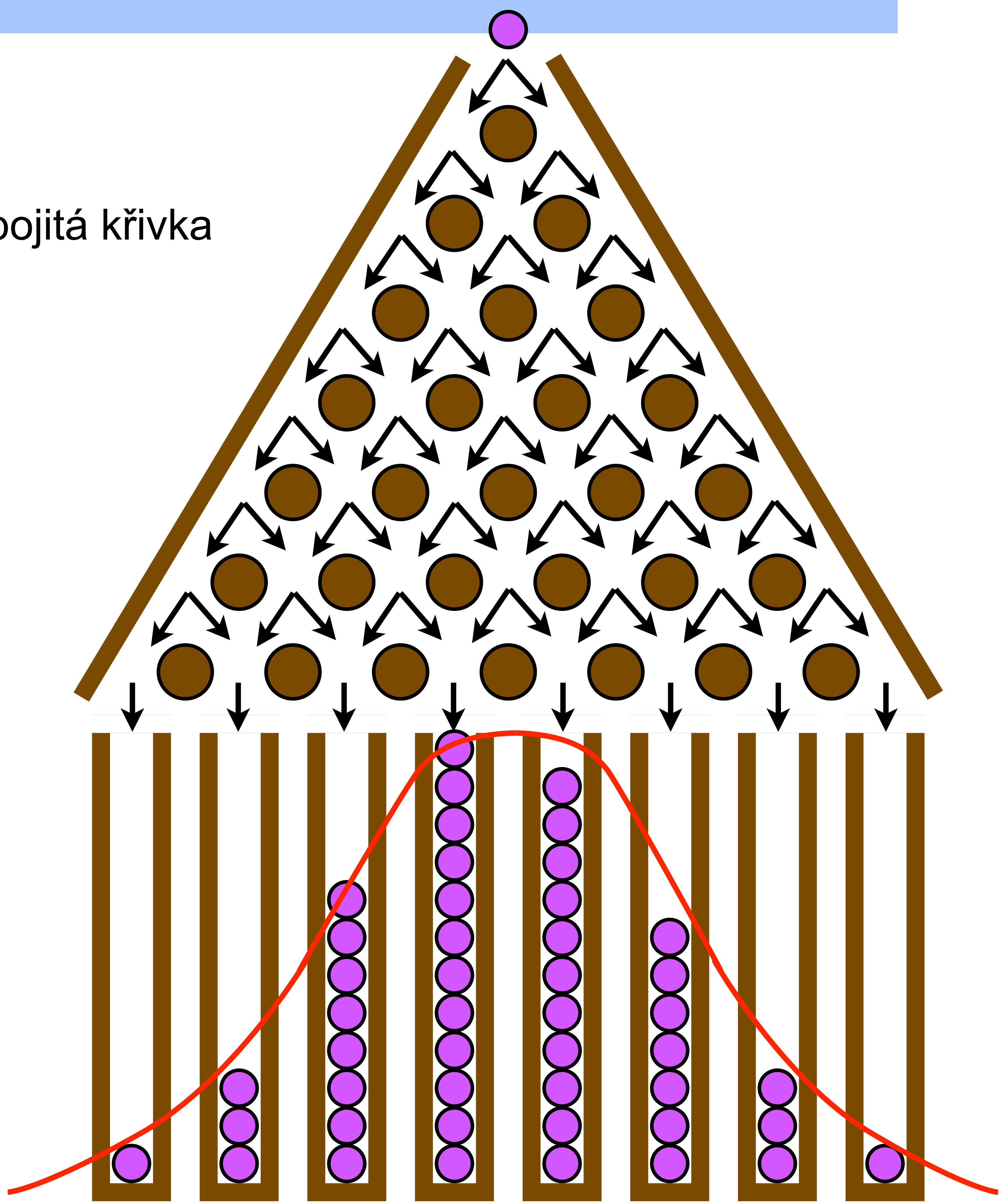
14. týden (20.12.-22.12.) Rezerva, opakování, testy normality (náhrada za 28.10.)

# Od hazardu ke hvězdám ...

1733 : Abraham de Moivre

pokusy s mincemi ⟶ spojitá křivka

Galtonova deska



# Od hazardu ke hvězdám ...

1733 : Abraham de Moivre

pokusy s mincemi ⟶ spojitá křivka

Galtonova deska

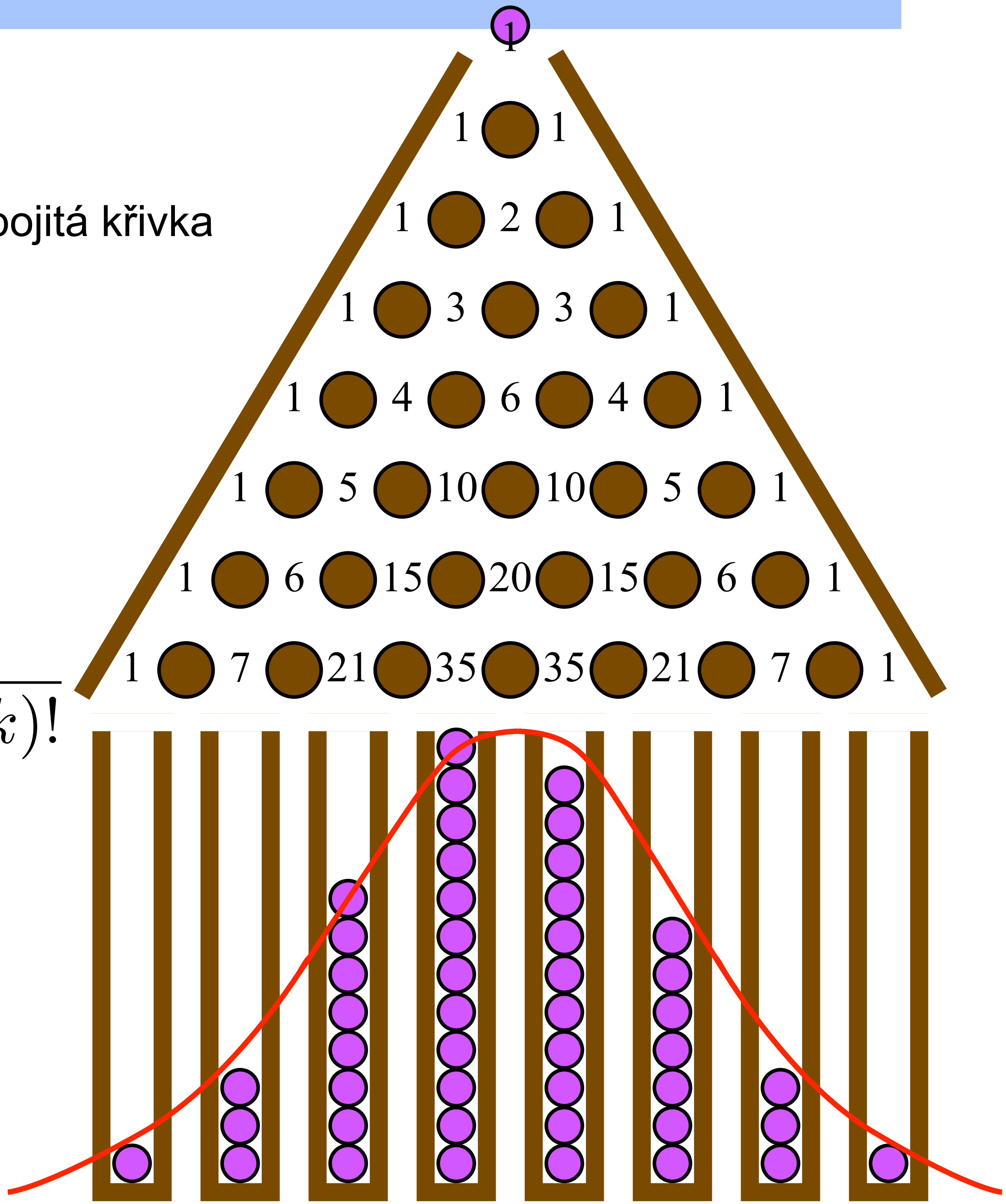
Pascalův trojúhelník

$$n_k = \binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$$

Moivre navrhl rovnici:

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$y = Ke^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}}$$



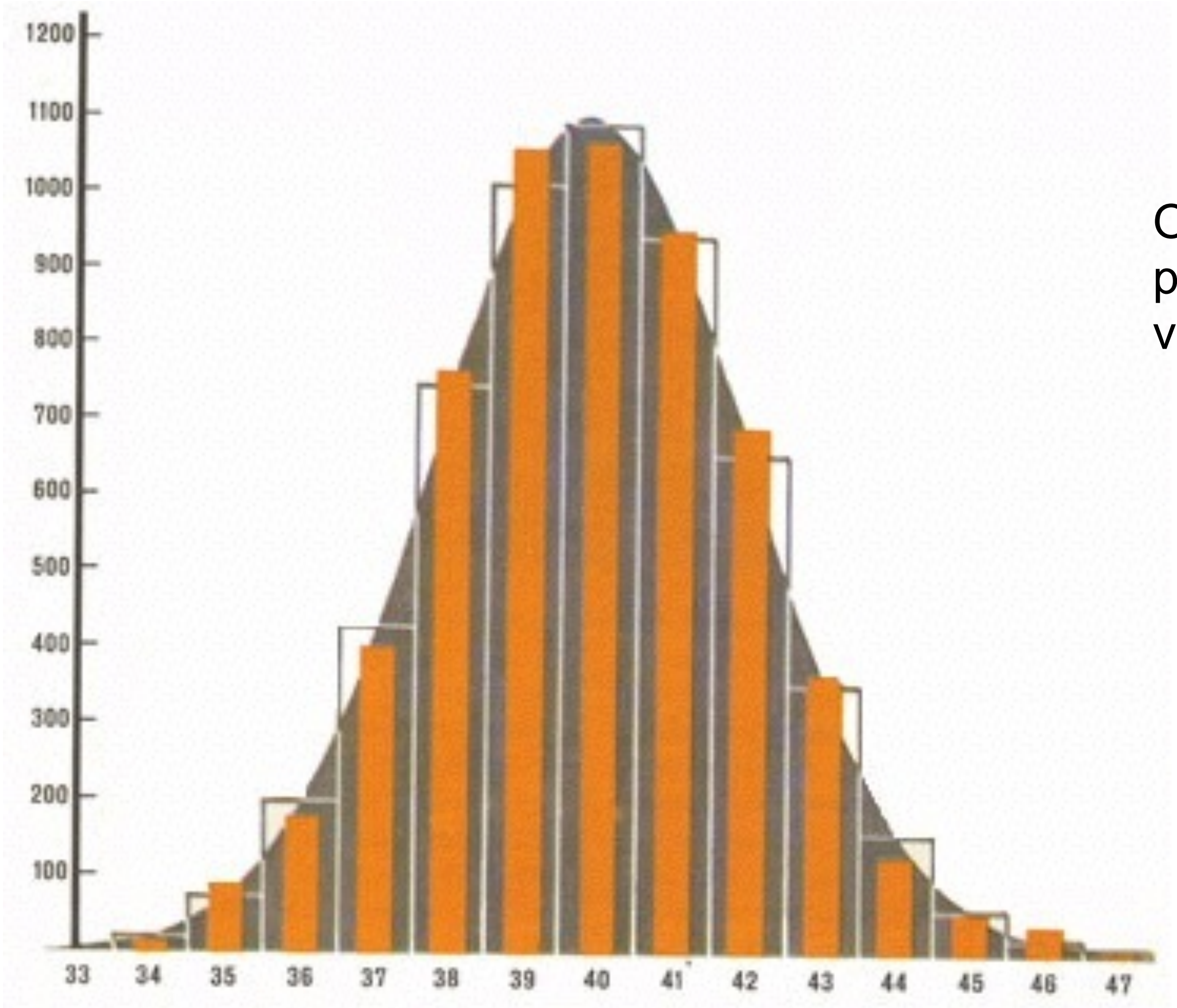
# Rozdělení chyb měření

přelom 18. a 19. století: rozdíly v astronomických měřeních
- která hodnota je správná?

Karl Friedrich Gauss a Piere Laplace: “křivka chyb měření”

*gaussova křivka*

počátek 19. století: Adolphe Qételet
- antropometrická měření anglických vojáků




Obvod hrudi skotských vojáků v palcích, naměřený Quételetem ve dvacátých letech 19. století

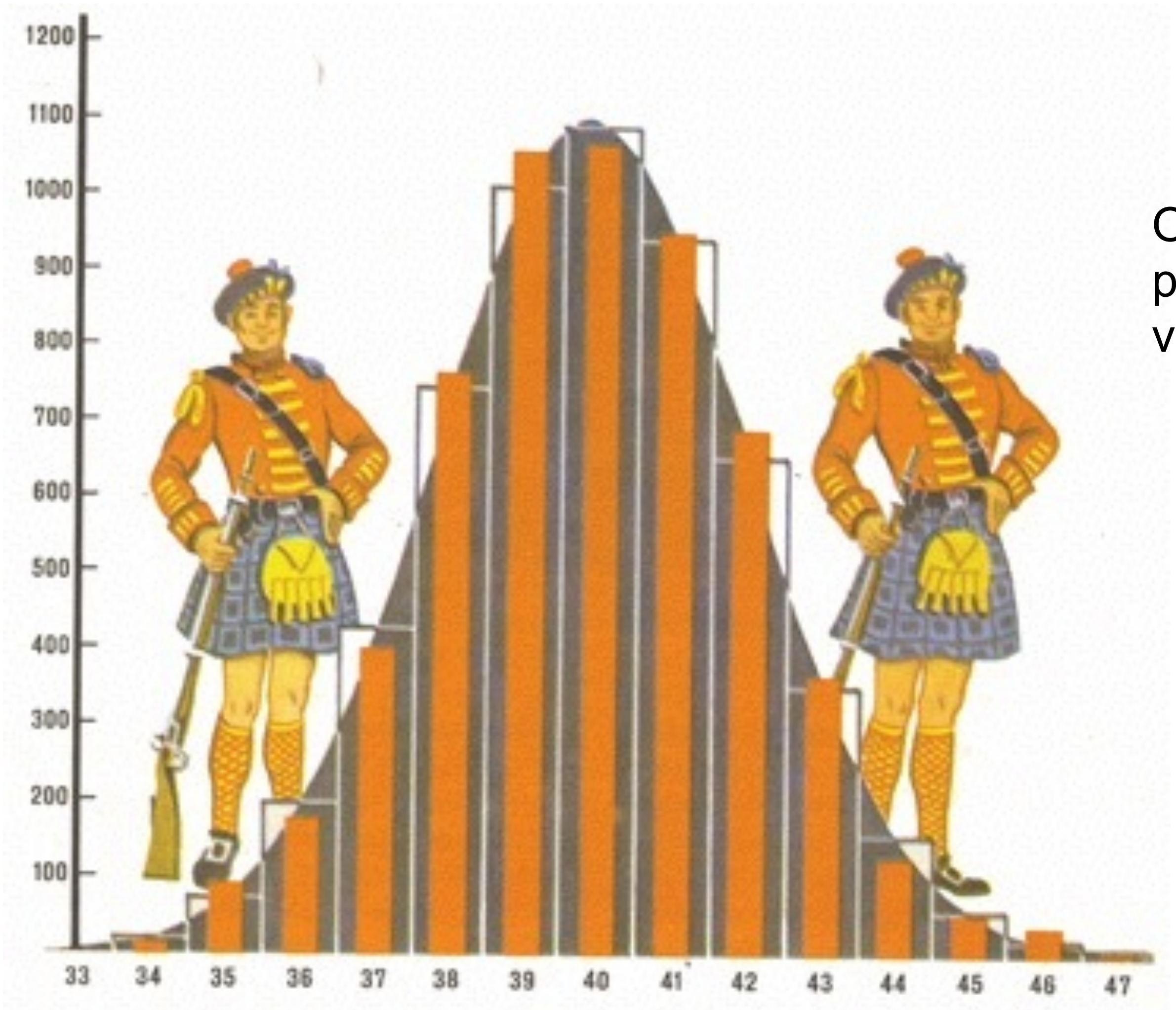
# Normální rozdělení

přelom 18. a 19. století: rozdíly v astronomických měřeních
- která hodnota je správná?

Karl Friedrich Gauss a Piere Laplace: “křivka chyb měření”

*gaussova křivka*

počátek 19. století: Adolphe Qételet
- antropometrická měření anglických vojáků




Obvod hrudi skotských vojáků v palcích, naměřený Quételetem ve dvacátých letech 19. století

normální rozdělení

# Normální rozdělení

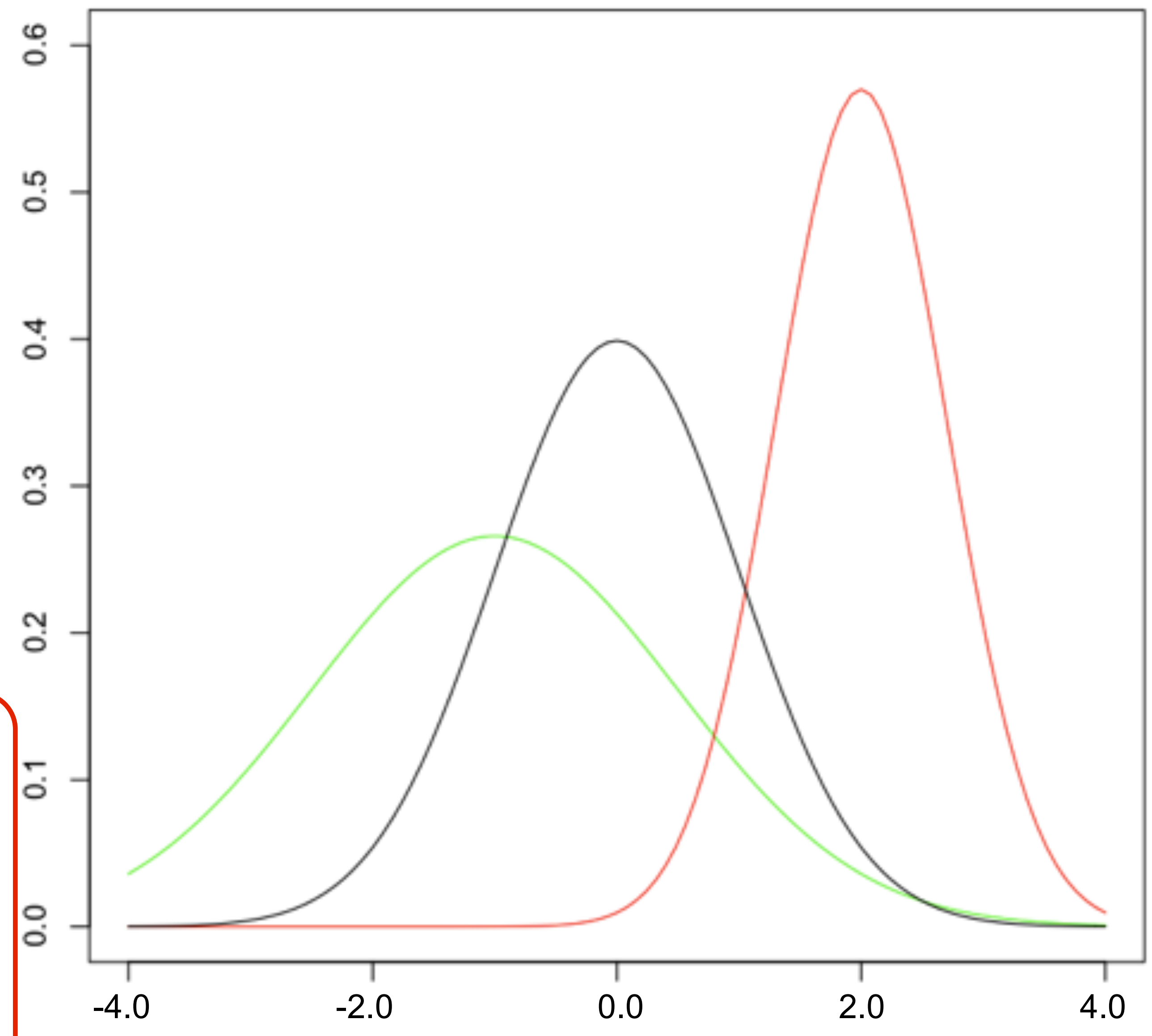
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$x \in R$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

hustota pravděpodobnosti




$\sigma > 0$ - parametr měřítka,

$\mu \in R$ - parametr polohy

Normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$

# Normální rozdělení

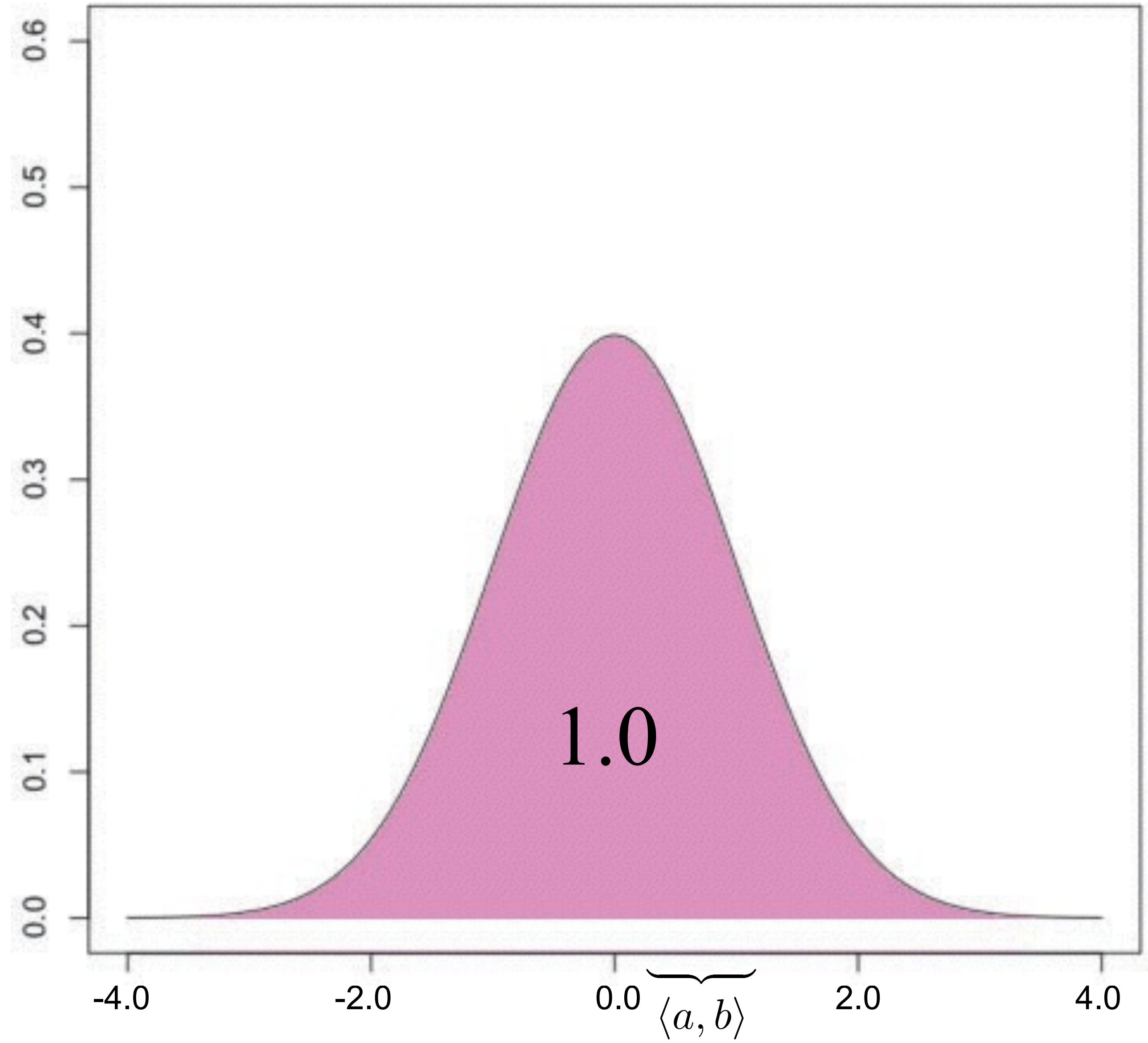
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$x \in R$$

Standardní normální rozdělení $N(0,1)$

$$X \sim N(0,1)$$

$$X \in (-\infty, +\infty)$$




$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

# Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$x \in R$$

$$X \sim N(0,1)$$

$$P(-1 \leq X \leq 1) = 0.6826$$

$$P(-2 \leq X \leq 2) = 0.9545$$

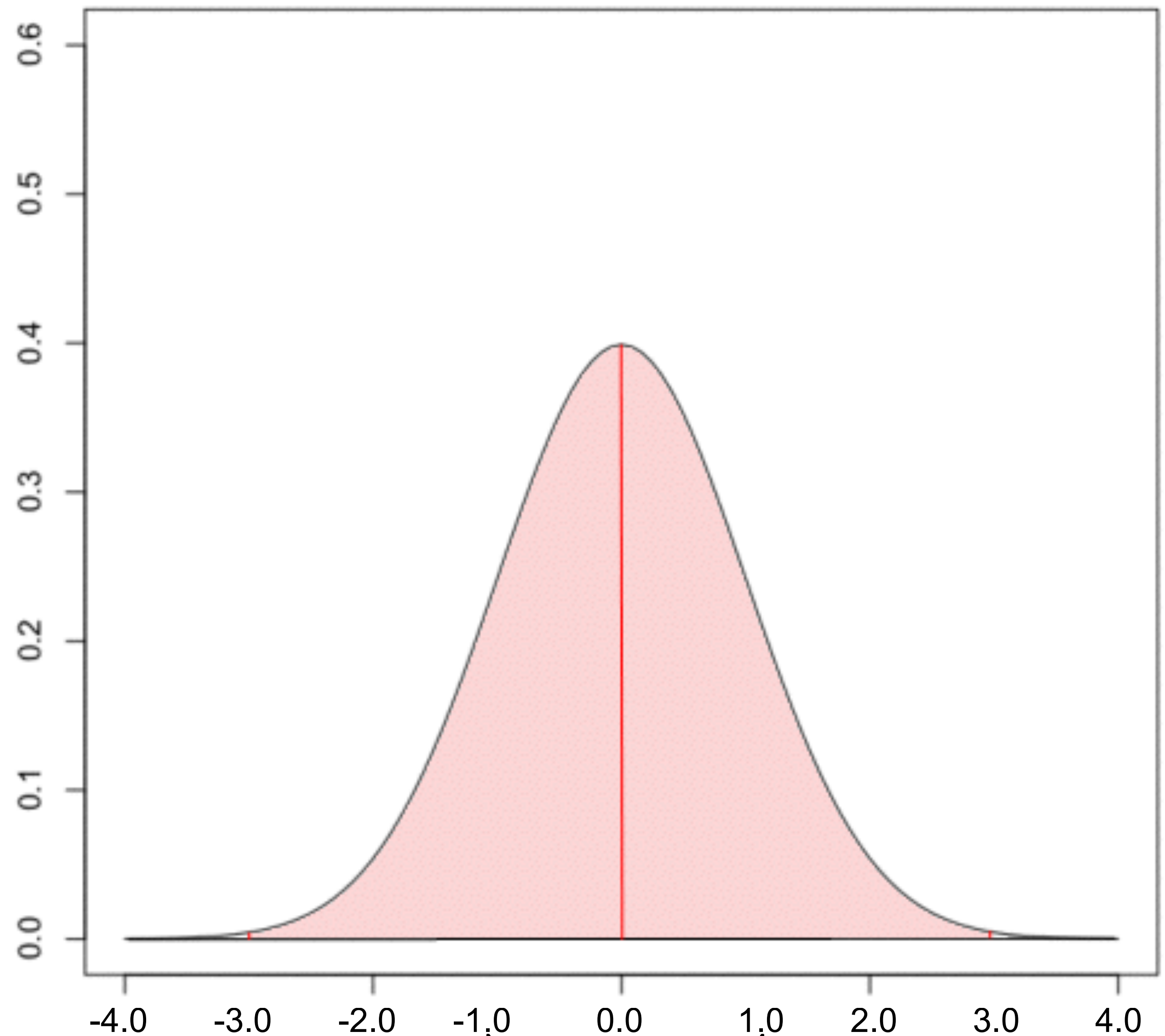
$$P(-3 \leq X \leq 3) = 0.9973$$

$$Y \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$P(\mu - \sigma \leq Y \leq \mu + \sigma) = 0.6826$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq Y \leq \mu + 2\sigma) = 0.9545$$

$$P(\mu - 3\sigma \leq Y \leq \mu + 3\sigma) = 0.9973$$




$\langle \mu - \sigma, \mu + \sigma \rangle$
68,26%

$\langle \mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma \rangle$
95%

$\langle \mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma \rangle$
99.7%

# Normální rozdělení

$$X \sim N(0,1) \qquad Y \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$P(-1 \leq X \leq 1) = 0.6826 \quad P(\mu - \sigma \leq Y \leq \mu + \sigma) = 0.6826$$

$$P(-2 \leq X \leq 2) = 0.9545 \quad P(\mu - 2\sigma \leq Y \leq \mu + 2\sigma) = 0.9545$$

$$P(-3 \leq X \leq 3) = 0.9973 \quad P(\mu - 3\sigma \leq Y \leq \mu + 3\sigma) = 0.9973$$

$$P(\mu - k\sigma \leq Y \leq \mu + k\sigma) = P(-k\sigma \leq Y - \mu \leq k\sigma)$$

$$= P\left(-k \leq \frac{Y-\mu}{\sigma} \leq k\right) = P(-k \leq X \leq k)$$

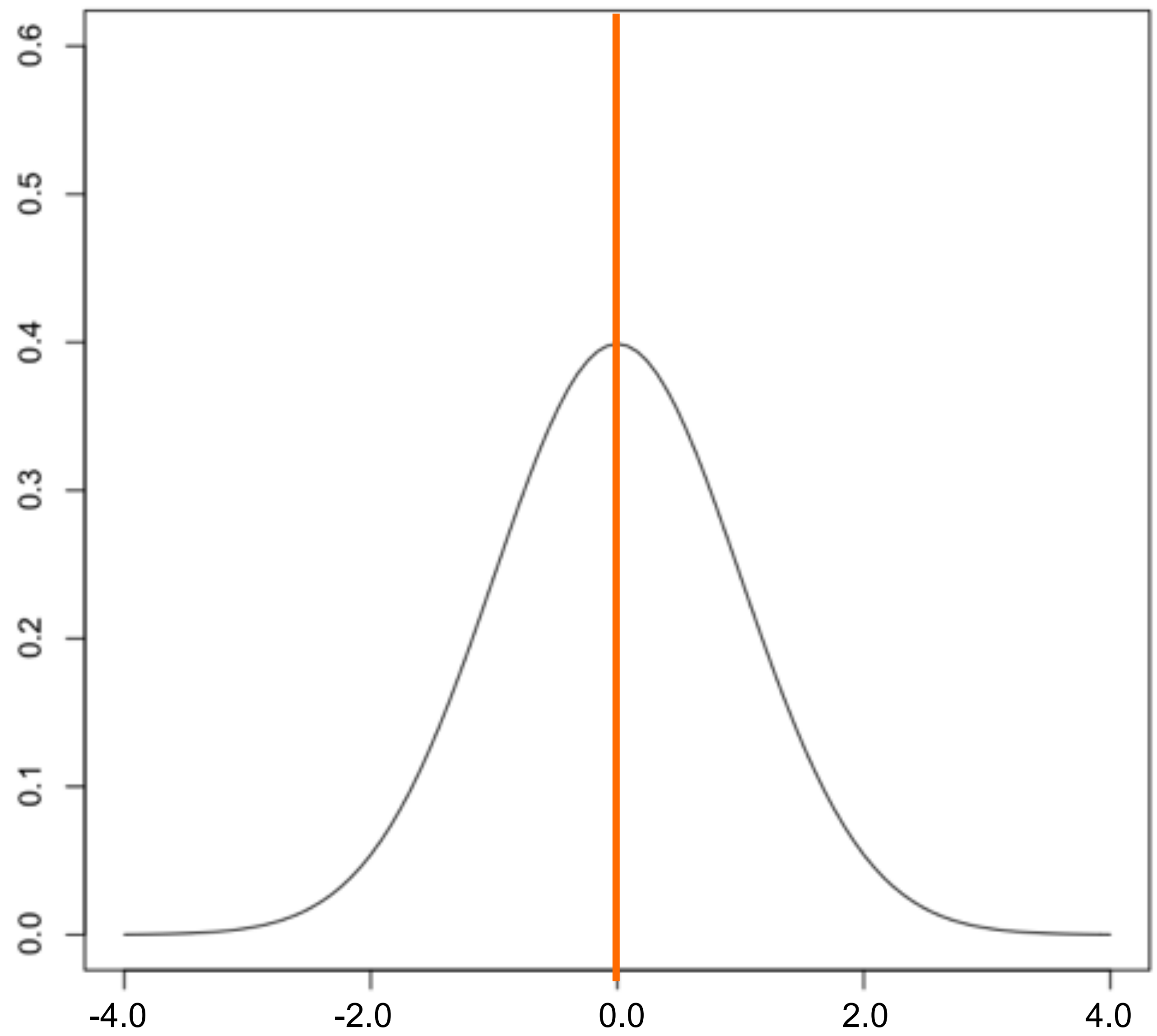
$$\boxed{Y \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow X = \frac{Y-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)}$$

# Normální rozdělení

Symetrie:

$$X \sim N(0,1)$$
$$f(x) = f(-x)$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$
$$f(\mu + x) = f(\mu - x)$$



# Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

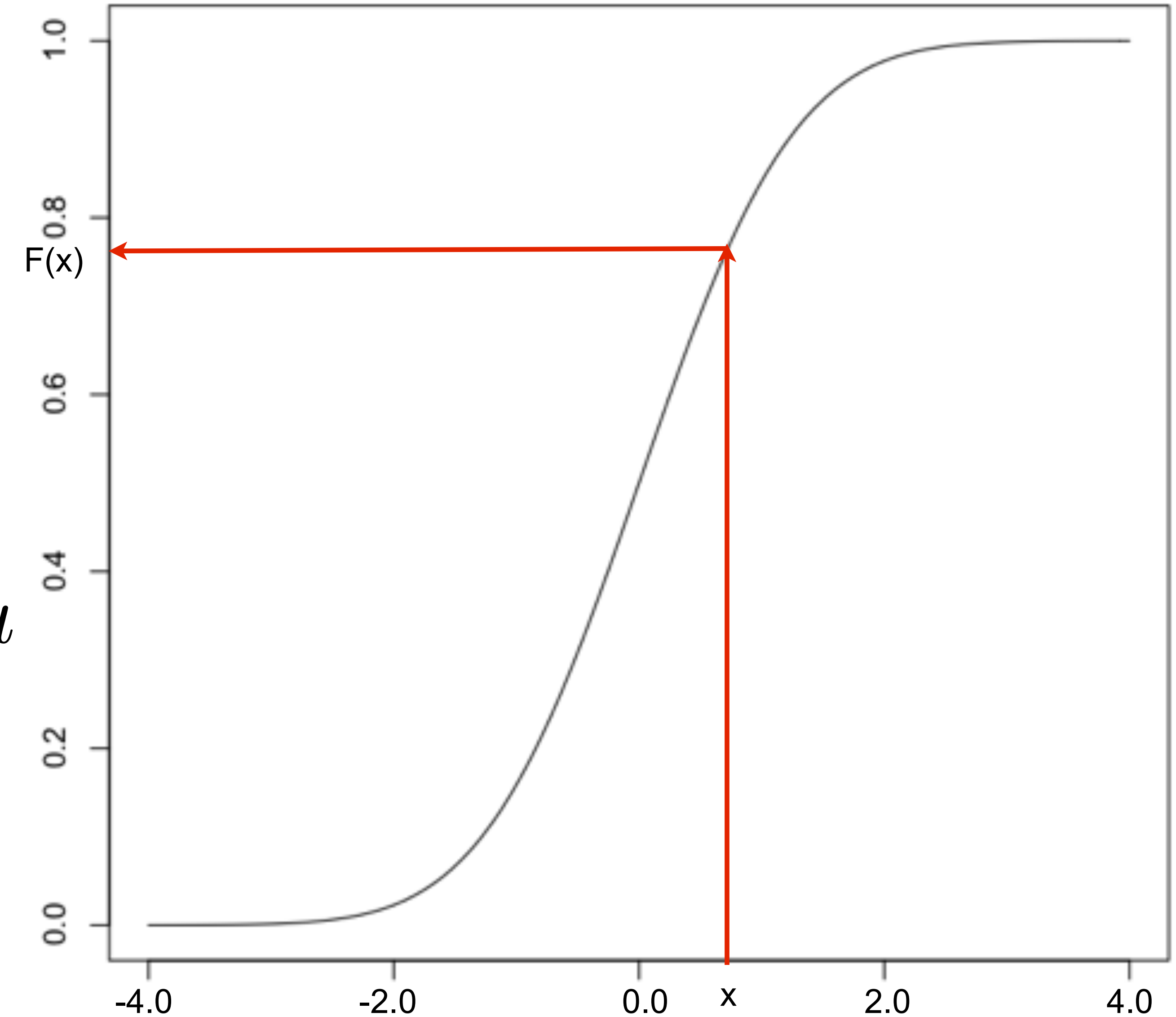
$$x \in R$$

$$X \sim N(0,1)$$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

$$\Phi(x) = P(X \leq x)$$

distribuční funkce




S jakou pravděpodobností bude hodnota náhodné veličiny X menší než x?

S jakou pravděpodobností nebude hodnota náhodné veličiny X větší než x?

S jakou pravděpodobností bude hodnota náhodné veličiny X větší než x?

$$P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - \Phi(x)$$

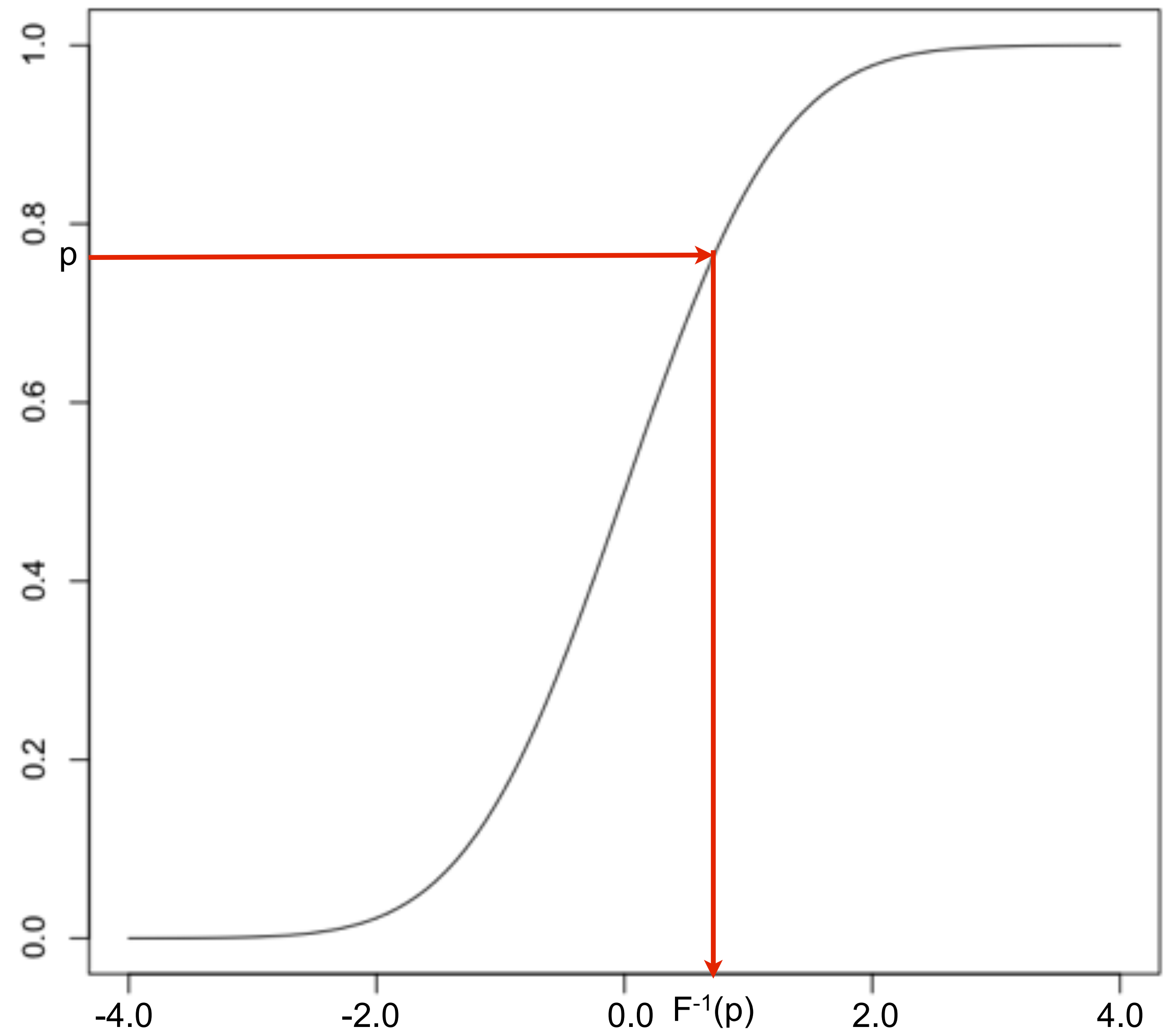
# Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$x \in R$$

$$X \sim N(0,1)$$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$




$$\Phi(x) = P(X \leq x)$$

distribuční funkce

Jakou hodnotu náhodná veličina X nepřekročí s pravděpodobností p?

$$x_p = \Phi^{-1}(p)$$

kvantilová funkce

Jakých hodnot bude náhodná veličina X nabývat s předem danou pravděpodobností p?

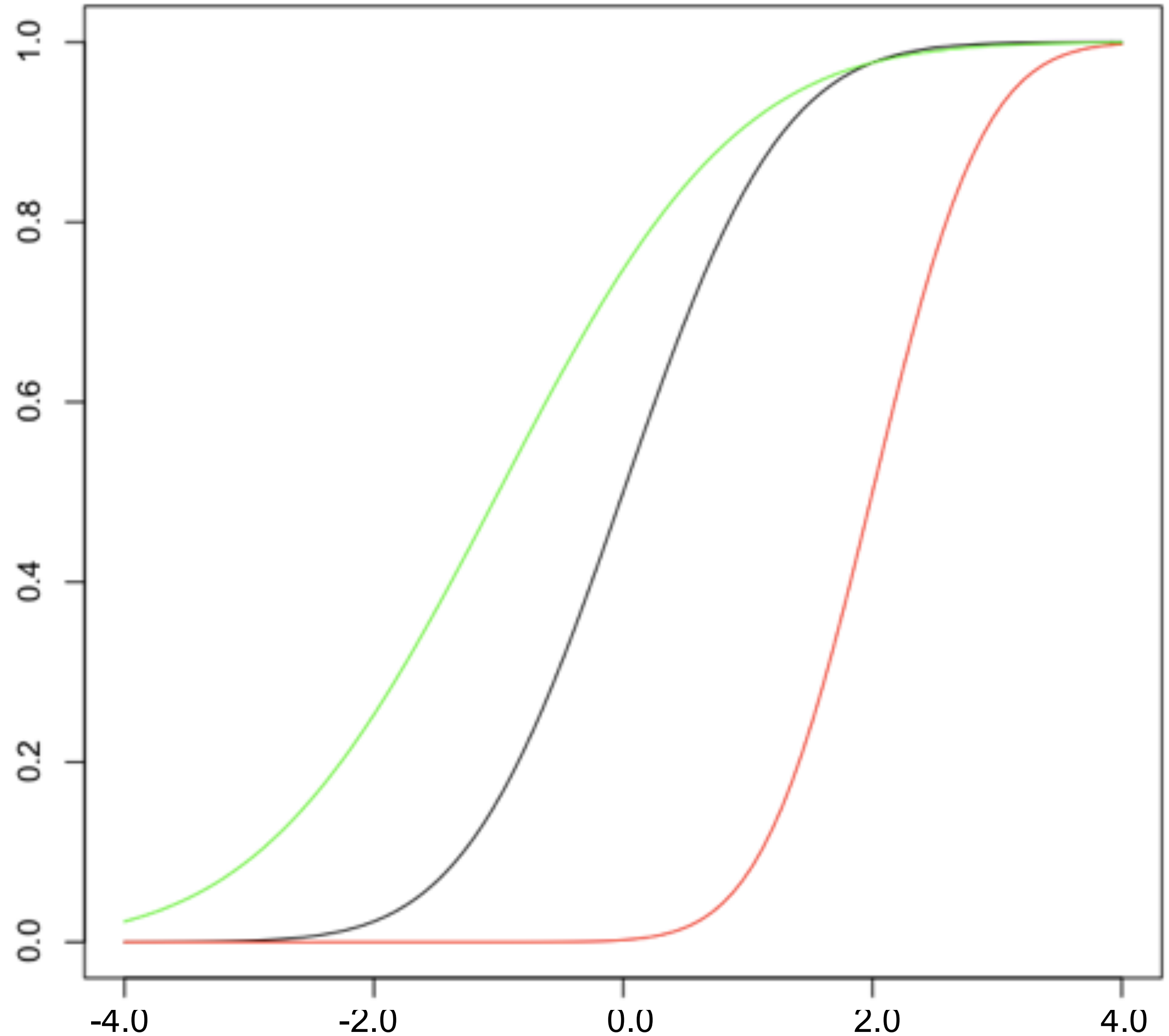
# Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

$$x \in R$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$




$$\boxed{F(x) = P(X \leq x)}$$

distribuční funkce

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}, \quad x \in R$$

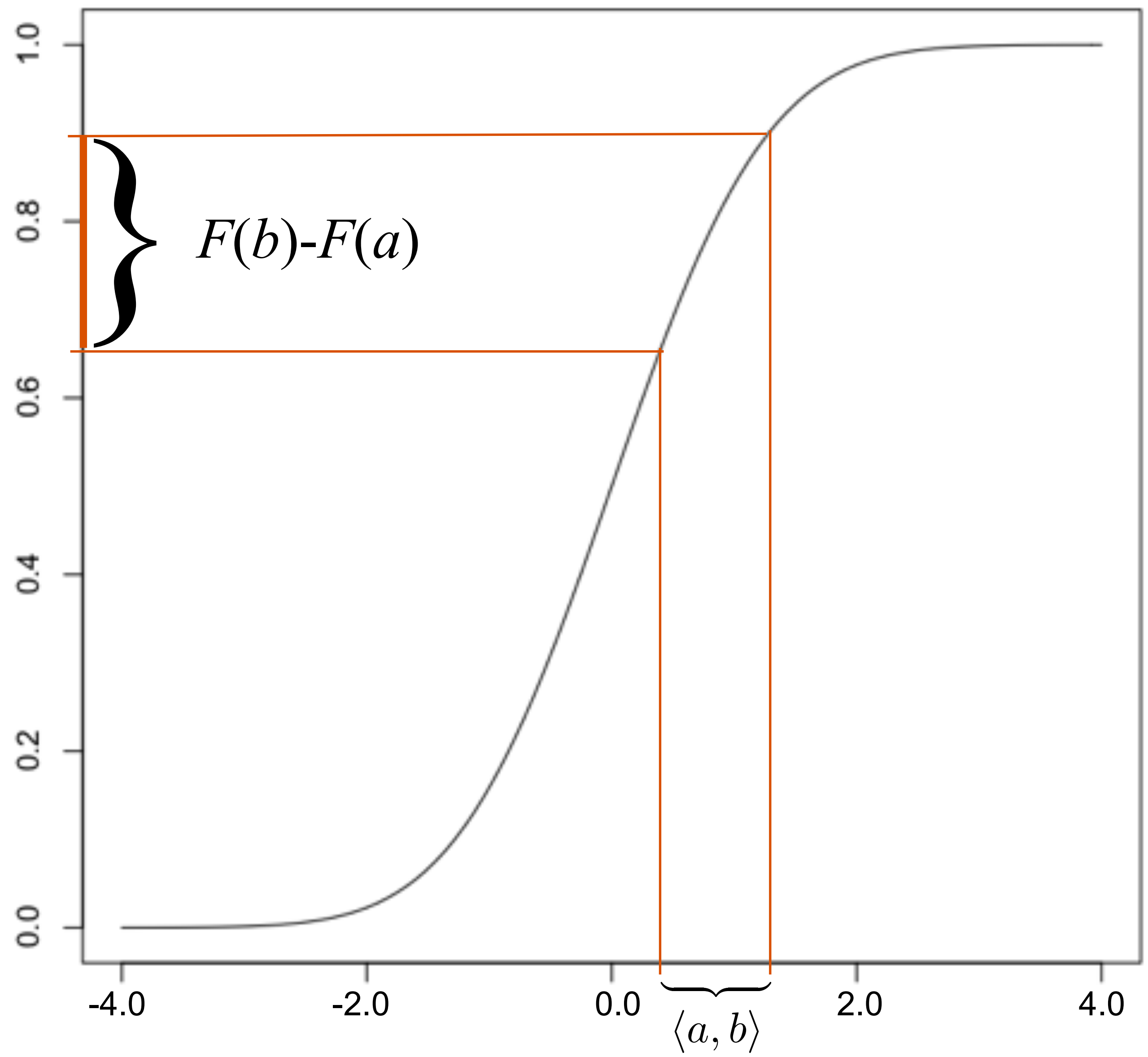
# Normální rozdělení

S jakou pravděpodobností bude budoucí hodnota náhodné veličiny X v intervalu $\langle a, b \rangle$ ?

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^b f(x)dx - \int_{-\infty}^a f(x)dx$$

$$\boxed{P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)}$$



# Normální rozdělení

Symetrie:

$$X \sim N(0,1)$$

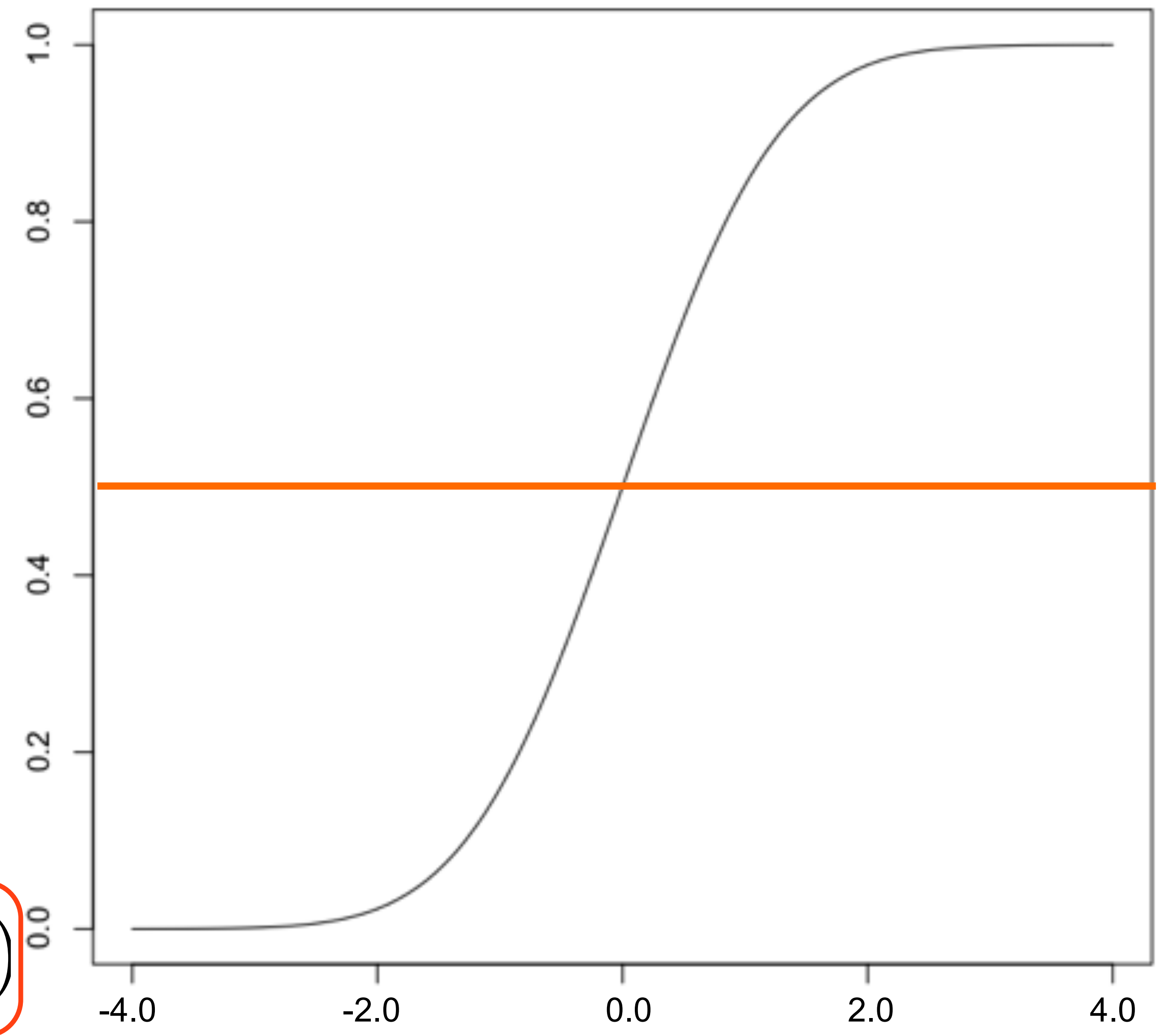
$$f(x) = f(-x)$$

$$\boxed{\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)}$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$f(\mu + x) = f(\mu - x)$$

$$\boxed{F(\mu + x) = 1 - F(\mu - x)}$$




$$P(|X| \leq x) = \Phi(x) - \Phi(-x) = \Phi(x) - (1 - \Phi(x)) = 2\Phi(x) - 1$$

$$P(|X - \mu| \leq x) = F(\mu + x) - F(\mu - x) =$$

$$F(\mu + x) - (1 - F(\mu + x)) = 2F(\mu + x) - 1$$

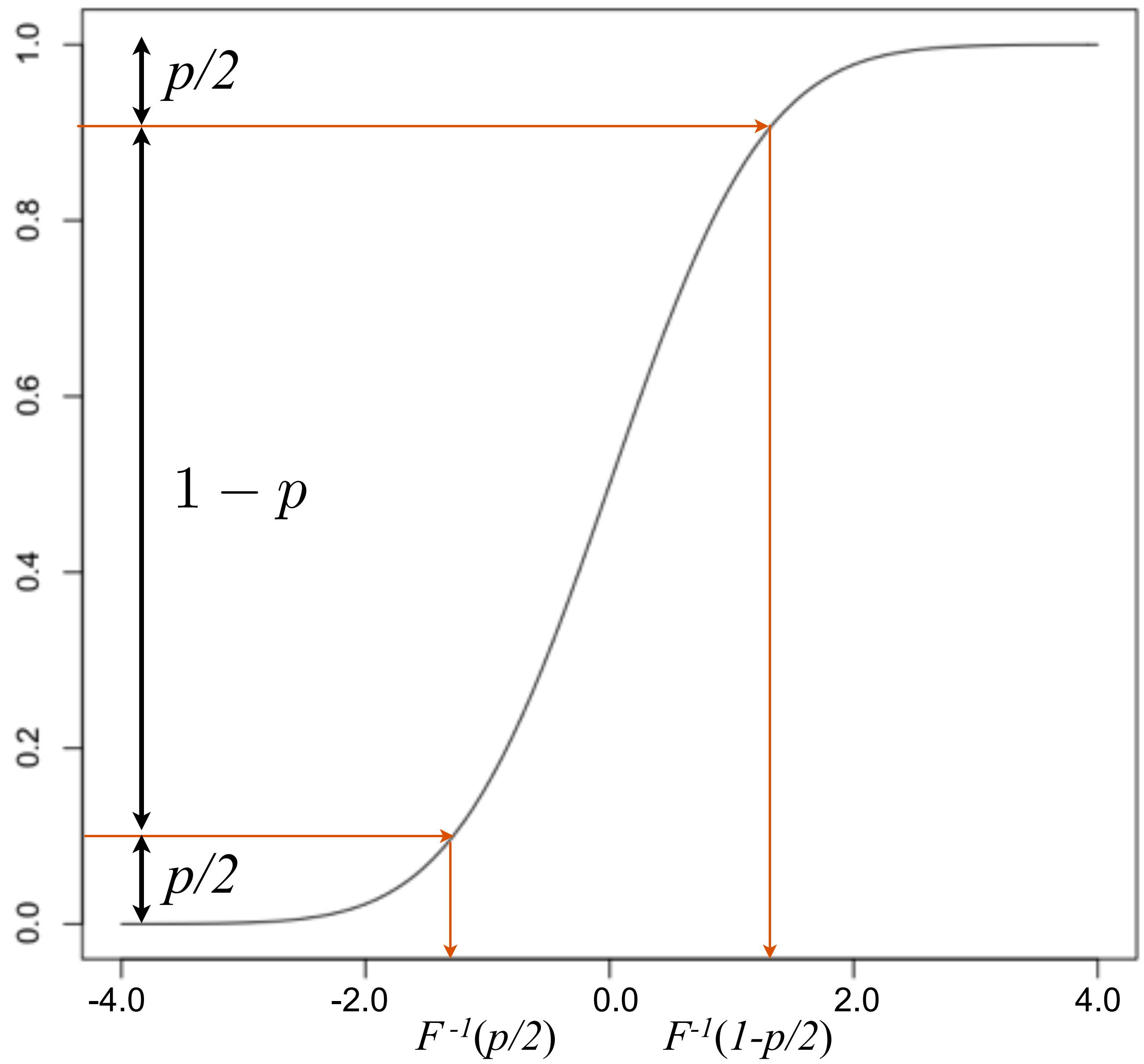
# Normální rozdělení

Jakých hodnot kolem střední hodnoty bude náhodná veličina X nabývat s předem danou pravděpodobností 1-p?

$$P(a \leq X \leq b) = 1 - p$$

$$\begin{aligned} a &= F^{-1}(p/2), \\ b &= F^{-1}(1 - p/2) \end{aligned}$$

($p/2$)-kvantil normálního rozdělení a ($1$-$p/2$)-kvantil normálního rozdělení




Ze symetrie plyne:

$$X \sim N(0,1): \quad x_{p/2} = \Phi^{-1}(p/2) = -x_{1-p/2} = -\Phi^{-1}(1-p/2)$$

$$Y \sim N(\mu, \sigma^2): \quad y_{p/2} = F^{-1}(p/2) = 2\mu - y_{1-p/2} = 2\mu - F^{-1}(1-p/2)$$

# Normální rozdělení

Jaký je vztah mezi $x_{p/2}$ a $y_{p/2}$?

$$X \sim N(0,1), Y \sim N(\mu, \sigma^2)$$

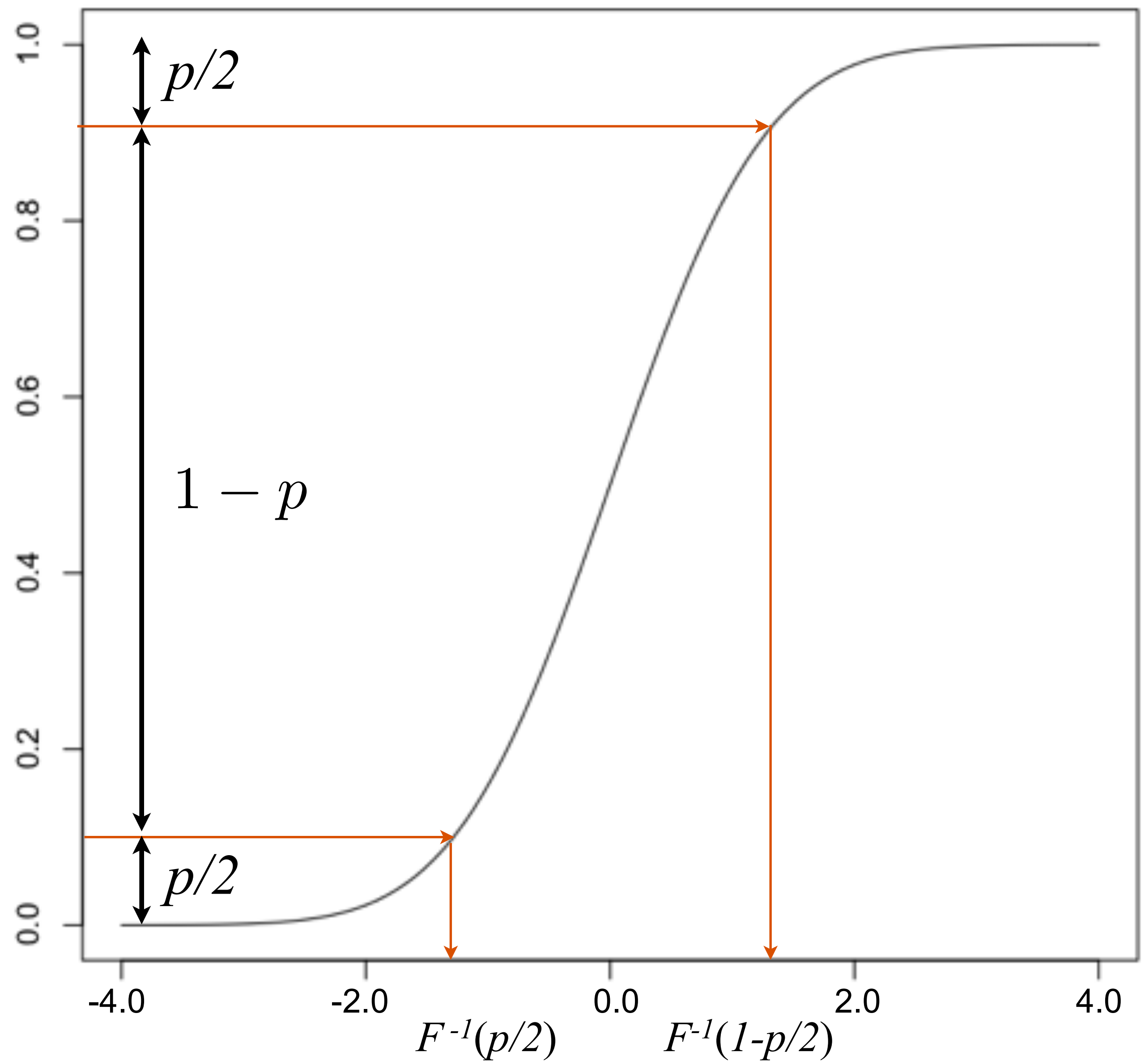
$$\Rightarrow X = \frac{Y-\mu}{\sigma}$$

$$\Rightarrow Y = \sigma X + \mu$$

$$F(y) = P(Y \leq y) =$$

$$P(\frac{Y-\mu}{\sigma} \leq \frac{y-\mu}{\sigma}) =$$

$$P(X \leq \frac{y-\mu}{\sigma}) = \Phi(\frac{y-\mu}{\sigma})$$




Tedy je: $F(y) = \Phi(\frac{y-\mu}{\sigma})$

... a odtud: $F^{-1}(p) = \sigma \Phi^{-1}(p) + \mu$

Vše se prakticky vyjadřuje pouze v tzv. kritických hodnotách: $u_p = \Phi^{-1}(1-p/2)$

# Normální rozdělení

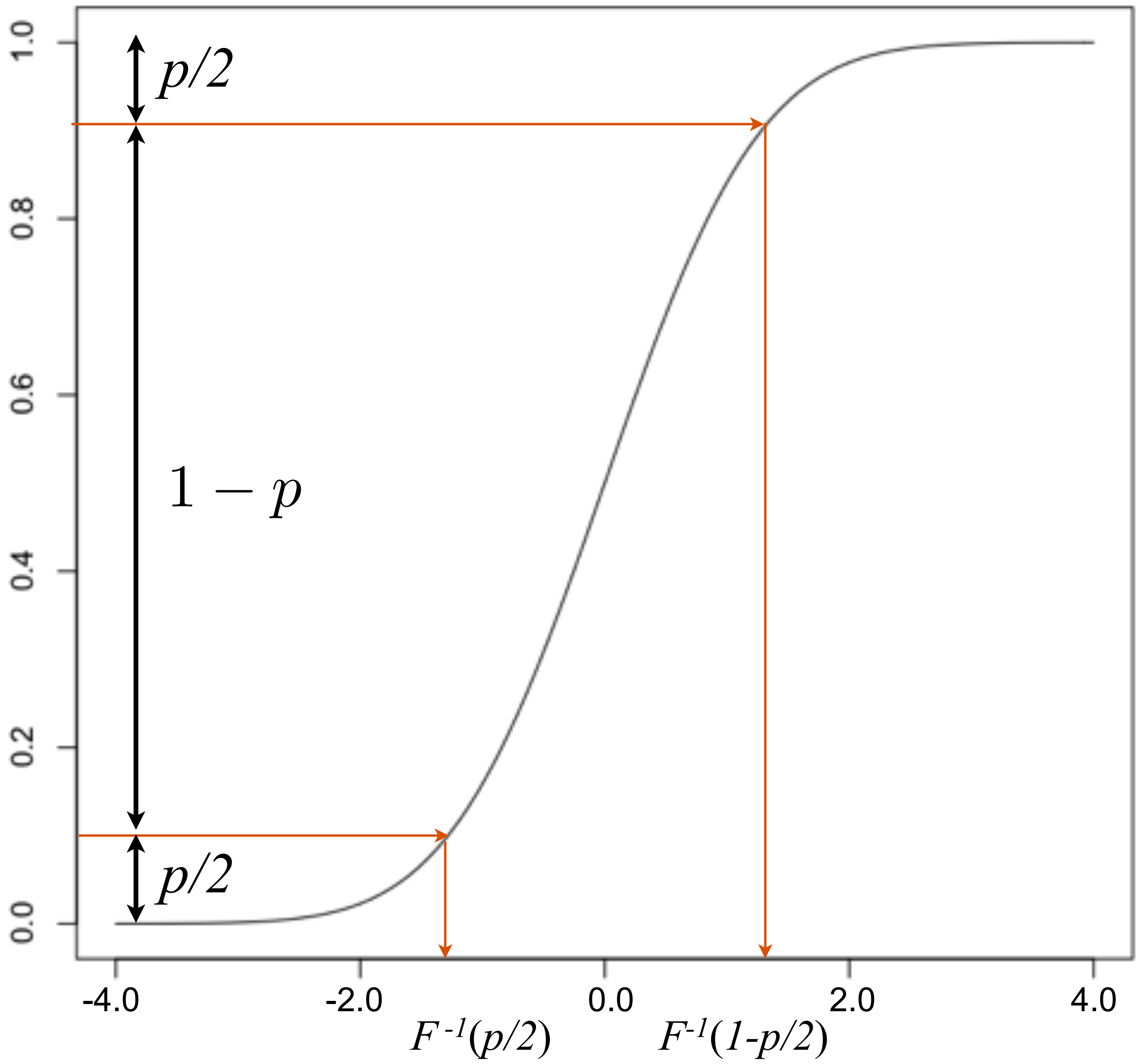
Jaký je vztah mezi $x_{p/2}$ a $y_{p/2}$?

... označme tedy

$$\Phi^{-1}(1-p/2) = u_p$$

... potom

$$\begin{aligned}\Phi^{-1}(p/2) &= -u_p \\ F^{-1}(1-p/2) &= \mu + \sigma u_p \\ F^{-1}(p/2) &= \mu - \sigma u_p\end{aligned}$$




Tedy je: $$F(y) = \Phi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)$$

... a odtud: $$F^{-1}(p) = \sigma\Phi^{-1}(p) + \mu$$

Vše se prakticky vyjadřuje pouze v tzv. kritických hodnotách: $u_p = \Phi^{-1}(1-p/2)$

# Normální rozdělení

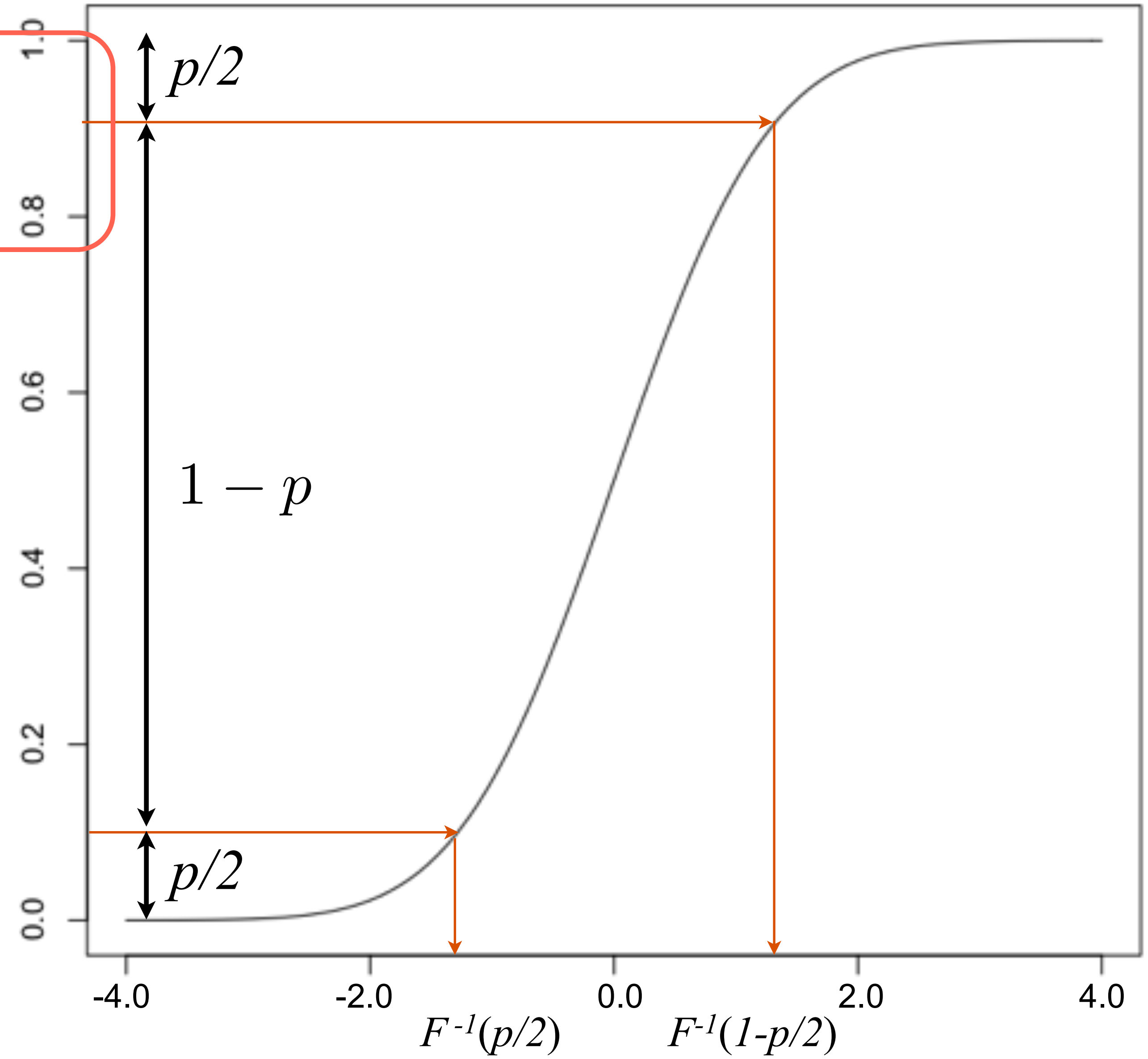
Jaký je vztah mezi $x_{p/2}$ a $y_{p/2}$?

... označme tedy

$$\Phi^{-1}(1-p/2) = u_p$$

... potom

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(p/2) &= -u_p \\ F^{-1}(1-p/2) &= \mu + \sigma u_p \\ F^{-1}(p/2) &= \mu - \sigma u_p \end{aligned}$$




Tedy pro $\alpha \in (0,1)$

$X \sim N(0,1) \Rightarrow$ $$P(-u_\alpha \le X \le u_\alpha) = 1-\alpha$$

$Y \sim N(\mu,\sigma^2) \Rightarrow$ $$P(\mu - \sigma u_\alpha \le Y \le \mu + \sigma u_\alpha) = 1-\alpha$$

$$P\left(-u_\alpha \le \frac{Y-\mu}{\sigma} \le u_\alpha\right) = 1-\alpha$$

# Parametry normálního rozdělení

Střední hodnota náhodné veličiny X:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Rozptyl náhodné veličiny X:

$$var(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \quad E(X) = \mu \qquad var(X) = \sigma^2$$

Jak tyto parametry najít, když máme k dispozici pouze několik měření veličiny X?

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \qquad\qquad X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$$

# Bodové odhady parametrů $N(\mu, \sigma^2)$

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ $\qquad$ $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$

Bodový odhad střední hodnoty náhodné veličiny X:

$$\widehat{E(X)} = \frac{1}{n}\sum_{i-1}^{n} X_i = \bar{X} = \hat{\mu}$$

výběrový průměr

Bodové odhady rozptylu náhodné veličiny X:

$$var(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$$

$$\widehat{var(X)} = \frac{1}{n}\sum_{i-1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i-1}^{n} X_i^2\right) - (\bar{X})^2 = \hat{\sigma}^2$$

rozptyl základního souboru

$$\widetilde{var(X)} = \frac{1}{n-1}\sum_{i-1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 =$$

$$\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i-1}^{n} X_i^2\right) - \frac{n}{n-1}(\bar{X})^2 = s^2$$

výběrový rozptyl

# Bodové odhady parametrů $N(\mu, \sigma^2)$

Kdy použít který odhad rozptylu náhodné veličiny X ?

$$\widehat{var(X)} = \frac{1}{n}\sum_{i-1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i-1}^{n} X_i^2\right) - (\bar{X})^2 = \hat{\sigma}^2$$

rozptyl základního souboru použijeme pro velká $n$ (řádově stovky)

$$\widetilde{var(X)} = \frac{1}{n-1}\sum_{i-1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 =$$

$$\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i-1}^{n} X_i^2\right) - \frac{n}{n-1}(\bar{X})^2 = s^2$$

výběrový rozptyl použijeme pro malé rozsahy výběru $n$

# Intervalový odhad střední hodnoty

Výběrový průměr i výběrový rozptyl jsou opět náhodné veličiny

$$E(\bar{X}) = \mu$$

$$var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \quad \Rightarrow \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

Odtud:

$$P(-u_\alpha \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$$

$$P(-\frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_\alpha \leq \bar{X} - \mu \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_\alpha) = 1 - \alpha$$

$$P(-\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_\alpha \leq -\mu \leq -\bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_\alpha) = 1 - \alpha$$

$$P(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_\alpha \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_\alpha) = 1 - \alpha$$

$$\boxed{P(\mu \in \langle \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_\alpha, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_\alpha \rangle) = 1 - \alpha}$$

# Intervalový odhad střední hodnoty

Výběrový průměr i výběrový rozptyl jsou opět náhodné veličiny

$$E(\bar{X}) = \mu$$

$$var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \quad \Rightarrow \bar{X} \sim N\big(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\big) \quad \Rightarrow \quad \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

Odtud $(1-\alpha)$-intervalový odhad střední hodnoty při známém parametru $\sigma$ je

$$\langle \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_\alpha, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_\alpha \rangle$$

$$P(\mu \in \langle \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_\alpha, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_\alpha \rangle) = 1 - \alpha$$

# Intervalový odhad střední hodnoty

Výběrový průměr i výběrový rozptyl jsou opět náhodné veličiny

$$E(\bar{X}) = \mu$$

$$var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \quad \Rightarrow \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

Odtud $(1-\alpha)$-intervalový odhad střední hodnoty při známém parametru $\sigma$ je

$$\langle \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_\alpha, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_\alpha \rangle$$

$(1-\alpha)$-intervalový odhad střední hodnoty při neznámém parametru $\sigma$ je

$$\langle \bar{X} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1), \bar{X} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1) \rangle$$

kde $t_\alpha(n-1)$ je kritická hodnota Studentova *t*-rozdělení s parametrem $(n\text{ -}1)$

$(1-\alpha/2)$- kvantil

takzvané “stupně volnosti”

# Interval spolehlivosti pro průměr

$$P(L \leq \bar{X} \leq U) = 1 - \alpha$$

$(1-\alpha)$-interval spolehlivosti pro průměr dat z normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$

$$\langle \mu - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_\alpha, \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_\alpha \rangle$$

v případě, že známe rozptyl $\sigma^2$, nebo též

$$\langle \mu - \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1), \mu + \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1) \rangle$$

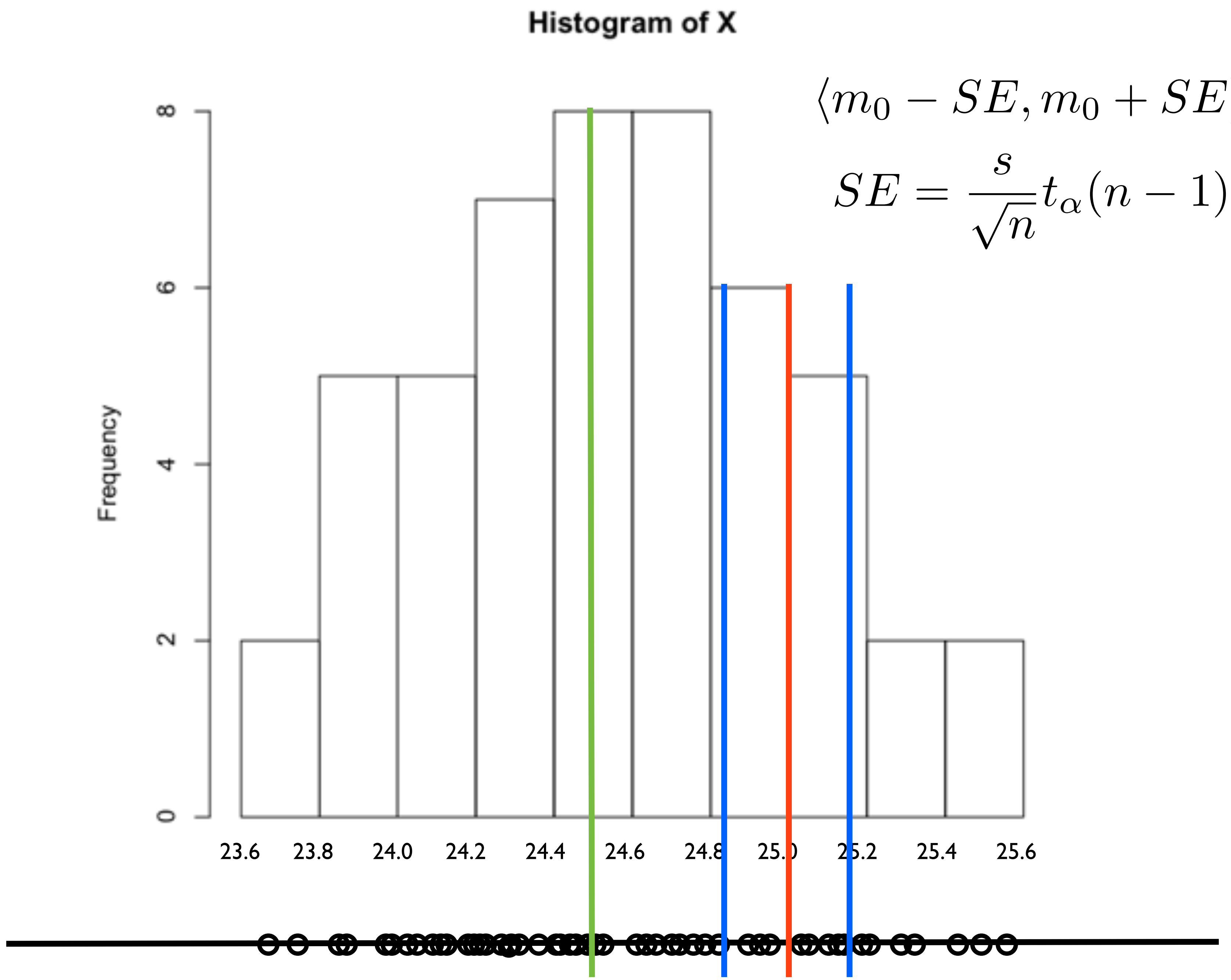
pokud rozptyl odhadujeme z dat pomocí výběrového rozptylu $s^2$.
Všimněte si, že oba intervaly jsou ve tvaru

$$(\mu - SE, \mu + SE)$$

$SE$ je tzv. “standardní chyba” (Standard Error)

## Hmotnosti obsahu balení, dávkovaného automatem:

Lze považovat automat za správně seřízený ($m_0$=25,0g)?




$$\langle m_0 - SE, m_0 + SE \rangle$$

$$SE = \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1)$$

| | |
|---|---|
| 24.52586 | 24.17119 |
| 24.54486 | 24.44240 |
| 23.93455 | 24.20389 |
| 24.19974 | 24.34851 |
| 23.94024 | 24.21022 |
| 24.87474 | 25.06155 |
| 25.48924 | 25.32572 |
| 23.71721 | 24.61622 |
| 25.06676 | 24.90055 |
| 24.36213 | 24.98580 |
| 24.80591 | 24.20853 |
| 24.72623 | 24.64437 |
| 24.70405 | 23.97645 |
| 25.29837 | 24.46910 |
| 24.99453 | 25.42994 |
| 24.66147 | 24.75773 |
| 25.03970 | 24.44901 |
| 25.13285 | 24.40205 |
| 24.78721 | 23.83656 |
| 24.17186 | 23.65390 |
| 24.48244 | 24.68550 |
| 24.22988 | 23.83956 |
| 24.09777 | 24.52098 |
| 24.89240 | 24.25332 |
| 24.14259 | 25.12906 |

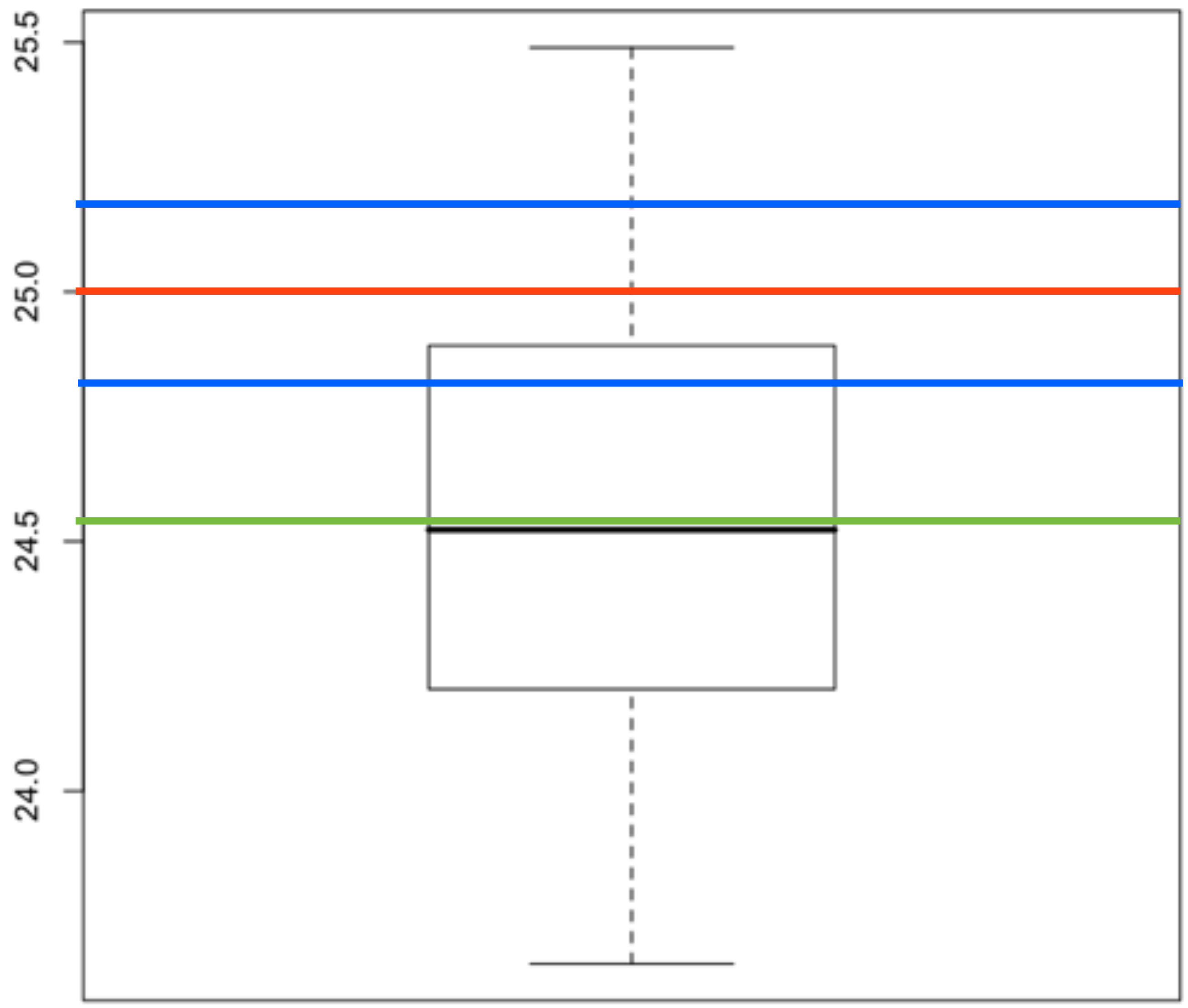
$\bar{X} = 24.55,\ s^2(X) = 0.21,\ s(X) = 0.46,\ n = 50$

Chceme ověřit, zda měření odpovídají rozdělení $N(m_0, s^2)$

$\alpha = 0.05 \ \Rightarrow t_{0.05}(49) = 2.01$ $SE = 0.132$ $\bar{X} \notin \langle 24.868, 25.132 \rangle$

**Hmotnosti obsahu balení, dávkovaného automatem:**

Lze považovat automat za správně seřízený ($m_0$=25,0g)?




$\bar{X} = 24.55,\ s^2(X) = 0.21,\ s(X) = 0.46,\ n = 50$

Chceme ověřit, zda měření odpovídají rozdělení $N(m_0, s^2)$

$\alpha = 0.05 \ \Rightarrow t_{0.05}(49) = 2.01$ $SE = 0.132$ $\bar{X} \notin \langle 24.868, 25.132 \rangle$

| | |
|---|---|
| 24.52586 | 24.17119 |
| 24.54486 | 24.44240 |
| 23.93455 | 24.20389 |
| 24.19974 | 24.34851 |
| 23.94024 | 24.21022 |
| 24.87474 | 25.06155 |
| 25.48924 | 25.32572 |
| 23.71721 | 24.61622 |
| 25.06676 | 24.90055 |
| 24.36213 | 24.98580 |
| 24.80591 | 24.20853 |
| 24.72623 | 24.64437 |
| 24.70405 | 23.97645 |
| 25.29837 | 24.46910 |
| 24.99453 | 25.42994 |
| 24.66147 | 24.75773 |
| 25.03970 | 24.44901 |
| 25.13285 | 24.40205 |
| 24.78721 | 23.83656 |
| 24.17186 | 23.65390 |
| 24.48244 | 24.68550 |
| 24.22988 | 23.83956 |
| 24.09777 | 24.52098 |
| 24.89240 | 24.25332 |
| 24.14259 | 25.12906 |

# Jednovýběrové testy o střední hodnotě

$$\bar{X} \notin \langle m_0 - \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1), m_0 + \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1) \rangle$$

$$\bar{X} - m_0 \notin \langle -\frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1), \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1) \rangle$$

$$\frac{\bar{X} - m_0}{s}\sqrt{n} \notin \langle -t_\alpha(n-1), t_\alpha(n-1) \rangle \Leftrightarrow \boxed{\left|\frac{\bar{X} - m_0}{s}\sqrt{n}\right| \geq t_\alpha(n-1)}$$

---

$H_0 : \quad \mu = m_0$ Nulová hypotéza

$H_A : \quad \mu \neq m_0$ Alternativní hypotéza

---

$T = \frac{\bar{X} - m_0}{s}\sqrt{n}$ Testová statistika

$\alpha \quad \Rightarrow \quad t_\alpha(n-1)$ hladina významnosti, kritická hodnota

---

$|T| \geq t_\alpha(n-1)$ rozhodovací pravidlo

**Nulová hypotéza se nepřijímá, pouze zamítá či nezamítá!**

Statisticky nelze nic dokázat, pouze zamítnout!